



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a_3 = 3x + 3 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = 3x^2 = a_1 + 8d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 3x + 3 & (1) \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 & (2) \\ a_1 + 8d = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) - (1): 6d = 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow a_1 + x^2 - x - 1 = 3x + 3 \Rightarrow a_1 = -x^2 + 4x + 4$$

$$(2): -x^2 + 4x + 4 + 2(x^2 - x - 1) = (x^2 + 2x)^2$$

$$-x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

x	1	1	4	3	-2	-2
-1	1	3	3	0	-2	0

- схема Горнера

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 + 2x^2 - 2) = 0$$

$$m = \frac{b}{2} = 1$$

$$(x+1)(x^2(x+1) + 2(x^2-1)) = 0$$

$$D = 1 + 2 = 3$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ:  $x = -1$ ;  $x = -1 - \sqrt{3}$ ;  $x = -1 + \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$1) |x - 3y| \leq 3$$

$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq x - 3 \\ 3y \leq x + 3 \end{cases}$$

$$y \geq \frac{x-3}{3}$$

$$y \leq \frac{x+3}{3}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 3 & 6 \\ \hline y & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 3 & 6 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$2) |3x - y| \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -1 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

Самые большие значения

$x$  и  $y$  в точке  $A$ ,

которая является пересечением

$$y = 3x - 1 \text{ и } y = \frac{x+3}{3}$$

$$3x - 1 = \frac{x+3}{3}$$

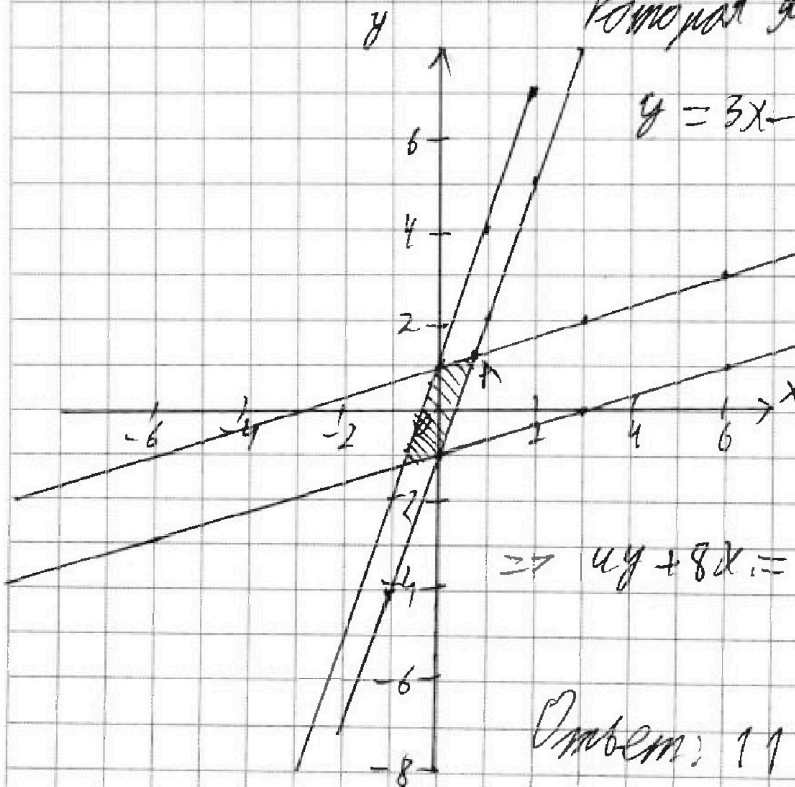
$$9x - 3 = x + 3$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$y = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4y + 8x = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) - 2(3p^2)$$

$$B = mn(m+n-3) = 45q^2$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 45q^2 \end{cases}$$

Пусть  $m+n = x$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 45q^2 \end{cases}$$

$$x(x-9) = 13p^2$$

$$m+n = 13$$

$$1) x=13 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2 \quad \checkmark$$

$$m = 13 - n$$

$$2) x=13p \Rightarrow p = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \emptyset$$

$$2 \cdot n(13-n) = 15q^2$$

$$3) x=13p^2 \Rightarrow p^2 = \frac{10}{13} \quad \emptyset$$

$$4) x=1 \Rightarrow p^2 = -\frac{8}{13} \quad \emptyset$$

$$1) n=1 \Rightarrow 24 = 15q^2 \quad \emptyset$$

Из всех случаев мы получили

$$2) n=3 \Rightarrow m=10$$

$$2 \cdot 10 \cdot 3 = 15q^2$$

$$q=2 \quad \checkmark$$

одну берем при  $x = m+n = 13$

$$3) n=5 \Rightarrow 16 = 3q^2 \quad \emptyset$$

$$10) n=15q^2$$

$$4) n=15 \Rightarrow 2 \cdot (-2) \cdot 15 = 15q^2 \quad \emptyset$$

$$2 \cdot (13 - 15q^2) \cdot 15q^2 = 15q^2$$

$$20 \quad \emptyset$$

$$5) n=9 \Rightarrow 14q = 26 \quad \emptyset$$

$$6) n=q^2 \Rightarrow 2q^2 = 15 \quad \emptyset$$

$$7) n=3q \Rightarrow 26 = 11q \quad \emptyset$$

$$8) n=8q \Rightarrow 13q = 26, q=2 \Rightarrow n=10, m=3$$

$$9) n=18q \Rightarrow 26 - 30q = q, 31q = 26 \quad \emptyset$$

Ответ: (3; 10); (10; 3)



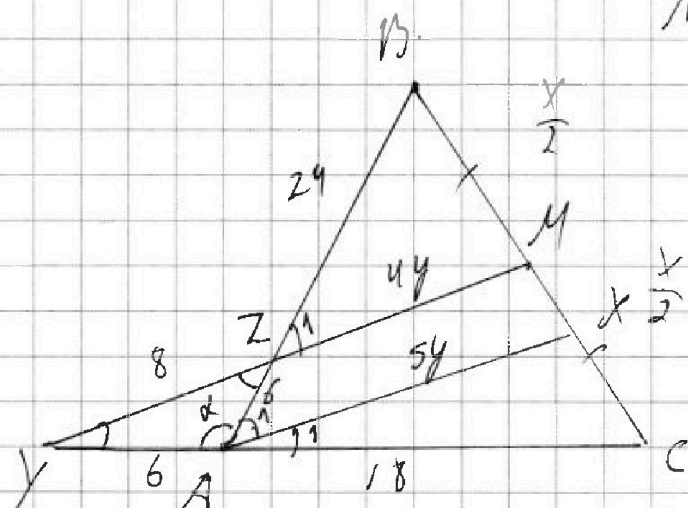
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4



Пусть  $BC = x$

1) т.к.  $AX$  - медиана  $\Rightarrow$

$ZM \parallel AX \Rightarrow \angle MYC =$

$= \angle XAC$  как

соответствующие,

аналогично  $\angle BAX = \angle BZM$

2.2) По т. Менелая и секущей  $MY \Rightarrow$

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$$

$$\Rightarrow BZ = 24$$

2.1) т.к.  $MY \parallel AX \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC$  и  $\angle BAX = \angle BZM$

$\Rightarrow$  так  $\angle YZA = \angle BZM$  как вертикальные  $\Rightarrow$

$\triangle YZA$  - равнобедрен  $\Rightarrow YA = ZA = 6$

3) по т. кос  $\triangle YZA \Rightarrow 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$$\cos \alpha = \frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч

4)  $\triangle YMC \sim \triangle AXC$  по двум углам ( $\angle Y = \angle XAC$ ,  $\angle C$

$$\text{по двум углам}) \Rightarrow \frac{24}{18} = \frac{YM}{AX} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8+ZM}{AX}$$

5)  $\triangle BZM \sim \triangle BAX$  по двум углам ( $\angle B$  - общий,  $\angle BZM =$

$$= \angle BAX \text{ по п.1}) \Rightarrow \frac{BM}{BX} = \frac{ZB}{BX} = \frac{ZM}{AX} \Rightarrow$$

$$\frac{24}{30} = \frac{ZM}{AX} = \frac{4}{5} \Rightarrow AX = \frac{5ZM}{4}$$

подставим в п.4  $\Rightarrow$

$$5ZM = 24 + 3ZM, \quad 2ZM = 24 \Rightarrow ZM = 12, \quad AX = 15$$

6) по т. син  $\triangle AZC$ :  $\frac{6}{\sin \angle 1} = \frac{8}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \angle 1 = \frac{3}{4} \sin \alpha$

$$4 \sin \angle 1 = 3 \sin \alpha$$

$$16 \sin^2 \angle 1 = 9 \sin^2 \alpha$$

$$16(1 - \cos^2 \angle 1) = 9(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$16 - 16 \cos^2 \angle 1 = 9 - 9 \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \angle 1 = \frac{4 + 9 \cdot \frac{1}{81}}{16} = \frac{64}{16 \cdot 9} \Rightarrow \cos \angle 1 = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) по т. кос в ПЗМ:

$$\frac{x^2}{4} = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 24$$

$$x = \sqrt{4(6^2 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 3^2 - 4^2 \cdot 6 \cdot 4)}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 4^2 (36 + 9 - 24)} = 8\sqrt{21}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

~~$$x^4 + 5y^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$~~

~~$$\sqrt{x} x^4 + \sqrt{x} + 5x^2 = y^4 + \sqrt{y} + 5y^2$$~~

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x - y)(x + y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

---

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$$

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5)}{\geq 0} = -1$$

Если мы уменьшаем  $x + y$ ,  $x^2 + y^2$  уменьшается  
квadrатично  $\Rightarrow$  отрицательность в левой части  
мы не получим  $\Rightarrow \emptyset$

подставляем в 1-е уравнение ( $y = x$ )

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = (2\sqrt{(6-x)(x+1)} - 5)^2 \Rightarrow$$

$$4(6-x)(x+1) - 9\sqrt{(6-x)(x+1)} + 13 \geq 0 \quad | : 2$$

$$2(6-x)(x+1) - 9\sqrt{(6-x)(x+1)} + 9 \geq 0$$

$$\sqrt{(6-x)(x+1)} = t$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 9 = 9$$

$$t_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$1) (6-x)(x+1) = 9$$

$$6 + 5x - x^2 = 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}; x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$2) 6 + 5x - x^2 \geq \frac{9}{4} \cdot 4$$

$$24 + 20x - 4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$m = \frac{d}{2} = -10$$

$$D = 100 + 60 \geq 160$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$



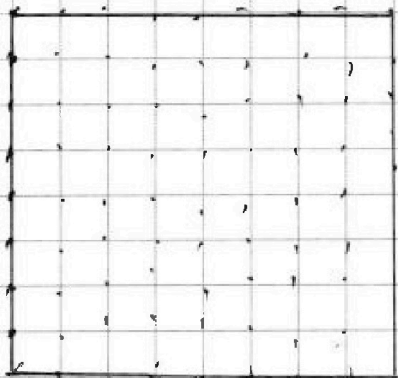
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н б



Всего узлов будет 36

Возьмем один узел кол-во  
способов выбрать другую 35,  
возьмем следующий узел, кол-во

способов выбрать еще узел 49 (т.к с первым

он уже считывался) и т.д.  $\geq 7$

кол-во способов всего - 80!

Ответ: 80!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

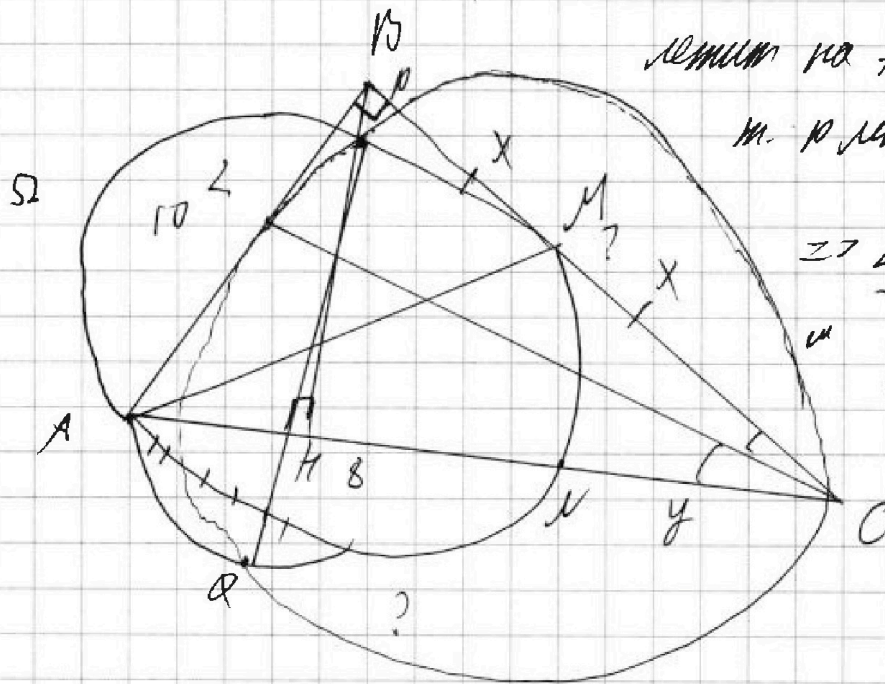
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
9 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.у.

1) хорда перпендикулярна дуге окружности может быть параллельно  $BK$ , только в том случае если она



лежит на этой прямой, т.е.

т.р. лежит в т.р.

$\Rightarrow \triangle ABM \in \Omega$   
- диаметр

$\Rightarrow$

и  $\angle ABM$  отроится на диаметре  $\Rightarrow \angle B = 90^\circ$

2) по т. Пифагора в  $\triangle ABC$ :

$$100 + 4x^2 = (3+y)^2$$

3) т.р. CL - диаметр  $\Rightarrow \frac{3+y}{2} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$\max |4y + 6x| - 7$$

$$1) |x - 3y| \leq 3$$

$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq x - 3 \\ 3y \leq x + 3 \end{cases}$$

x	0	3	6
y	-1	0	1

x	0	3	6
y	1	2	3

$$\begin{cases} y \geq \frac{x-3}{3} \\ y \leq \frac{x+3}{3} \end{cases}$$

$$2) |3x - y| \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	-1	2	5

x	0	1	2
y	1	4	7

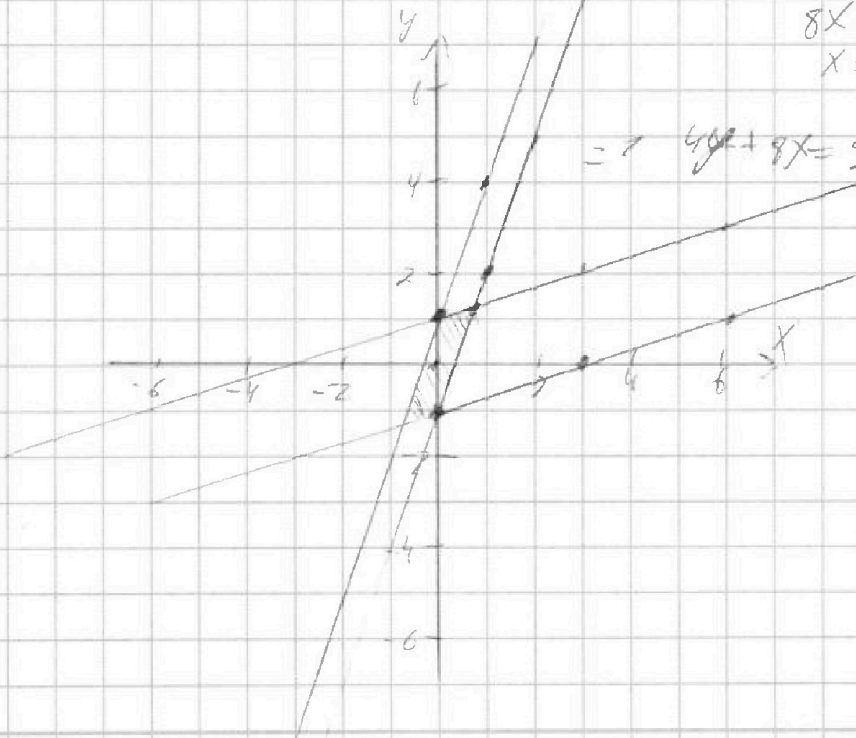
$$3x - 1 = \frac{x-3}{3}$$

$$9x - 3 = x - 3$$

$$8x = 0$$

$$x = \frac{0}{8} \Rightarrow y = \frac{0}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 4y + 6x = 5 + 6 = 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N^1$

$$a_3 = 3x + 3 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = 3x^2 = a_1 + 6d$$

$$a_1 + 2d = 3x + 3 \quad (1)$$

$$a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \quad (2)$$

$$a_1 + 6d = 3x^2 \quad (3)$$

$$(3) - (1): 6d = 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow a_1 + x^2 - x - 1 = 3x + 3$$

$$a_1 = -x^2 + 4x + 4$$

$$(2): -x^2 + 4x + 4 + 2(x^2 - x - 1) = (x^2 + 2x)^2$$

$$-x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

x	1	4	3	-2	-2
-1	1	3	0	-2	0

$$x^3 + 2x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x(x^2 + 2x + x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 + x + 2x^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

x	1	3	0	-2
-2	1	1	0	0
2	1			

$x = -1$

$$x^2(x+1) + 2(x^2-1) = 0$$

$$x^2(x+1) + 2(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3} \quad D = 1 + 2 = 3$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x 3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9n - 9m \quad B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) \quad B = mn(m+n-3) = 45q^2$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) - 13p^2 = 0 \quad | \cdot 13p^2$$

$$B = 84 + 52p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2$$

$$1) \text{ Если } m+n-3 = q \Rightarrow mn = 45q$$

$$(q-6)(q+3) = 13p^2$$

$$\begin{cases} q-6=13 \\ q+3=13 \end{cases} \quad \begin{cases} q-6=13 \\ q+3=p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q=19 \\ p^2=22 \end{cases} \quad \begin{cases} q=10 \\ p^2=4 \end{cases}$$

$$2) \text{ Если } m+n-3 = q^2 \Rightarrow mn = 45$$

$$(q^2+3)(q^2-6) = 13p^2$$

$$\begin{cases} q^2+3=13 \\ q^2-6=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} q^2+3=p^2 \\ q^2-6=p^2 \end{cases}$$

$m+n-3 = q$   
 $q^2 - 9q + 15 = 0$   
 $D = 81 - 60 = 21$   
 $q = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$   
 $m+n = X$

$y(x-9) = 13p^2$   
 $x-9 = 13 \Rightarrow p^2 = 4$   
 $x-9 = 15 \Rightarrow p^2 = 22$   
 $x = 12 \Rightarrow p^2 = 22$   
 $x = 13p^2 \Rightarrow 13p^2 - 9 = p$   
 $12p = 9 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$

$13p^2 - 9 = 1$   
 $p^2 = \frac{10}{13}$   
 $x = 1$   
 $13p^2 = -9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + m + n = 13 \quad m = 13 - n$$

$$2mn = 15q^2$$

$$(2) \quad n = 3, m = 10$$

$$(3) \quad n = 5$$

$$2(13-n)/n = 15q^2$$

$$2 \cdot 10 \cdot 3 = 15q^2$$

$$2 \cdot 5 \cdot 8 = 15q^2$$

$$(4) \quad n = 1 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 5 \cdot 8 = 15q^2$$

$$16 = 3q^2$$

$$2u = 15q^2$$

$$q = 2 \quad \checkmark$$

$$\emptyset$$

$$(9) \quad n = 15$$

$$(5) \quad n = 9$$

$$(6) \quad n = q^2$$

$$2 \cdot (-2) \cdot 15 = 15q^2$$

$$2(13-9)q = 15q^2$$

$$2(13-q^2)/q^2 = 15q^2$$

$$\emptyset$$

$$26 - 2q = 15q$$

$$26 - 2q^2 = 15$$

$$14q = 26$$

$$2q^2 = 11$$

$$\emptyset$$

$$\emptyset$$

$$(7) \quad n = 3q$$

$$(8) \quad n = 5q$$

$$(1) \quad n = 15q$$

$$2(13-3q) \cdot 3q = 15q^2$$

$$26 - 10q = 3q$$

$$2(13-15q) \cdot 15q = 15q^2$$

$$2(13-3q) = 5q$$

$$13q = 26$$

$$26 - 30q = q$$

$$26 = 11q$$

$$q = 2 \Rightarrow$$

$$26 - 30q = q$$

$$\emptyset$$

$$n = 10, m = 3$$

$$31q = 26 \quad \emptyset$$

$$(10) \quad n = 15q^2$$

$$2 \cdot (13 - 15q^2) \cdot 15q^2 =$$

$$\emptyset$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)  $\triangle KZM \sim \triangle KAX$  по двум углам ( $\angle K$ -общий,

$\angle KZM = \angle KAX$  (цз п.1))  $\Rightarrow$

$$\frac{KM}{KX} = \frac{ZK}{KX}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}x} = \frac{24}{30}$$

$$\sqrt{3}x = \frac{30x}{2 \cdot 24} = \frac{15x}{24} = \frac{5x}{8}$$

$$\frac{30 \cdot 8}{5x} = \frac{14}{x}$$

$$\frac{6 \cdot 8}{x} = \frac{14}{x}$$

$$\cos(\angle X + \angle Z) = 1$$

$$\cos \angle X \cos \angle Z - \sin \angle X \sin \angle Z = 1$$

$$\frac{\cos \angle X}{1} - \frac{\sqrt{3} \sin \angle X}{9} = 1$$

$$\cos \angle X - \frac{\sqrt{3} \sin \angle X}{9} = 9$$

$$\cos \angle X = \frac{\sqrt{3} \sin \angle X}{9} + 9$$

$$\cos^2 \angle X = 80 \sin^2 \angle X + 18 \sqrt{3} \sin \angle X + 81$$

$$1 - \sin^2 \angle X = 80 \sin^2 \angle X + 18 \sqrt{3} \sin \angle X + 81$$

$$81 \sin^2 \angle X + 18 \sqrt{3} \sin \angle X + 80 = 0$$



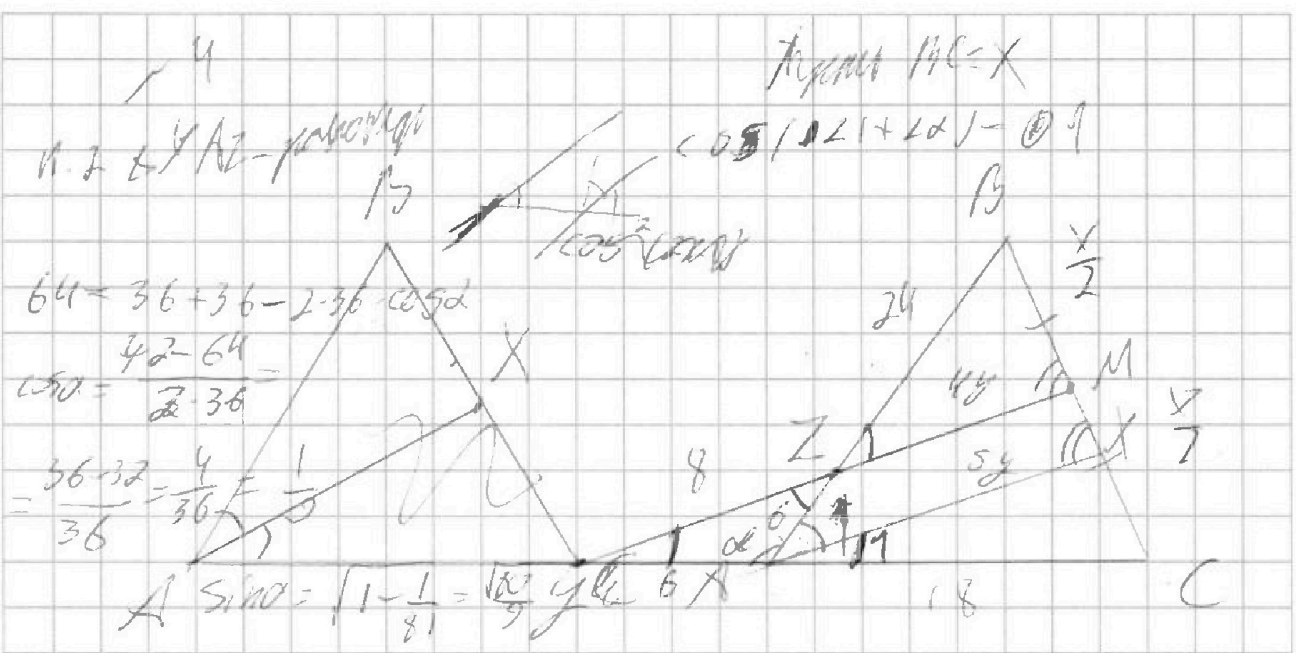


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



н.к.  $AX \perp BC$  — диаметр окружности  $\Rightarrow \angle XAC = 90^\circ$  и  $ZM \parallel AX \Rightarrow \angle MZC = \angle XAC$  или соответственные углы  
 или  $\angle BAX = \angle BZM$  или соответственные углы

н.к.  $\angle YMC \sim \angle AXC$  по двум углам ( $\angle C$  и  $\angle C$  — общий)

$$\frac{YZ}{XC} = \frac{YC}{AC} = \frac{YM}{AX} \quad \frac{ZXC}{X} = \frac{24}{18} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{XC}{\frac{X}{2}} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \quad \text{или} \quad YC = \frac{4X}{6} = \frac{2X}{3}$$

$$\frac{18 \cdot 3}{2X} = \frac{6 + 24}{2X}$$

н.к.  $AX \perp BC$  — диаметр окружности  $\Rightarrow \angle XAC = 90^\circ$  и  $ZM \parallel AX \Rightarrow \angle MZC = \angle XAC$

$$\frac{18 \cdot 3}{2X} = \frac{6 + 24}{2X} \Rightarrow \frac{54}{2X} = \frac{30}{2X} \Rightarrow 54 = 30$$

н.к.  $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$

$$1 \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1 \Rightarrow BZ = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

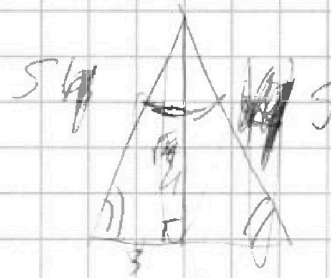
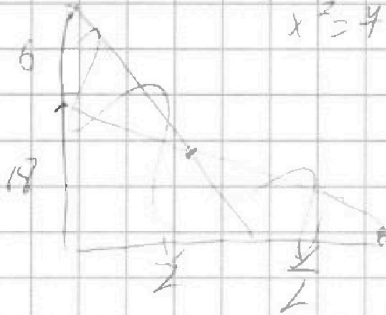
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{20430}{18} = \frac{BX}{XC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

М и МРМ

$$16 = 9 + x^2 \\ x^2 = 4$$

$$\sqrt{16+18-2 \cdot 36} = \frac{36}{9} \\ \frac{36}{9} \\ -45 \\ \frac{24}{21}$$



$$y = \sqrt{4(6^2 - 4^2 + 4^2 \cdot 3^2 - 4^2 \cdot 6 \cdot 4)} = 8\sqrt{21}$$

в УМС  $\triangle AXC$  по формуле косинусов  $\Rightarrow$

$$\frac{24}{XC} = \frac{4}{AX} \Leftrightarrow \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{8+2M}{AY}$$

$$\frac{24}{18} = \frac{2M}{AX} \Rightarrow \frac{24}{30} = \frac{2M}{AX} = \frac{4}{5}$$

$$4 \cdot 54 = 24 + 12y \quad \frac{y^2}{4} = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5} \\ 204 = 24 + 12y \quad = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 24$$

$$8y = 24 \quad 2M = 12 \\ y = 3 \Rightarrow AX = 15$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin \beta} \\ \frac{6}{\sin \alpha} = \frac{3}{4} \sin \beta \\ 4 \sin \alpha = 3 \sin \beta \\ 16 \sin^2 \alpha = 9 \sin^2 \beta \\ 16(1 - \cos^2 \alpha) = 9(1 - \cos^2 \beta) \\ 16 - 16 \cos^2 \alpha = 9 - 9 \cos^2 \beta \\ \cos^2 \alpha = \frac{4 + 9 \cos^2 \beta}{81} \\ \frac{4}{9} = \frac{64}{81} = \frac{16}{81} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \\ \cos \alpha = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \geq 5$

$\geq 0$   $0 \leq y \leq \sqrt{6}$

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$-y^2 + 5x + 6 = 0$$

$$y^2 - 5x - 6 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 5 \quad y_1 = 6$$

$$y_1 - y_2 = -6 \quad y_2 = -1$$

$$(y-6)(y+1) = (6-y)(y+1)$$

$$\frac{y^2-6}{y+1} = \frac{y^2-6}{y+1} \quad y \geq -1$$

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{6-y})^2 =$$

$$= x+1+6-y + 2\sqrt{(x+1)(6-y)}$$

$$y \geq 0$$

$$\textcircled{1} \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$2) x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + \sqrt{x} + 5x^2 = y^4 + \sqrt{y} + 5y^2$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x-y)(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x-y)(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = -1$$

$$\geq 0 > 0$$

или  $\sqrt{x} \sqrt{y}$  уменьшаются,  $x^2 + y^2$  увеличивается квадратично  
 $\Rightarrow$  отрицательность левой части по модулю  $\Rightarrow \emptyset$

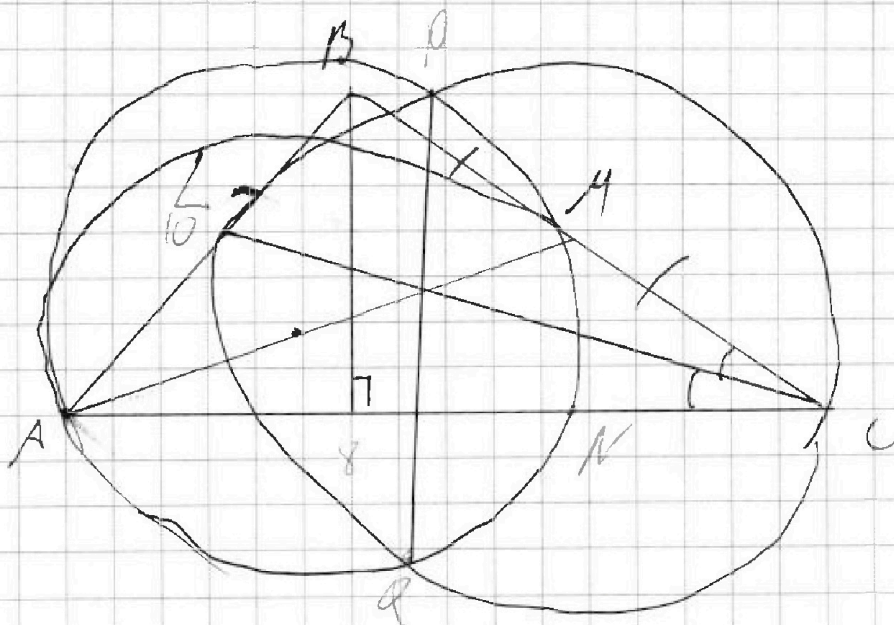
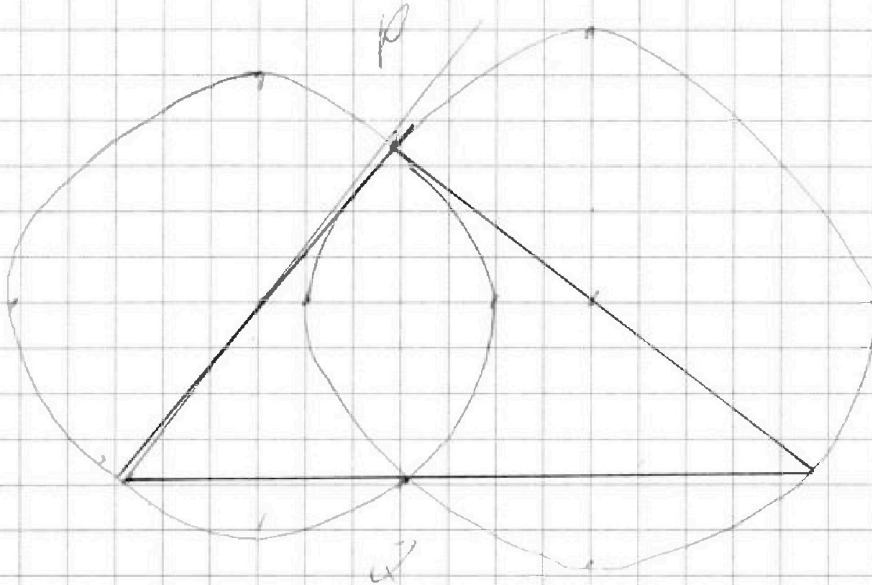


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



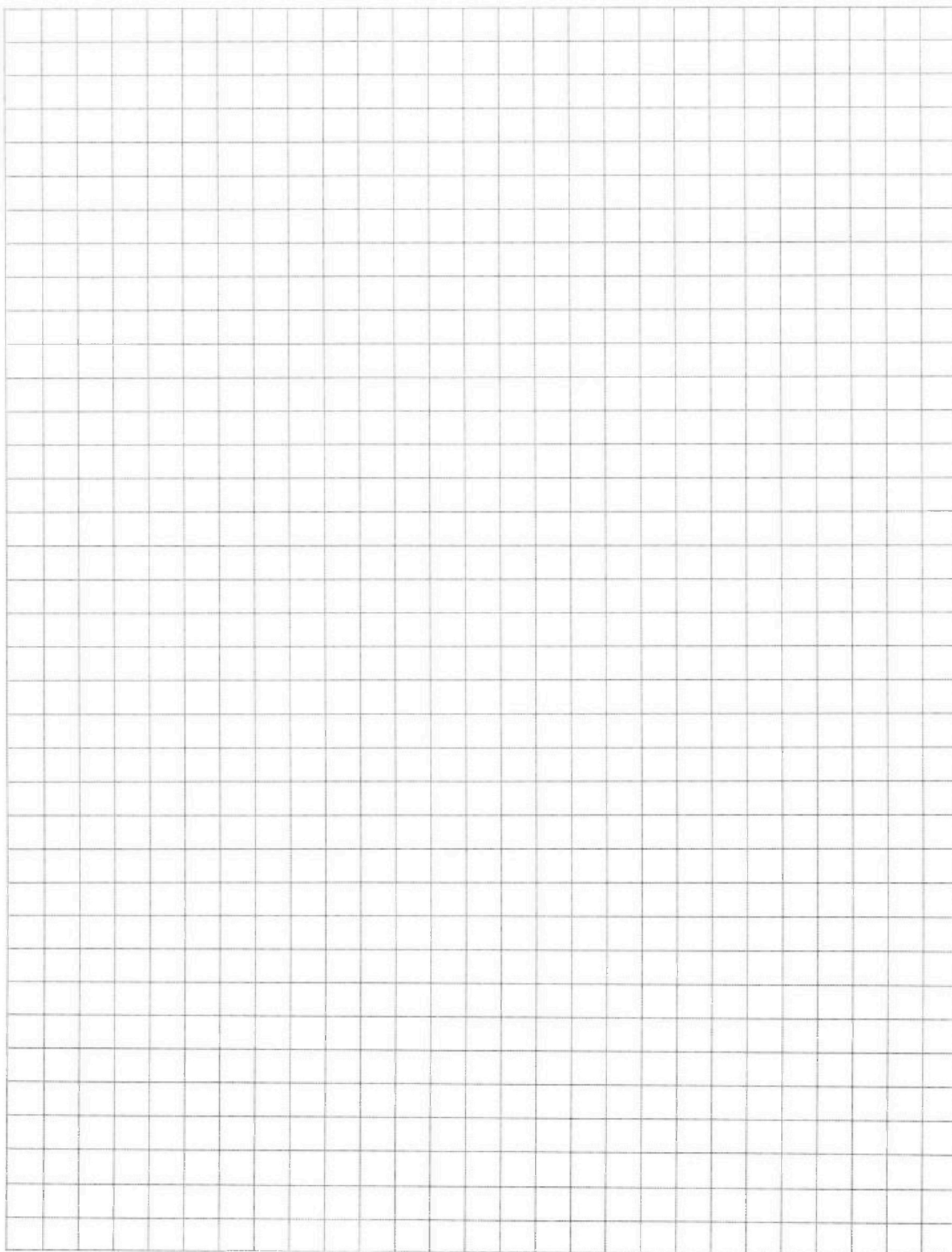


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

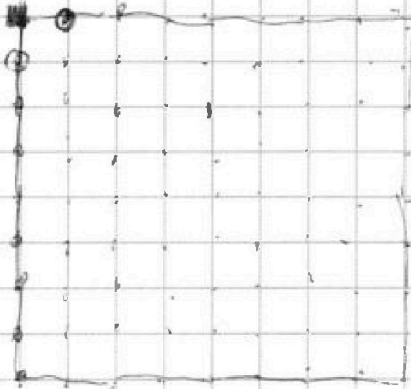
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

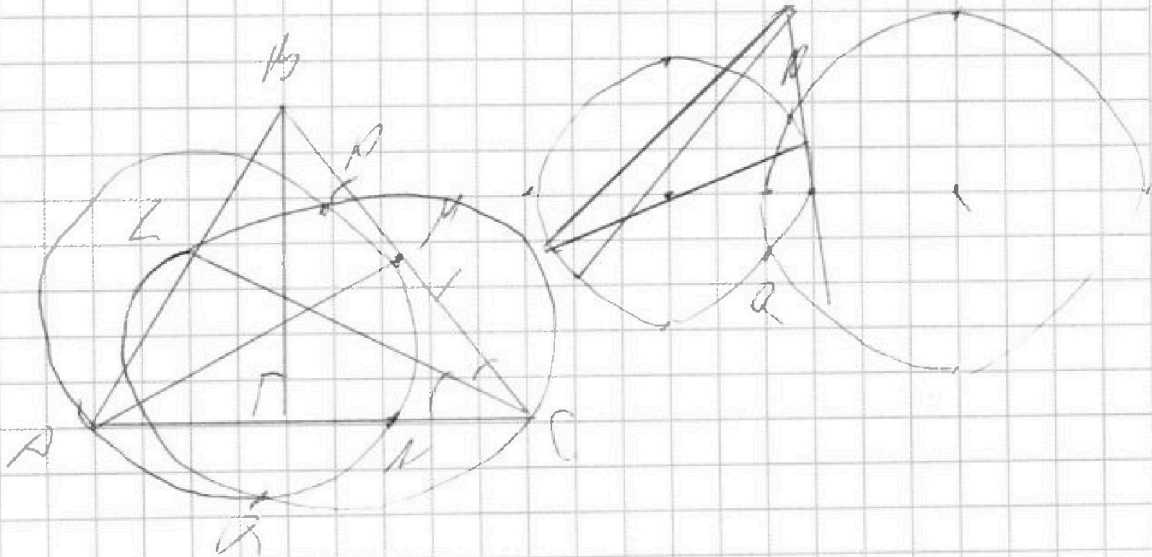
~~черновик~~  $9 \cdot 9 = 81$



Возьмем один узел как начало выбора дуги 80, возьмем следующий узел, кол-во ср. выборов для узла

49 (т.к. с началом от узла направлена и п.д. этого количества 80! см)

№ 4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

$$x=y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$6+5x-x^2 = (x-6)(x+1) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - \sqrt{6-x} = -5 \quad | \cdot 25 \quad \times \begin{matrix} 35 \\ 35 \end{matrix}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

$$x+1+6-x-2\sqrt{6+5x-x^2} = 4(6-x)(x+1) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25$$

$$4(6-x)(x+1) - 18\sqrt{6+5x-x^2} + 18 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2(6-x)(x+1) - 9\sqrt{6+5x-x^2} + 9 = 0$$

$$\sqrt{6-x)(x+1)} = t$$

$$9(6-x)(x+1) = 9$$

$$t^2 - 9 + 9 = 0$$

$$6+5x-x^2 = 9$$

$$D = 81 - 42 = 39$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{39}}{2}$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$6+5x-x^2 = \frac{9}{4}$$

$$24+20x-4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 100 + 60 = 160$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$