



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $a_5 = 6x + 18$
 четвёртый член $a_7 = (x^2 - 4x)^2$
 седьмой член $a_{11} = (-3x^2)$
 числитель $x = ?$

Пусть d - разность арифм. прогрессии, a_1 - её первый член

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_7 = a_1 + 6d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_7 - a_5 = 2d \\ a_{11} - a_7 = 4d \end{cases}$$

$$2(a_7 - a_5) = a_{11} - a_7$$

$$2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -8 & 17 & -4 & -12 & \\ \hline 2 & 1 & -6 & 5 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow x = 2 - \text{корень}$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -6 & 5 & 6 & & \\ \hline 2 & 1 & -4 & -3 & 0 & \end{array} \Rightarrow x = 2 - \text{корень}$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$\downarrow$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

1. Если $x = 2 \Rightarrow a_5 = 30, a_7 = 16, a_{11} = -12, d = -4$

2. Если $x = 2 + \sqrt{7} \Rightarrow a_5 = 6\sqrt{7} + 30$
 $a_7 = 9$
 $a_{11} = -33 - 12\sqrt{7}$
 $d = -3\sqrt{7} - 10,5$

3. Если $x = 2 - \sqrt{7} \Rightarrow a_5 = 30 - 6\sqrt{7}$
 $a_7 = 9$
 $a_{11} = -33 + 12\sqrt{7}$
 $d = 3\sqrt{7} - 10,5$

Ответ: $\{2; 2 \pm \sqrt{7}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 (проверка):
проверка:

$$x = -\frac{48}{7}, y = -\frac{50}{7} \Rightarrow 4x - 3y = 4 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) = \frac{-192}{7} + \frac{150}{7} =$$

$= -6$

$$4x - 3y = -\frac{48 \cdot 3}{7} + \frac{200}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$|-6| \leq 6$ - верно
 $18 \leq 8$ - верно

Ответ: -146.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad 14x + 7y - \min - ?$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - 7y \leq 14 \\ -2 \leq x - y \leq 2 \end{cases} \quad y - 2 \leq x \leq y + 2$$

в граничных случаях первая функция $14x + 7y$ может достигаться

$x = y + 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} |4(y+2) - 3y| \leq 6 \\ |3(y+2) - 4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq y + 8 \leq 6 \\ -8 \leq -y + 6 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14 \leq y \leq -2 \\ 14 \geq y \geq -2 \end{cases}$$

Наим. y ур-н системы - $y = -2 \Rightarrow x = 0$

Тогда $14x + 7y = -14$.

Проверка: $\begin{cases} |0 + 6| \leq 6 \text{ - верно} \\ |8| \leq 8 \text{ - верно} \end{cases}$

2. $x = y - 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -6 \leq 4y - 8 - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3y - 6 - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq y - 8 \leq 6 \\ -8 \leq -y - 6 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 14 \\ 2 \geq y \geq -14 \end{cases}$$

Наим. y ур-н системы - $y = 2 \Rightarrow x = 0$
Тогда $14x + 7y = 14$.

\Rightarrow наим. значение: $\boxed{-14}$ - ответ

~~Ответ: 14~~

Наим. значение выражения будет достигаться при наим. возможном значении $4x - 3y$ (2.6) и т.д. $14x + 7y$ должно быть минимальным, т.к. $14x + 7y$ можно выразить через $4x - 3y$ и $3x - 4y$. Наибольший вклад для min вносит x (коэф. 14) и в $4x - 3y$ коэф. при x больше, чем в $3x - 4y$.

$4x - 3y = -6 \Rightarrow x = \frac{3y - 6}{4}$

$$\begin{cases} \frac{3y - 6}{4} - 3y \leq 6 \\ -32 \leq -7y - 18 \leq 32 \\ -14 \leq -7y \leq 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -y \leq 14 \\ 2 \geq y \geq -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3y - 6}{4} - 4y \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 14 \\ 2 \geq y \geq -14 \end{cases}$$

$2 \geq y \geq -\frac{50}{7} = -7\frac{1}{7}$

$y = -\frac{50}{7} \Rightarrow x = -\frac{48}{7}$

$14x + 7y = 14(-\frac{48}{7}) + 7(-\frac{50}{7}) = -146$ - ответ

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \quad 13p^2$$

$$B = m^2 n - mn^2 + 3mn \quad 3q^2$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$B = mn(m-n) + 3mn = mn(m-n+3) = 3q^2$$

Ⓘ $m-n = x$
 $mn = y$

$$A = x^2 + 9x = 13p^2$$

$$B = xy + 3y = 3q^2 \Rightarrow xy = 3(q^2 - y) \Rightarrow$$

$$x : 3 \text{ или } y : 3$$

Если $x : 3 \Rightarrow x^2 : 9 \Rightarrow x^2 + 9x : 9 \Rightarrow p^2 : 9 \Rightarrow p^2 = 9t$

$9m = 3q^2$
 $x = 3m$
 $x \cdot 3m + 9m = 3q^2$
 $3m^2 + 3m = q^2$
 $m^2 + m = \frac{q^2}{3}$

$$\Rightarrow x^2 + 9x = 13 \cdot 9$$

$$x^2 + 9x - 117 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 117 = 549$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{549}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Если $y : 3 \Rightarrow$

$$3y : 9, xy : 3 \Rightarrow (x+3)y : 3$$

Пусть $y = 3m \Rightarrow 3mx + 9m = 3q^2$

$$mx + 3m = q^2 \Rightarrow q^2 : m, q \text{ — простое}$$

$$\Rightarrow q : m$$

$$\Rightarrow y = 3q$$

$$\Rightarrow q = m$$

тогда $x \cdot 3q + 3 \cdot 3q = 3q^2 \quad | : 3q$

$$3x + 9 = 3q$$

$$x + 3 = q \Rightarrow x = q - 3$$

$$\Rightarrow (q-3)3q + 9q = 3q^2$$

$$\Rightarrow m-n = q-3$$

$$mn = 3q$$

$$\Rightarrow m = n + q - 3$$

$$x = x + 3$$

$$3x + 9 = y$$

$$3(m-n) + 9 = mn$$

$$m-n=0$$

$$mn=9$$

$$x = q - 3 :$$

$$(q-3)^2 + 9(q-3) = 13p^2$$

$$q^2 - 6q + 9 + 9q - 27 = 13p^2$$

$$q^2 + 3q - 18 = 13p^2$$

$$(q-3)(q+6) = 13p^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} q-3=13 \\ q+6=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=16 \text{ - не простое} \\ q=7 \Rightarrow p=2 \end{cases}$$

$$\text{если } q=7, p=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+8x=52 \quad (1) \\ xy+3y=147 \end{cases}$$

1) Решим (1):

$$x^2+8x-52=0$$

$$D=81+4 \cdot 52=289$$

$$x = \frac{-8 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-13 \\ x=4 \end{cases}$$

$$x=-13 \Rightarrow -13y+3y=147$$

$$-10y=147$$

$$y=-14,7 \notin \mathbb{N}$$

$$x=4 \Rightarrow 4y=147$$

$$y=21$$

$$\text{Итого } \begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=n+4 \\ (n+4)n=21 \end{cases}$$

$$n^2+4n-21=0$$

$$\begin{cases} n=-7 \notin \mathbb{N} \\ n=3 \Rightarrow m=7 \end{cases}$$

при этом $p=2, q=7$ - простое

$$\textcircled{II} \quad A = x^2+8x = 3q^2 \quad (2)$$

$$B = xy+3y = 13p^2$$

$$\text{из (2): } x^2 = 3q^2 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 : 3 \Rightarrow x : 3$$

$$\text{Пусть } x=3r \Rightarrow$$

$$3r \cdot y + 3y = 13p^2 \Rightarrow 13p^2 : 3 \text{ - не простое}$$

$$\Rightarrow p^2 : 3 \text{ , } p \text{ - простое}$$

$$\Rightarrow p=3$$

$$\Rightarrow xy+3y=117$$

$$x=3r \Rightarrow 9r^2+8x=3q^2 \quad | :3$$

$$3r^2+3x=q^2 \Rightarrow q^2 : 3 \Rightarrow q=3$$

$$\Rightarrow x^2+8x=27$$

$$x^2+8x-27=0$$

$$D=81+4 \cdot 27=189$$

\Rightarrow нет целых корней

\Rightarrow не удовл. условию

Ответ: $m=7, n=3$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4. Упростим)

5) по св-ву син-кос: $\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{4X}{2X} = 2$

$\Rightarrow AB = \frac{AC}{2} = 6$

6) по т. косинусов ($\sphericalangle ACB$):

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \sphericalangle ACB$$

$$CB^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$CB^2 = 180 + 16$$

$$CB^2 = 196$$

$$\boxed{CB = 14}$$

Ответ: 14

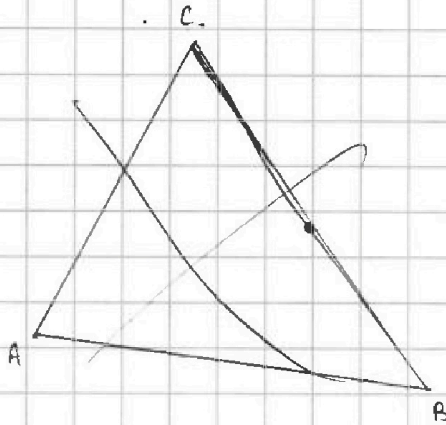


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

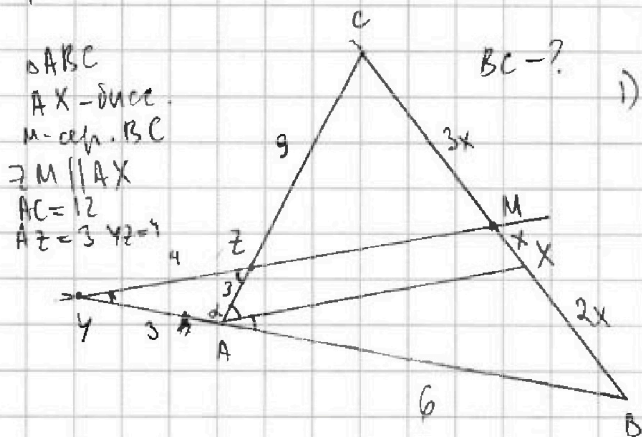
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4.



$\triangle ABC$
 $AX - \text{выс.}$
 $M - \text{ср. } BC$
 $ZM \parallel AX$
 $AC = 12$
 $AZ = 3 \quad ZC = 3$

$BC = ?$

1) т.к. $ZM \parallel AX$ (по усл.) $\Rightarrow \angle YZA = \angle ZAX$
 $\angle ZYA = \angle XAB = \angle CAK$
 т.к. $AX - \text{выс.}$

\Rightarrow т.к. $\angle ZYA = \angle AZY \Rightarrow \triangle YZA - \text{н/б}$
 $\Rightarrow YA = ZA = 3$

2) Рассм. $\triangle YZA$: $\angle YZA = \angle YAZ = \alpha$

$$YZ^2 = YA^2 + ZA^2 - 2 \cdot YA \cdot ZA \cdot \cos \alpha$$

$$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$18 - 18 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{9} \quad \text{т.к. } \alpha \in (0, \pi/2)$$

3) $\Rightarrow \cos \angle CAB = -\frac{1}{9}$ (т.к. смежные)

~~по т. син~~ $\Rightarrow \sin^2 \angle CAB = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{80}}{9}$

по т. синусов ($\triangle ABC$):

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{BC}{\frac{\sqrt{80}}{9}} = \frac{12}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{9BC}{\sqrt{80}} = \frac{12}{\sin \angle ABC}$$

4) $ZM \parallel AX \Rightarrow \triangle CZM \sim \triangle CAX$ по двум углам и стороне CZ \Rightarrow

$$\frac{ZC}{AC} = \frac{CM}{CX} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } \angle C \text{ общий}$$

т.к. $CM = MB$ (M - ср. BC) $\Rightarrow XB = 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$t = 1 \Rightarrow 30 - x - x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 29 = 117$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

Отрашимме:
 $x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$
 $5 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 5$
 $x \geq 0$
 $y \leq 5$

\Rightarrow отриц. корни уходят

$$t = 3,5 \Rightarrow 30 - x - x^2 = 3,5$$

$$x^2 + x - 26,5 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 53 = 0$$

$$D = 4 + 8 \cdot 53 = 428$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{107}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{107}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{107}}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right);$
 ~~$\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right);$~~
 ~~$\left(\frac{-1 + \sqrt{107}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{107}}{2} \right);$~~
 ~~$\left(\frac{-1 - \sqrt{107}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{107}}{2} \right);$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y & (2) \end{cases}$$

Заметим, что при перестановке x и y в ур. (2) уравнение не ~~то~~ меняется ($x \rightarrow y, y \rightarrow x$) оно симметрично относительно перестановки x и $y \Rightarrow x=y$ — в.р.реш.

Можно (прямом. (2):

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

Заметим: $a = \sqrt{x+6}$

$$b = \sqrt{5-x}$$

$$\Rightarrow a - b + 5 = 2ab$$

$$a + 5 - 2b = 2ab - a$$

$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)} + \sqrt{5-x} \quad |^2$$

$$x+6+25+10\sqrt{x+6} = 4(5-x)(x+6) + (5-x) + 4\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

$$x+31+10\sqrt{x+6} = -4x^2-5x+125+4\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

$$10\sqrt{x+6} - 4\sqrt{(5-x)(x+6)} = -4x^2-6x+94$$

Если $5-x \geq 0$ ($x \leq 5$)

$$\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{10+20x} = -2(2x^2+3x-47)$$

$$(2x-5)\sqrt{x+6} = -(2x^2+3x-47)$$

$$4x^4 + 16x^3 - 175x^2 - 377x - 2059 = 0$$

$$\sqrt{x+6} + 5 - \sqrt{x+6} - 2\sqrt{30-x-x^2} = (2\sqrt{30-x-x^2} - 5)^2$$

$$11 - 2\sqrt{30-x-x^2} = 4(30-x-x^2) + 25 - 20\sqrt{30-x-x^2}$$

$$18\sqrt{30-x-x^2} = 134 - 4x - 4x^2$$

$$18t = 4t^2 + 14$$

$$4t^2 - 18t + 14 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 3,5 \end{cases} \text{ (по т. Виета)}$$

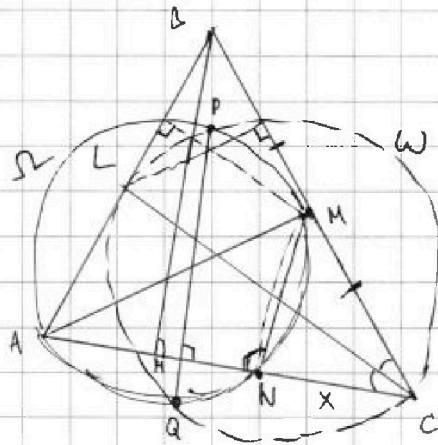


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 26$$

$$AN = 20$$

BN - высота $\triangle ABC$

1) $\angle ANM = 90^\circ$ как угол и
высоты и диаметр

$\Rightarrow PQ \parallel MN \parallel BN$

По д-ву касат. и секущ.:

$$CM^2 = CN \cdot CA = (AC - 20) \cdot AC$$

Зная MC, можно найти BC
т.к. $CM = \frac{1}{2} BC$

$$2) \triangle BNC \sim \triangle MNC \Rightarrow \frac{1}{4} BC^2 = AC^2 - 20AC$$

(по лемме о хордах д. дуги.)

$$\Rightarrow \frac{1}{4} BC^2 = NC \Rightarrow BC^2 = 4NC$$

Пусть $NC = x \Rightarrow AN = 20 - x$
 $AC = 20 + x$

~~т.к. $BC = 2MC$~~

$$\triangle MNC: \cos \angle MCN = \frac{NC}{MC} = \frac{2NC}{BC}$$

$$\triangle BNC: \cos \angle MCN = \frac{NC}{BC}$$

$$\text{т.к. кос. } (\triangle ABC): AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \angle MCN$$

$$676 = 4(AC^2 - 20AC) + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \frac{2NC}{BC}$$

$$676 = 5AC^2 - 80AC - 4 \cdot AC \cdot NC$$

$$676 = 5(20+x)^2 - 80(20+x) - 4(20+x)x$$

$$(20+x)(100+5x-80-4x) = 676$$

$$(20+x)(20+x) = 676$$

$$(20+x)^2 = 676$$

$$\Rightarrow AC = 26 \quad \text{ответ}$$

$$x = 6$$

$$\Rightarrow \frac{BC^2}{4} = 26^2 - 20 \cdot 26 \Rightarrow BC^2 = 624 \quad \text{ответ}$$

($BC = 4\sqrt{39}$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $AC = 26$; $BC = 4\sqrt{39}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 3y \leq 4x \leq 6 + 3y \\ -8 + 4y \leq 3x \leq 8 + 4y \end{cases}$$

$$14x + 7y = ? \quad A = 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2$$

$$B = 21 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \quad xy + 3y = 3 \cdot 49$$

$$x = y = 0 \Rightarrow 0$$

$$x^2 + 9x - 52 = 0$$

$$x = y - 2$$

$$14(y - 2) + 7y = 21y - 28$$

$$14y - 8 - 3y \leq 6 \quad | y - 8 \leq 6$$

$$| 3y - 6 - 4y \leq 8 \quad | -y - 6 \leq 8$$

$$-48 + 42 = -6 \quad | -36 + 56$$

$$-6 \leq y - 8 \leq 6$$

$$-8 \leq -y - 6 \leq 8$$

$$2 \leq y \leq 14$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$4 \cdot 13 = 13p^2$$

$$2 \leq y \leq 14$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$14x + 7y = -14 \cdot 8 - 7 \cdot 12 = -112 - 84 = -196$$

$$18 \cos k = 2$$

$$-32 + 24 \quad 18 - 18$$

$$-8 - 3x \leq -4y \leq 8 - 3x$$

$$\frac{-8 - 3x}{-4} \geq y \geq \frac{8 - 3x}{-4}$$

$$2 + \frac{3}{4}x \geq y \geq -2 + \frac{3}{4}x$$

$$y = \frac{3x - 8}{4}$$

$$14x - (14x - 6) \leq 6 \quad -6 \leq 6 \text{ верно}$$

$$13x - 4 \left(\frac{14x - 6}{3} \right) \leq 8$$

$$9x - 16x + 24 - 7x + 24 \leq 8$$

$$-8 \leq \frac{-7x + 24}{3}$$

$$\frac{-7x + 24}{3} = -2$$

$$-7x + 24 = -24$$

$$-7x = -48 \quad x = \frac{48}{7} = 6 \frac{6}{7}$$

$$x = \frac{48}{7} - 14 = \frac{16}{7} \leq 6$$

$$16 \leq 8$$

$$14x + 7y = -14$$

$$-2 \leq -y \leq 14 \quad -7 \frac{1}{7} \geq y \geq -14$$

$$2 \geq y \geq -14$$

$$-8 \leq \frac{-4 - 6}{4} \leq 8$$

$$x = -6$$

$$y = -6$$

$$-24 + 18 = -6$$

$$-18 + 24 = 6$$

$$-2 \leq -y \leq 14$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_5 = 6x + 18$
 $a_7 = (x^2 - 4x)^2$
 $a_{11} = (-3x^2)$
 $x = ?$ d

$a_5 = a_1 + 4d$
 $a_7 = a_1 + 6d$
 $a_{11} = a_1 + 10d$

$\Rightarrow \begin{cases} a_7 - a_5 = 2d \\ a_{11} - a_7 = 4d \end{cases}$
 $2(a_7 - a_5) = a_{11} - a_7$
 $2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$
 $3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$
 $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$
 $16 - 8 \cdot 8 + 17 \cdot 4 - 4 \cdot 8 - 12 = 0$
 $1 \quad | \quad -8 \quad | \quad 17 \quad -4 \quad -12$
 $2 \quad | \quad -6 \quad | \quad 5 \quad 6 \quad 0$
 $(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$
 $1 \quad | \quad -6 \quad | \quad 5 \quad 6$
 $2 \quad | \quad -4 \quad | \quad -3 \quad 0$
 $(x-2)(x^2 - 4x - 3) = 0$

$x = 2: a_5 = 30$
 $a_7 = 16$
 $a_{11} = -12$
 $\Rightarrow d = -7$

$x = 2 + \sqrt{7}: a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 6\sqrt{7} + 30$
 $a_7 = ((2 + \sqrt{7})^2 - 4(2 + \sqrt{7}))^2 = 9$
 $a_{11} = -3(2 + \sqrt{7})^2 = -2(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -3(11 + 4\sqrt{7}) = -33 - 12\sqrt{7}$
 $a_6 = 19,5 + 3\sqrt{7}$
 $a_7 = 9$
 $a_8 = -19,5 - 3\sqrt{7}$
 $a_9 = -12 - 6\sqrt{7}$
 $a_{10} = -22,5 - 9\sqrt{7}$
 $a_{11} = -33 - 12\sqrt{7}$

$x = 2 - \sqrt{7}: a_5 = 6(2 - \sqrt{7}) + 18 = 30 - 6\sqrt{7}$
 $a_7 = ((2 - \sqrt{7})^2 - 4(2 - \sqrt{7}))^2 = 9$
 $a_{11} = -3(2 - \sqrt{7})^2 = -3(11 - 4\sqrt{7}) = -33 + 12\sqrt{7}$
 $a_6 = -3\sqrt{7} + 19,5$
 $a_7 = 9$
 $a_8 = 3\sqrt{7} - 19,5$
 $a_9 = 6\sqrt{7} - 12$
 $a_{10} = 9\sqrt{7} - 22,5$
 $a_{11} = 12\sqrt{7} - 33$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

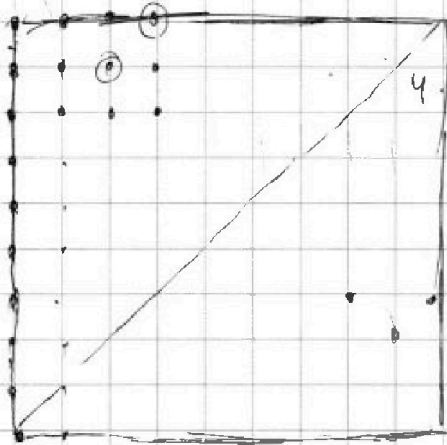
$$\sqrt{x} = a$$

$$\sqrt{y} = b$$

$$x = \frac{-150 - 6}{4} = \frac{-192}{4} = -48$$

$$(5-x)(4x+)$$

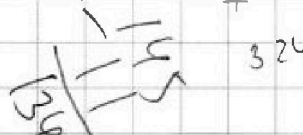
$$-48 \cdot 2 = -96$$



$$4 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right)$$

$$-\frac{192}{7} + \frac{150}{7} = -\frac{42}{7} = -6$$

$$-\frac{48 \cdot 3}{7} + \frac{200}{7} = \frac{86}{7} = 8$$



$$144$$

$$\frac{200}{-144} = \frac{25}{-18}$$

$$260$$

$$x+6+5-x-2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}-5$$

$$27$$

$$162$$

$$27$$

$$432$$

$$324$$

$$107$$

$$0$$

$$424$$

$$428$$

10 · 10 мотек (100 мотек)

$$C_2^{100}$$

$$10 - 4(x-5)$$

$$(-4x+30)$$

$$47$$

$$47$$

$$329$$

$$188$$

$$2209$$

$$47$$

$$6$$

$$2824$$

$$47$$

$$188$$

$$30 - x - x^2 = 0$$

$$(4x^2 - 20x + 25)(x+6) = - (4x^2 + 8x^2 + 2209 + (12x^3 - 282x - 188x^2))$$

$$4x^3 + 24x^2 - 20x^2 - 120x + 25x + 150$$

$$(4x^3 + 4x^2 - 95x + 150) = -4x^4 + 12x^3 + 179x^2 + 282x + 2209$$

$$4x^4 + 16x^3 - 175x^2 - 377x - 2059$$

$$81 \cdot 4 + 27 \cdot 16 - 9 \cdot 175 - 373 \cdot 3 - 2059$$

$$-27$$

$$\frac{2209}{-150}$$

$$2059$$

$$4(x^2 - y^2) + (x-y) - 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$m = \sqrt{x}$$

$$t = \sqrt{y}$$

$$4(m^4 - t^4) + (m^2 - t^2) - 5(m-t) = 0$$

$$4(m^4 - t^4)(m^2 + t^2) + (m^2 - t^2)(m+t) - 5(m-t) = 0$$

$$4(m^2 - t^2)(m^2 + t^2)(m^2 + t^2) + (m^2 - t^2)(m+t) - 5(m-t) = 0$$

$$4(m+t)(m^2 + t^2)(m^2 + t^2) + (m+t)(m^2 + t^2) - 5(m-t) = 0$$

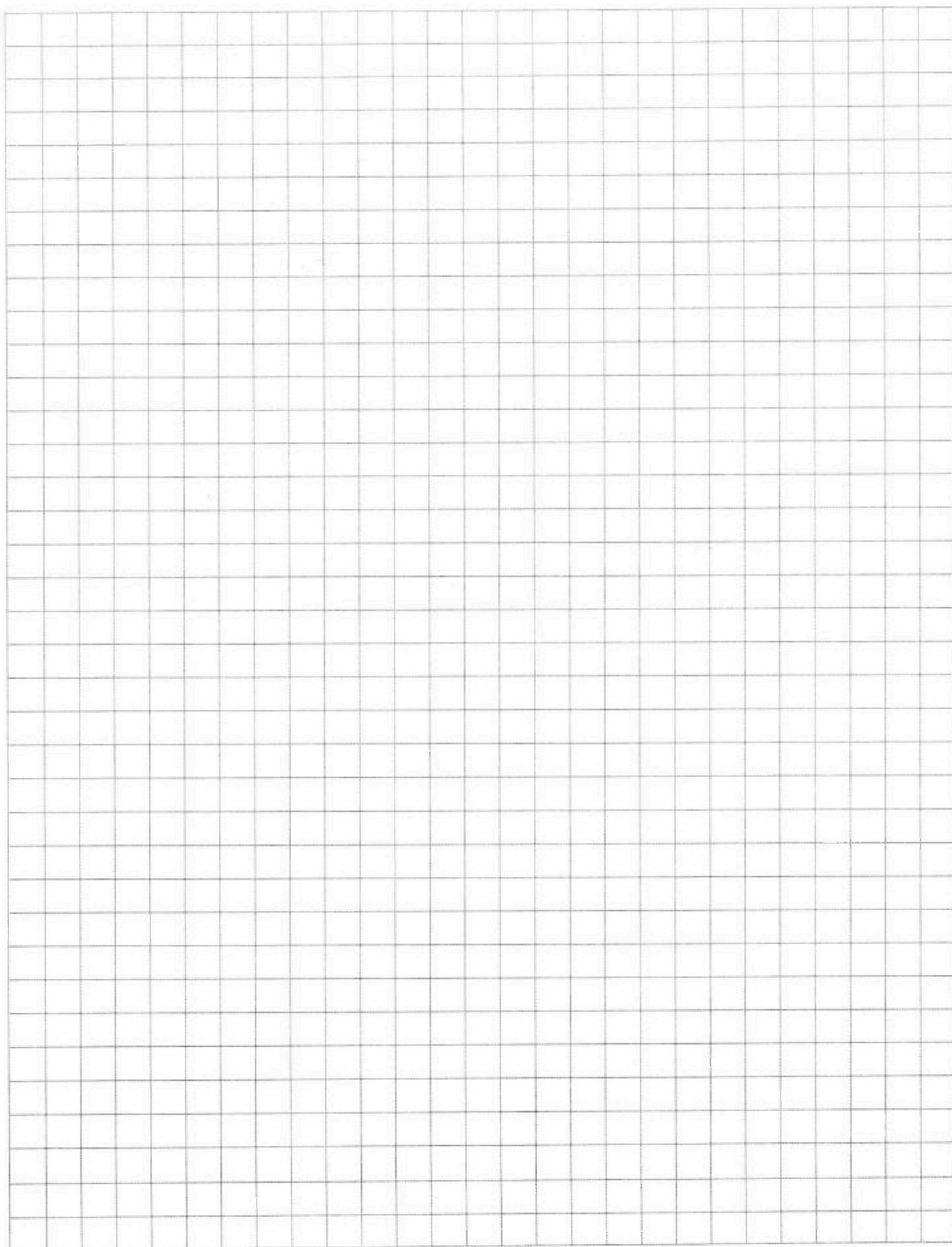


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



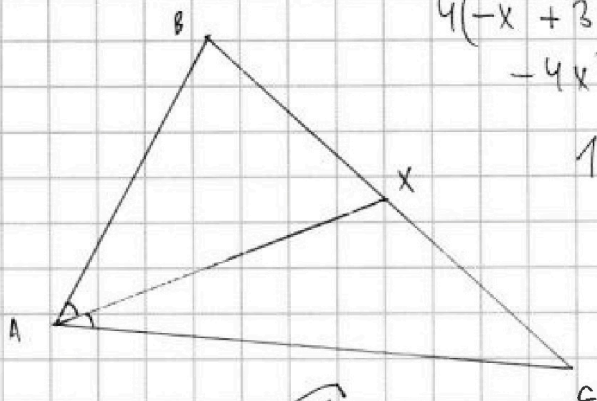


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



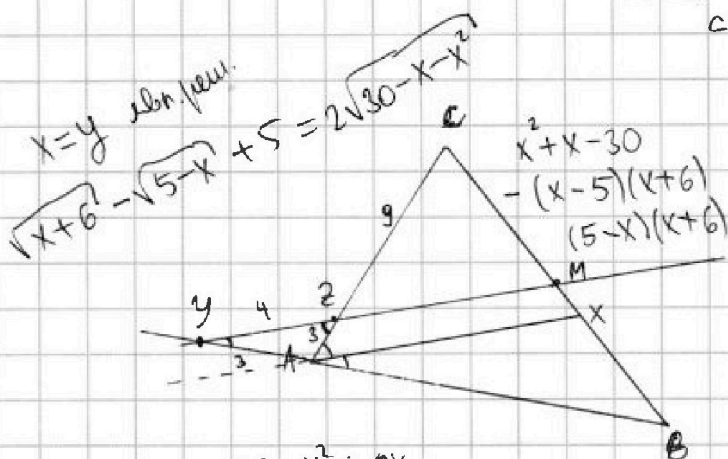
$$4(-x^2 + 30 - x) - 4x^2 + 120 - 4x + 5 - x$$

$$10 - 2|5-x| \quad 10 - 2(5-x) \quad (x \geq 5)$$

$$\begin{array}{r} -125 \\ 31 \\ \hline 94 \end{array} \quad 5-x \leq 0$$

$$10 - 2(x-5) \quad (20-2x)\sqrt{x+6}$$

$$-2(2x^2 + 3x - 47)$$



$$CM = BM \quad AC = 12$$

$$9 + 8 \cdot 47$$

$$376$$

$$9$$

$$385$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB}$$

$$\sqrt{x+6} \left(\frac{10-4|5-x|}{10-4(5-x)} \right)$$

$$30 - x^2 = 4x \quad (x+6)(5-y) = 30 - xy - by + 5x$$

$$16 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot \cos \alpha \quad \sqrt{m} =$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y - 5^4 \sqrt{y} + 5^4 \sqrt{x} = 0$$

$$4(x^2 - y^2)(x+y)(x^2 + y^2) + (x-y) - 5(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = 0$$

$$x^2(x+6) - (2x^2 + 3x - 47)^2 \quad x \geq -6$$

$$4x^4 + 9x^2 +$$

$$2 \cdot 25 + 15 - 47 \quad (18)$$

$$2 - 3 - 47$$

$$x^2(x+6) - (2x^2 + 3x - 47)^2$$