



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x + 2a \\ 9x^2 = 6 - 9x + 6a \end{cases} \quad \sqrt{1}$$

1

$$9x^2 - 3(x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x - 3(6 - 9x) + 6a - 6a$$

$$9x^2 - 3x^4 + 12x^3 - 12x^2 = 6 - 9x - 18 + 27x$$

$$\underline{3x^2} - \underline{x^4} + \underline{4x^3} - \underline{4x^2} = \underline{2} - \underline{3x} - \underline{6} + \underline{9x}$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

~~$(x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$~~   $D = 4 + 16 = 20$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x \in \{1 - \sqrt{5}; 1; 1 + \sqrt{5}\}$$

Ответ:  $x \in \{1 - \sqrt{5}; 1; 1 + \sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

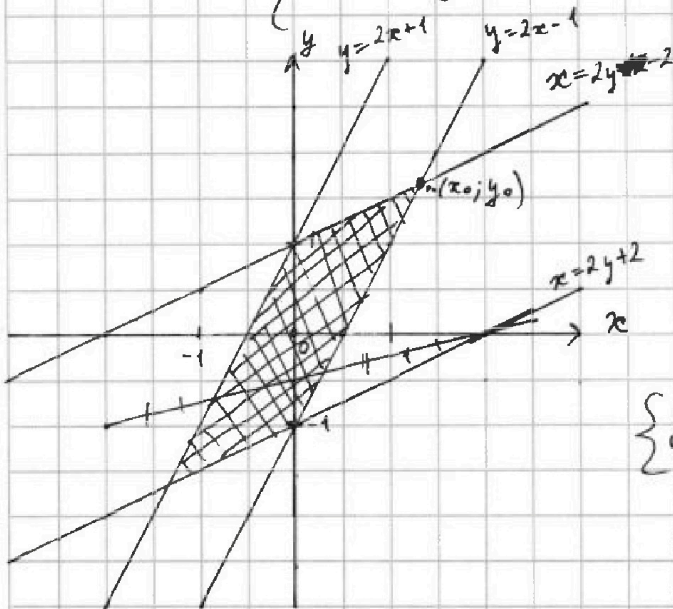
$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ x \leq 2+2y \\ x \leq 2y \\ 2y-2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y \leq x \leq 2y+2 \\ 2y-2 \leq x \leq 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq 1+2x \\ y \leq 2x \\ y \geq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq y \leq 2x+1 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x+1 \end{cases}$$



заштрихованные точки  
подходят

в точке  $(x_0, y_0)$  максимальный  $x$  и максимальный  $y$

$\Rightarrow 3y + 6x$  максимален  
в этой точке

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - 1 \\ x_0 = 2y_0 - 2 \end{cases}$$

$$x_0 + 2y_0 = 2y_0 - 2 + 4x_0 - 2$$

$$4 = 3x_0$$

$$x_0 = \frac{4}{3}$$

$$y_0 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

$$3y_0 + 6x_0 = 5 + 2 \cdot 4 = 13$$

Ответ:  $\max(3y + 6x) = 13$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4n^2 + 4mn - 9m - 14n = (m+2n)^2 - 4(m+2n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

← симметрична  
отн. m, 2n

Допустим  $B = 11p^2 \Rightarrow B = 11 \cdot p \cdot p$

~~$B = m \cdot B = n, B = (m+2n+9)$~~

~~$m = n = p$   
 $m+2n+9 = 11$   
 $3p+9=11$~~

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} m = n = p \\ m+2n+9 = 11 \end{cases} \Rightarrow 3p = 2 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} m = 11 \\ n = p = m+2n+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = p = 2n+20 \Rightarrow n = -20 \\ m = 11 \end{cases} \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} n = 11 \\ m = p = m+2n+9 \end{cases} \Rightarrow m = p = m+22+9 = m+31 \text{ не противоречие}$$

$\Rightarrow B \neq 11p^2$

Допустим  $B = 45q^2; A = 11p^2$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 11p = m+2n \\ p = m+2n-4 \end{cases} \Rightarrow 10p = 4 \leftarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} p = m+2n \\ 11p = m+2n-4 \end{cases} \leftarrow \text{не подходит, т.к. } m+2n > m+2n-4, \text{ но } 11p = p$$

$$\begin{cases} p^2 = m+2n \\ 11 = m+2n-4 \end{cases} \Rightarrow p^2 - 11 = 4 \Rightarrow p^2 = 18 \leftarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} 11 = m+2n \\ p^2 = m+2n-4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = m + 2n \\ p^2 = m + 2n - 4 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 11 - 4 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$B = m \cdot n (m + 2n + 9) = 45 q^2 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$B = m \cdot n (11 + 9) = 20 m \cdot n = 5 \cdot 4 \cdot m \cdot n$$

$$5 \cdot 3 q^2 = 4 m n, \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

не погр.  $(m+2n=11)$   
~~не погр. 2~~  
 тк ~~n=5, m=3~~  
 если  $m, n$  будут  
 больше, то тоже  $m+2n > 11$ ,  
 а меньше  $m, n$  не могут быть

$$A = 44$$

$$B = 300$$

Ответ:  $A = 44$   
 $B = 300$

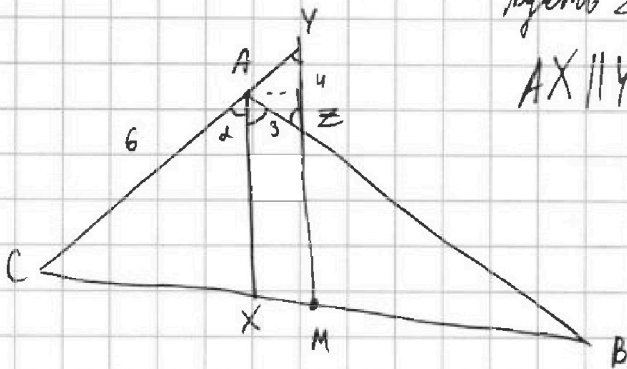


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



#4 тк биссектриса  
 $\angle CAB = 2 = \angle BAX$

$AX \parallel YM \Rightarrow \angle CAH = \angle CYM$

$\angle BAX = \angle AZY$

$\angle CYM = \angle AZY = 2 \Rightarrow$

$\triangle AYZ$  - равнобедренный,  $YZ$  - осн.

$\Rightarrow AY = AZ = 3$

$\cos 2 = \frac{YZ}{2AZ} = \frac{2}{3}$

$\frac{AZ}{XM} = \frac{ZB}{MB}$  — Т. Фалеса

~~$\frac{AY}{XM} = \frac{AC}{CX}$  — Т. Фалеса~~

$\frac{AY}{XM} = \frac{AC}{CX} = \frac{YC}{CM}$

$\triangle CAH \sim \triangle CYM$  по 2м углам

~~$\frac{AZ}{XM} \cdot \frac{XM}{AY} = 1 = \frac{ZB}{MB} \cdot \frac{CM}{YC} = \frac{ZB}{YC} = \frac{ZB}{6+3} = \frac{ZB}{9}$~~

$\Rightarrow ZB = 9 \Rightarrow AB = 12$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 2$  — Т. кос

$CB^2 = 36 + 144 - 6 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 4 \cdot 4 = 196$

$BC = CB = \sqrt{196} = 14$

Ответ:  $BC = 14$

$\frac{14}{14} = \frac{196}{196}$   
 $\frac{14}{56} = \frac{14}{56}$   
 $\frac{14}{196} = \frac{14}{196}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

однаковая, монотонно возрастающая функция

$$x = y, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{14+5x-x^2} = 2\sqrt{(4-x)(2+x)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{-(x-4)} + 4 = 2\sqrt{-(x+2)(x-4)}$$

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$-x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$-(x+2)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$$

$$x \in [0; 4] \Rightarrow y \in [0; 4]$$

$$x+2 - 2\sqrt{(x+2)(x-4)} - x+4 = 49 - 4(x+2)(x-4)$$

$$28\sqrt{-(x+2)(x-4)} = 40 - 4(x+2)(x-4) = -4x^2 + 40 + 156 + 20x = -4x^2 + 20x + 196$$

$$13\sqrt{-(x+2)(x-4)} = -2x^2 + 10x + 48$$

$$169(-x^2+14+5x) = 4x^4 + 100x^2 + 48^2(-20x^3 - 96x^2 + 480x):2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= a \\ \sqrt{-(x-4)} &= b \\ x+2 &= a^2 \\ -x+4 &= b^2 \\ a+b &= 4 \\ a-b &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 4 \\ 2a+b &= 2 \\ a^2+2a+b &= 0 \quad (a^2+4)^2 + 6 = 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{-(x-4)} + 4 = 2\sqrt{(x+2)(x-4)} ; x \in [0; 4]$$

$$\sqrt{x+2} + 4 = \sqrt{-(x-4)} + 2\sqrt{-(x-4)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x+2} & a &= \sqrt{x+2} \\ b &= \sqrt{-(x-4)} & b &= -\sqrt{-(x-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 4 &= b + 2ab & a + b + 4 &= -2ab \\ a + b + 2ab + 4 &= 0 \end{aligned}$$

уравнение симметрично от  $a, b \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  если  $(a, b)$  - корни, то  $(b, a)$  - корни





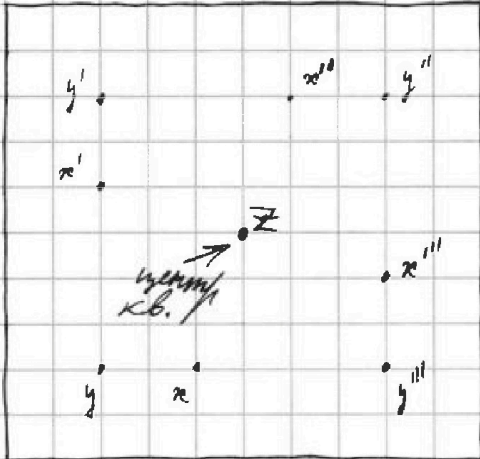
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Так в условиях написано поворотом, а не ~~поворотом~~ сменой поворотов или не поворотом и параллельным переносом, то поворот должен осуществляться относительно

центра квадрата, существует 3 таких поворота ~~и~~  $(90^\circ; 180^\circ; 270^\circ)$

Т.е. для любой точки  $x$  кроме ц.кв. есть 3 точки  $(x', x'', x''')$  которые переходят в  $x$  после поворота.

Для ~~любой~~ пары точек  $x, y$  кроме ц.кв. есть 3 пары точек  $(x'; y'), (x''; y''), (x'''; y''')$  переходящих в пару  $(x; y)$  после поворота

~~Возможна~~ пара точек  $(x, z)$   $z$  - ц.кв., тогда при любом повороте от ~~ц.кв.~~  $z \rightarrow z \Rightarrow$  существует ~~и~~ 3 ~~пары~~ пары точек  $(x'; z), (x''; z), (x'''; z)$  переходящих в  $(x; z)$  после поворота



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

кол-во узлов сети в. или на гр. кв.  $11 \cdot 11 = 121$

кол-во различных пар узлов (по квадрату)  $= \frac{121 \cdot 120}{2}$

кол-во различных маршрутов (с поворотом)  $\frac{121 \cdot 120}{2 \cdot 4} =$

$= 121 \cdot 15 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 15 \\ \hline 605 \\ 121 \\ \hline 1815 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1815 \overline{)15} \\ 15 \overline{)121} \\ \hline 31 \\ 30 \\ \hline 15 \\ 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 1815$

Ответ: 1815



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

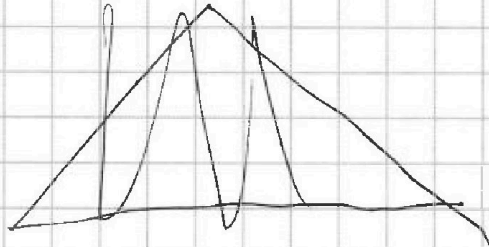
5

6

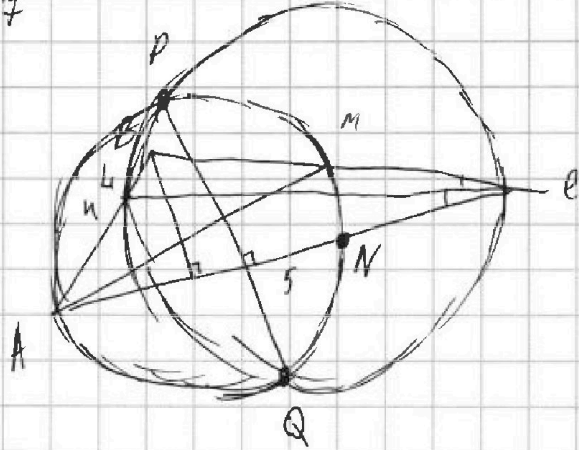
7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

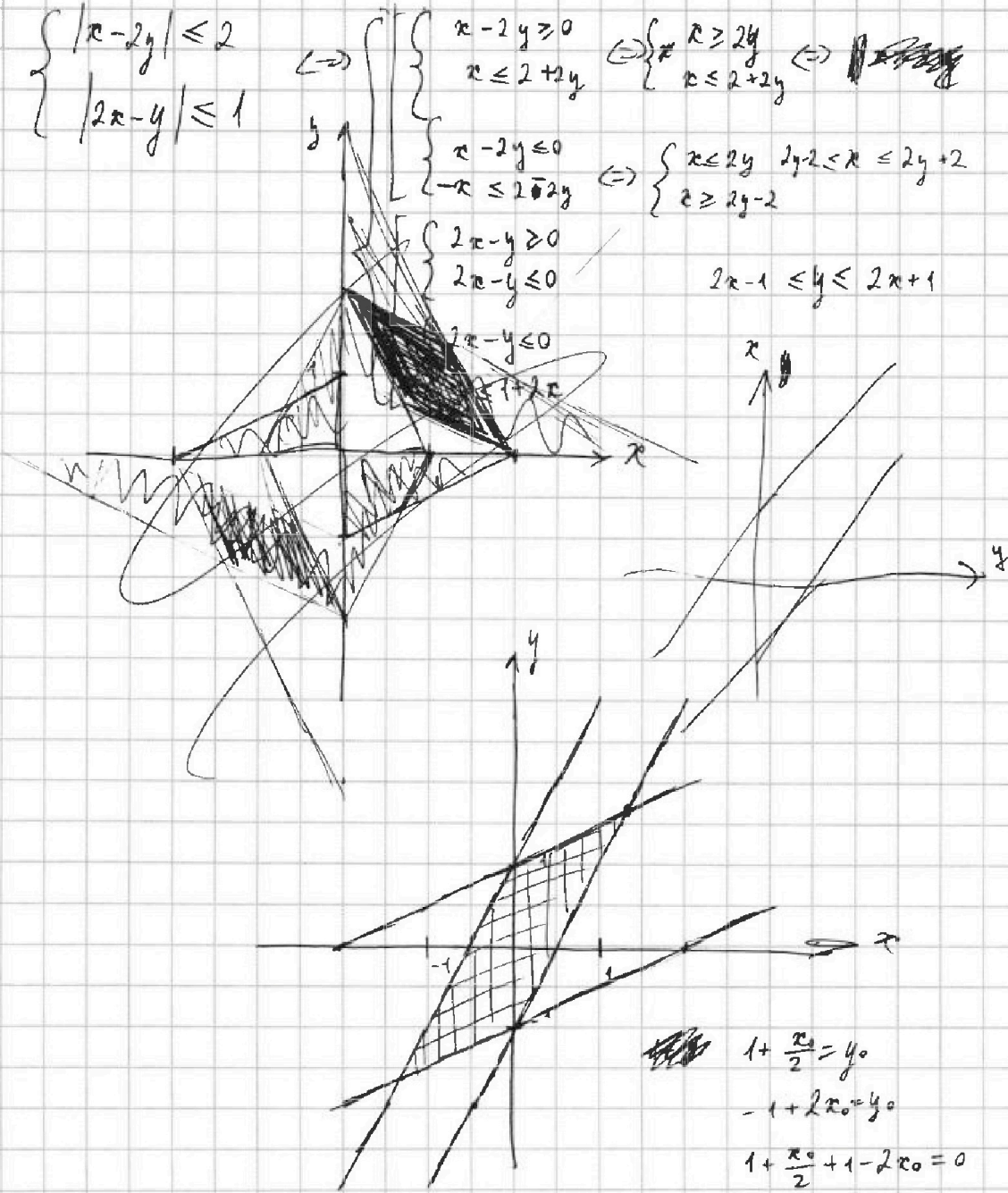
$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x \leq 2+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y \\ x \leq 2+2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 0 \\ -x \leq 2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ x \geq 2y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases}$$

$$2x-1 \leq y \leq 2x+1$$



$$\begin{aligned} 1 + \frac{x_0}{2} &= y_0 \\ -1 + 2x_0 &= y_0 \\ 1 + \frac{x_0}{2} + 1 - 2x_0 &= 0 \\ 2 &= 1,5x_0 \\ \frac{4}{3} &= x_0 \\ y_0 &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

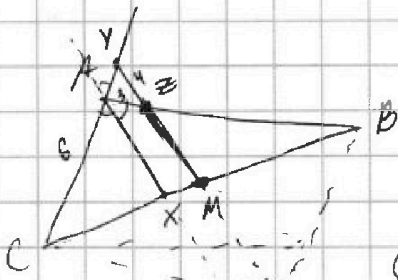


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

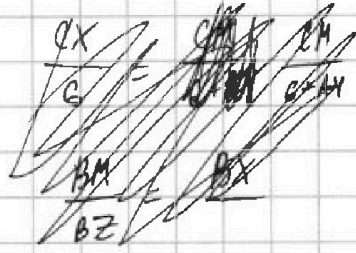
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AX}{G} = \frac{YM}{G+2}$$

$$\frac{ZM}{y} = \frac{AX}{y+3}$$



$$\frac{G}{CM-XM} = \frac{G+AY}{CM}$$

$$\frac{3}{XM} = \frac{BZ}{BM}$$

$$\frac{BZ}{BM} = \frac{BZ+3}{BM+XM}$$

$$\frac{3}{XM} = \frac{AY}{XM} = \frac{G+AY}{CM} = \frac{9}{CM}$$

$$BM = CM$$

$$m (m, k)$$

$$k = 2n$$

$$A = m^2 + 2km + k^2 - 4m - 4k = (m+k)^2 - 4(m+k) = (m+k)(m+k-4)$$

$$B = \frac{m^2k}{2} + \frac{mk^2}{2} + \frac{9mk}{2} = \frac{km}{2}(m+k+9)$$