



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x + 2a \\ 9x^2 = 6 - 9x + 6a \end{cases} \quad \sqrt{1}$$

1

$$9x^2 - 3(x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x - 3(6 - 9x) + 6a - 6a$$

$$9x^2 - 3x^4 + 12x^3 - 12x^2 = 6 - 9x - 18 + 27x$$

$$3x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 2 - 3x - 6 + 9x$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

~~$(x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$~~ $D = 4 + 16 = 20$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x \in \{1 - \sqrt{5}; 1; 1 + \sqrt{5}\}$$

Ответ: $x \in \{1 - \sqrt{5}; 1; 1 + \sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

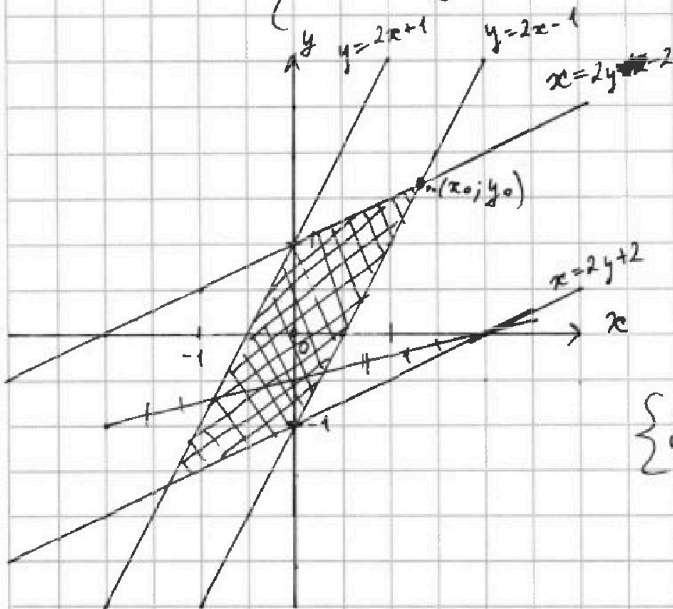
$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ x \leq 2+2y \\ x \leq 2y \\ 2y-2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y \leq x \leq 2y+2 \\ 2y-2 \leq x \leq 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq 1+2x \\ y \leq 2x \\ y \geq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq y \leq 2x+1 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x+1 \end{cases}$$



Заштрихованные точки
подходят

в точке (x_0, y_0) максимальный x и максимальный y

$\Rightarrow 3y + 6x$ максимален
в этой точке

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - 1 \\ x_0 = 2y_0 - 2 \end{cases}$$

$$x_0 + 2y_0 = 2y_0 - 2 + 4x_0 - 2$$

$$4 = 3x_0$$

$$x_0 = \frac{4}{3}$$

$$y_0 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

$$3y_0 + 6x_0 = 5 + 2 \cdot 4 = 13$$

Ответ: $\max(3y + 6x) = 13$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4n^2 + 4mn - 9m - 14n = (m+2n)^2 - 4(m+2n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

симметрична
отн. m, 2n

Допустим $B = 11p^2 \Rightarrow B = 11 \cdot p \cdot p$

~~$B = m \cdot B = n, B = (m+2n+9)$~~

~~$m = n = p$
 $m+2n+9 = 11$
 $3p+9=11$~~

\Rightarrow

$$\begin{cases} m = n = p \\ m+2n+9 = 11 \end{cases} \Rightarrow 3p = 2 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} m = 11 \\ n = p = m+2n+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = p = 2n+20 \Rightarrow n = -20 \\ m = 11 \end{cases} \text{ не подходит}$$

$$\begin{cases} n = 11 \\ m = p = m+2n+9 \end{cases} \Rightarrow m = p = m+22+9 = m+31 \text{ не противоречие}$$

$\Rightarrow B \neq 11p^2$

Допустим $B = 45q^2, A = 11p^2$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 11p = m+2n \\ p = m+2n-4 \end{cases} \Rightarrow 10p = 4 \leftarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} p = m+2n \\ 11p = m+2n-4 \end{cases} \leftarrow \text{не подходит, тк } m+2n > m+2n-4, \text{ но } 11p = p$$

$$\begin{cases} p^2 = m+2n \\ 11 = m+2n-4 \end{cases} \Rightarrow p^2 - 11 = 4 \Rightarrow p^2 = 18 \leftarrow \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} 11 = m+2n \\ p^2 = m+2n-4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 = m + 2n \\ p^2 = m + 2n - 4 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 11 - 4 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$B = m \cdot n (m + 2n + 9) = 45 q^2 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$B = m \cdot n (11 + 9) = 20 m \cdot n = 5 \cdot 4 \cdot m \cdot n$$

$$5 \cdot 3 q^2 = 4 m n, \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

~~TK~~ ~~n=5, m=3~~ не покр. (m+2n=11)
если m, n будут больше, то тоже m+2n > 11, а меньше m, n не могут быть

$$A = 44 \\ B = 300$$

Ответ: A = 44
B = 300

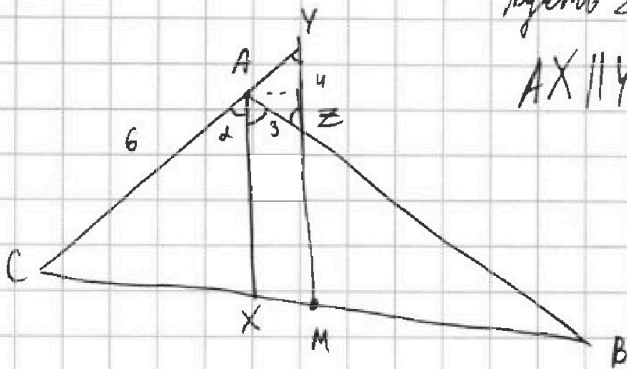


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



#4 тк биссектриса
 $\angle CAB = 2 = \angle BAX$

$AX \parallel YM \Rightarrow \angle CAH = \angle CYM$

$\angle BAX = \angle AZY$

$\angle CYM = \angle AZY = 2 \Rightarrow$

$\triangle AYZ$ - равнобедренный, YZ - осн.

$\Rightarrow AY = AZ = 3$

$\cos 2 = \frac{YZ}{2AZ} = \frac{2}{3}$

$\frac{AZ}{XM} = \frac{ZB}{MB}$ — Т. Фалеса

~~$\frac{AY}{XM} = \frac{AC}{CX}$ — Т. Фалеса~~

$\frac{AY}{XM} = \frac{AC}{CX} = \frac{YC}{CM}$

$\triangle CAH \sim \triangle CYM$ по 2м углам

~~$\frac{AZ}{XM} \cdot \frac{XM}{AY} = 1 = \frac{ZB}{MB} \cdot \frac{CM}{YC} = \frac{ZB}{YC} = \frac{ZB}{6+3} = \frac{ZB}{9}$~~

$\Rightarrow ZB = 9 \Rightarrow AB = 12$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 2$ — Т. кос

$CB^2 = 36 + 144 - 6 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 4 \cdot 4 = 196$

$BC = CB = \sqrt{196} = 14$

Ответ: $BC = 14$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \end{cases}$$

однаковая, монотонно возрастающая функция

$$x = y, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{14+5x-x^2} = 2\sqrt{(4-x)(2+x)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{-(x-4)} + 4 = 2\sqrt{-(x+2)(x-4)}$$

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$-x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$-(x+2)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$$

$$x \in [0; 4] \Rightarrow y \in [0; 4]$$

$$2\sqrt{(x+2)(x-4)} - \sqrt{x+2} - \sqrt{-(x-4)} - x + 4 = 49 - 4(x+2)(x-4)$$

$$28\sqrt{-(x+2)(x-4)} = 40 - 4(x+2)(x-4) = -4x^2 + 40 + 156 + 20x = -4x^2 + 20x + 196$$

$$13\sqrt{-(x+2)(x-4)} = -2x^2 + 10x + 48$$

$$169(-x^2 + 14 + 5x) = 4x^4 + 100x^2 + 48^2(-20x^3 - 96x^2 + 480x) : 2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= a \\ \sqrt{-(x-4)} &= b \\ x+2 &= a^2 \\ -x+4 &= b^2 \\ a+b &= 4 \\ a-b &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 4 \\ 2a+b &= 2 \\ a^2+2a+b &= 0 \quad (a^2+4)^2 + 6 = 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{-(x-4)} + 4 = 2\sqrt{(x+2)(x-4)} ; x \in [0; 4]$$

$$\sqrt{x+2} + 4 = \sqrt{-(x-4)} + 2\sqrt{-(x-4)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x+2} & a &= \sqrt{x+2} \\ b &= \sqrt{-(x-4)} & b &= -\sqrt{-(x-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 4 &= b + 2ab & a + b + 4 &= -2ab \\ a + b + 2ab + 4 &= 0 \end{aligned}$$

уравнение симметрично от $a, b \Rightarrow$
 \Rightarrow если (a, b) - корни, то (b, a) - корни



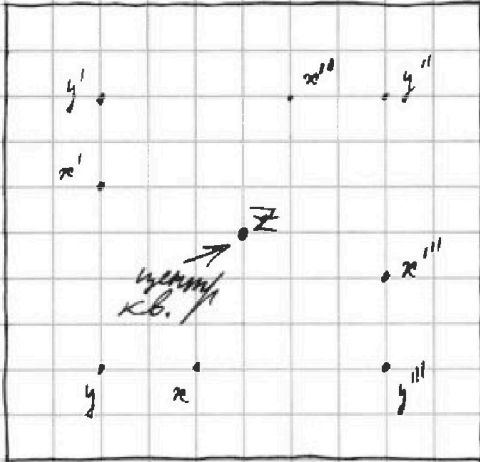
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Так в условиях написано поворотом, а не ~~поворотом~~ сдвигом поворотов или не поворотом и параллельным переносом, то поворот должен осуществляться относительно

центра квадрата, существует 3 таких поворота ~~и~~ ($90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$)

Т.е. для любой точки x кроме ц.кв. есть 3 точки (x', x'', x''') которые перейдут в x после поворота.

Для ~~любой~~ пары точек x, y кроме ц.кв. есть 3 пары точек ($(x'; y'), (x''; y''), (x'''; y''')$) переходящих в пару $(x; y)$ после поворота

~~Возможна~~ пара точек (x, z) z - ц.кв., тогда при любом повороте от ~~ц.кв.~~ $z \rightarrow z \Rightarrow$ существует ~~и~~ 3 ~~пары~~ пары точек $(x'; z), (x''; z), (x'''; z)$ переходящих в $(x; z)$ после поворота



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

кол-во узлов сети в. или на гр. кв. $11 \cdot 11 = 121$

кол-во различных пар узлов (по квадрату) $= \frac{121 \cdot 120}{2}$

кол-во различных маршрутов (с поворотом) $\frac{121 \cdot 120}{2 \cdot 4} =$

$= 121 \cdot 15 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 15 \\ \hline 605 \\ 121 \\ \hline 1815 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1815 \overline{)15} \\ 15 \overline{)121} \\ \hline 31 \\ 30 \\ \hline 15 \\ 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 1815$

Ответ: 1815



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

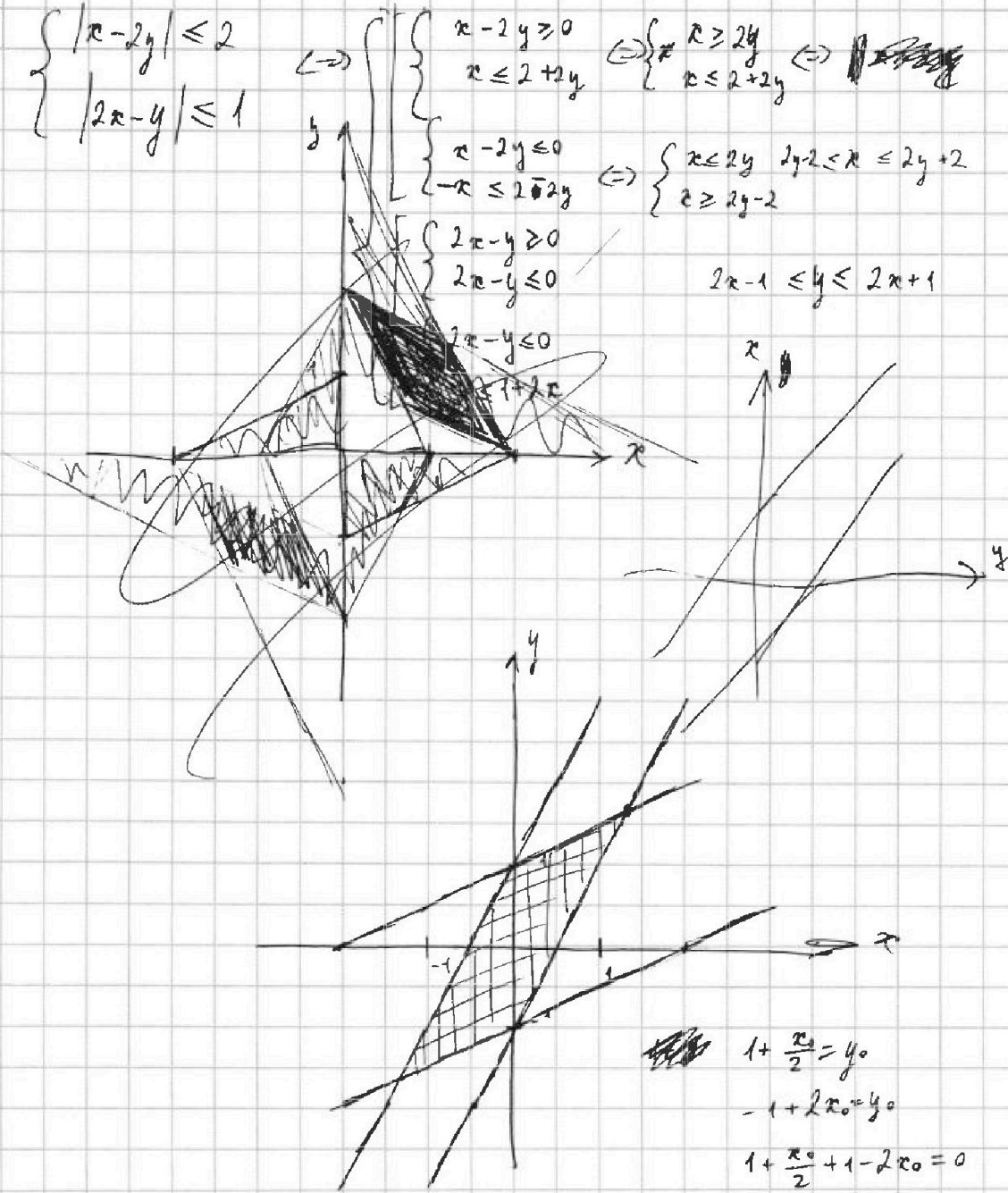
$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x \leq 2+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y \\ x \leq 2+2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 0 \\ -x \leq 2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ x \geq 2y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases}$$

$$2x-1 \leq y \leq 2x+1$$



$$\begin{aligned} 1 + \frac{x_0}{2} &= y_0 \\ -1 + 2x_0 &= y_0 \\ 1 + \frac{x_0}{2} + 1 - 2x_0 &= 0 \\ 2 &= 1,5x_0 \\ \frac{4}{3} &= x_0 \\ y_0 &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

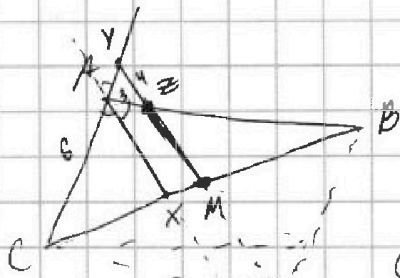


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

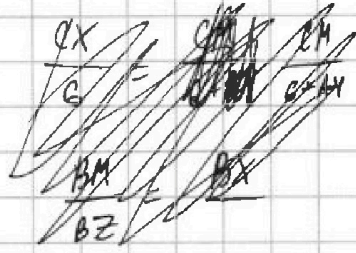
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AX}{G} = \frac{YM}{G+2}$$

$$\frac{ZM}{y} = \frac{AX}{y+3}$$



$$\frac{G}{CM-XM} = \frac{G+AY}{CM}$$

$$\frac{3}{XM} = \frac{BZ}{BM} = \frac{AX+AY}{BM}$$

$$\frac{BZ}{BM} = \frac{BZ+3}{BM+XM}$$

$$\frac{3}{XM} = \frac{AY}{XM} = \frac{G+AY}{CM} = \frac{9}{CM}$$

$$BM = CM$$

$$m \quad (m, k)$$

$$k = 2n$$

$$A = m^2 + 2km + k^2 - 4m - 4k = (m+k)^2 - 4(m+k) = (m+k)(m+k-4)$$

$$B = \frac{m^2 k}{2} + \frac{m k^2}{2} + \frac{9mk}{2} = \frac{km}{2}(m+k+9)$$