



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a - 5-й член прогрессии, b - 8-й член прогрессии

$$\begin{cases} a = 6x + 18 \\ a + 2b = (x^2 - 4x)^2 \\ a + 6b = -3x^2 \end{cases}$$

$$2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$\cancel{3x^4} - \cancel{16x^3} + \cancel{432x^2} - 12x - 36 = -3x^2 - \cancel{x^4} + \cancel{8x^3} - 16x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x^3(x-2) - 6x^2(x-2) + 5x(x-2) + 8(x-2) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 8 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2(x-2) - 4x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$$

$$\text{Answer: } x = 2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}.$$





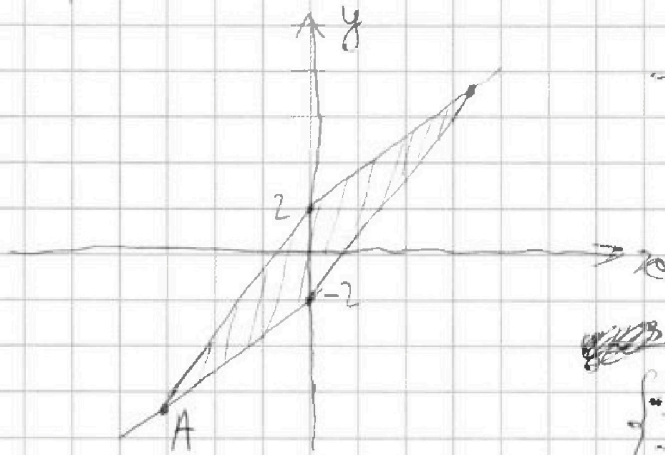
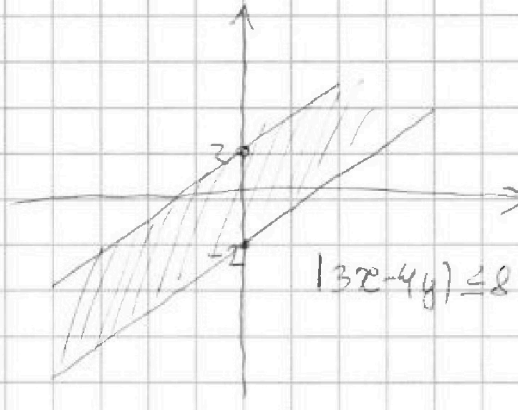
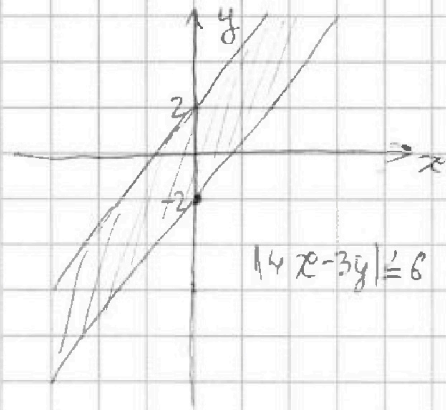
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$



— Область, при которой
целевые верно

В точке A $x \rightarrow \min$ и $y \rightarrow \min$

\Rightarrow это точка, при которой
 $14x+7y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ -4x+3y=6 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}x-2 = \frac{4}{3}x+2$$

$$x = \frac{-4}{\frac{16-3}{12}} = -\frac{48}{13}$$

$$y = -\frac{50}{13}$$

$$14x+7y = -88-50 = -138$$

Ответ: -138



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$1) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$1.1) \begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 21 \quad \emptyset$$

$$1.2) \begin{cases} m-n = 13p \\ m-n+9 = p \end{cases} \Rightarrow p = -\frac{3}{4} \quad \emptyset$$

$$1.3) \begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$mn \cdot 4 = 3q^2 \Rightarrow q = \frac{2}{3} \sqrt{3mn}$$

$$mn = 21$$

$$1.3.1) m = 7; n = 3$$

$$1.3.2) m = 21; n = 1$$

$$1.3.3) m = 1; n = 21$$

$$2.1) \begin{cases} m-n = 3 \\ m-n+9 = q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 12 \quad \emptyset$$

$$2.2) \begin{cases} m-n = 3q \\ m-n+9 = q \end{cases} \Rightarrow 2q = -9 \quad \emptyset$$

$$2.3) \begin{cases} m-n = q^2 \\ m-n+9 = 3 \end{cases} \Rightarrow q^2 = -6 \quad \emptyset$$

Ответ: (7; 3), (21; 1), (1; 21)

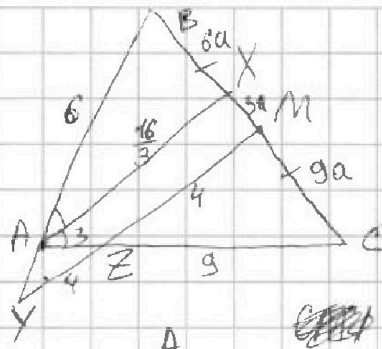


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



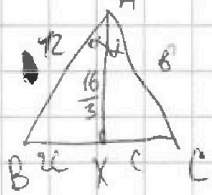
$$AX \parallel ZM \Rightarrow \triangle AXC \sim \triangle ZMC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM = 9a; \quad XM = 3a; \quad BM = CM = 9a$$

$$\triangle ABX \sim \triangle YBM \Rightarrow \frac{B}{AX} = \frac{3}{4} \Rightarrow AX = \frac{4}{3} B$$

$$B = 4; \quad AX = \frac{16}{3}$$

$$\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 6$$



$$BX = 2c$$

$$CX = c$$

$$4c^2 = 144 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 4 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$2c^2 = 36 + \frac{256}{9} - 4 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$c^2 = 4 \cdot \frac{49}{9} = \frac{196}{9}$$

$$c = \frac{14}{3}$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

Слева и справа одинаковые, возрастающие функции
Если $x > y$, то л.ч. $>$ правой, если $x < y$, то л.ч. $<$ правой $\Rightarrow x = y$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

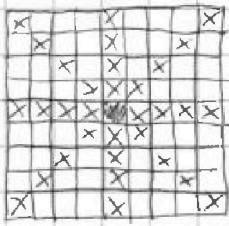
СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего вариантов закрасить 2 узла, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, не считаются одинаковыми: $81 \cdot 80 / 2 = 3240$

Важно! ~~Важно!~~ ^{Факт} количество возможных закрасиваний, что закрасенные узлы симметричны ^{относительно} центра: 16



Если поворотом ^{получить} квадрат с такими закрасенными узлами, то ~~получить~~ из четырех полученных квадратов 2 будут 2 пары одинаковых

Если ~~закрасенные~~ узлы не симметричны относительно центра, то при поворачивании получается 4 разных квадрата.

Таким образом, в 1-м случае на каждый квадрат приходится 2 других квадрата, такой, что ~~при~~ при поворачивании ~~каждый~~ их можно получить друг из друга. Во 2-м случае на каждый квадрат приходится 3 таких квадрата.

Итоговое кол-во квадратов: $\frac{16}{2} + \frac{3240 - 16}{4} = 8 + 806 = 814$

Ответ: 814



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$~~ $x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12$ $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$ $x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12$

~~$x^3(x-2) - 6x^2$~~ $x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$

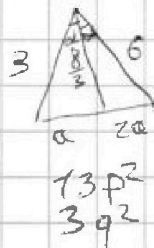
$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$ $x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x - 3x + 6$ $32 \ 24 \ 16$
 1606

$a - b + 4 - 2a + 5 = 0$ $x^2 - 4x - 3$

$a(1-b) + b(1+a) + 5 = 0$ $\Delta = 16 + 12 = 28$

$a(1-2b) + \frac{1}{2}(4-2b) + \frac{14}{2} = 0$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$

$(a + \frac{1}{2})(1-2b) + \frac{14}{2} = 0$



$9 + \frac{64}{9} - 16 \cos \alpha = a^2$

$36 + \frac{64}{9} - 32 \cos \alpha = 9a^2$

~~$36 + \frac{64}{9} - 32 \cos \alpha = 9a^2$~~

$2a^2 = 36 - 18 - \frac{64}{9}$

$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$

$m^2n - mn^2 + 3mn$

$(m-n)^2 + 9(m-n)$

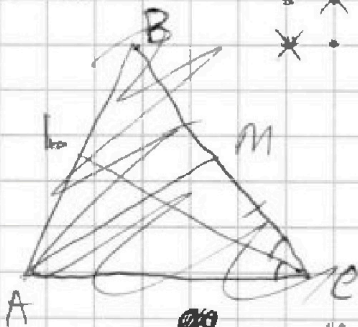
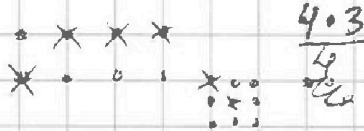
1) $\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$

$a^2 = 9 - \frac{32}{9} = \frac{49}{9}$



~~$13p^2$~~

1.1) $\begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases}$ mn $9 \cdot 8 - 12 \cdot 4$



$36 - 4 = 32$

$\frac{32}{4} = 8$



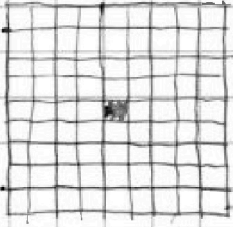


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a + 2b = 9$$

$$a + 6b = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$2b = -21 - 6\sqrt{7}$$

$$b = -\frac{21}{2} - 3\sqrt{7}$$

$$11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7}$$

$$\frac{3 + 0\sqrt{7}}{2} = 1.5$$

$$4b = -42 - 12\sqrt{7}$$

$$\frac{-42 - 12\sqrt{7}}{4} = -10.5 - 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

~~$$a^2 + 12ab + 36b^2$$~~

~~$$1 + 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - 1 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$~~

$$30 - x - x^2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-2x - 1$$

$$\frac{121}{4}$$

$$11$$

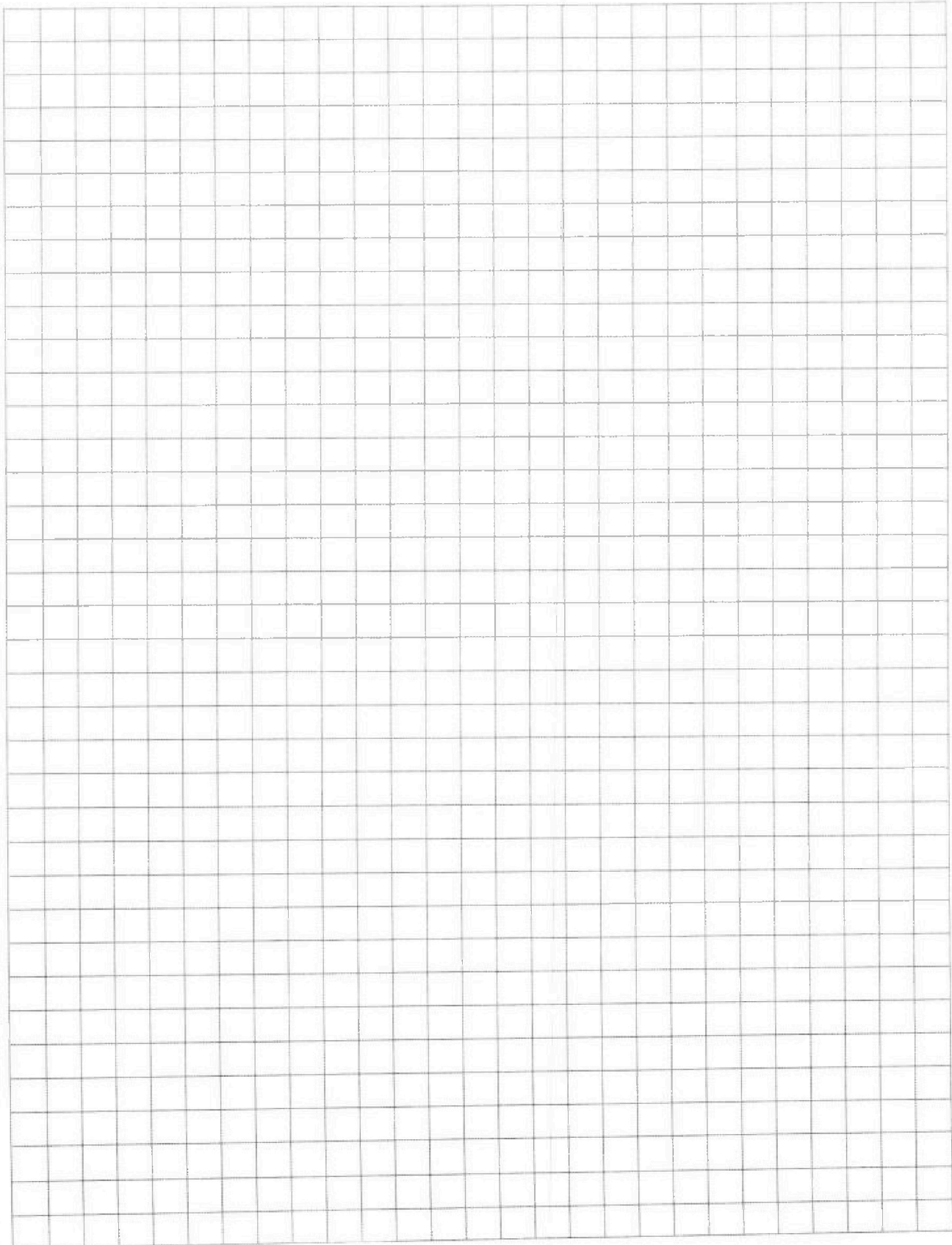


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+4b=6x+18 \\ a+6b=(x^2-4x)^2 \\ a+10b=-3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 36a^2+256-84ac\cos\alpha &= 36 \\ 144a^2+256-84ac\cos\alpha &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^6 \quad 2^5 \cdot 3 \\ 16 \quad 42a^2 + \frac{256}{3} &= 108 \\ 76 \quad 288a^2 + \frac{256 \cdot 2}{3} &= 218 \\ \frac{96}{256} \quad 216a^2 &= 180 + \frac{256}{9} \end{aligned}$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 18x^2$$

$$\begin{aligned} 2b &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \\ x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 12x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{30-x-x^2}}{2\sqrt{30-x-x^2}}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

$$6b = -3x^2 - 6x - 18$$

$$2b = -x^2 - 2x - 6$$

$$-x^2 - 2x - 6 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 5 &= 2ab \\ a(1-2b) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - b + 5 &= 2ab \\ a(1-b) + b(1+a) + 5 &= 0 \end{aligned}$$

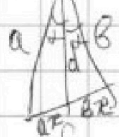
$$\begin{aligned} 108a^2 &= 90 + \frac{128}{3} \\ 54a^2 &= 45 + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

~~$$a^2 + b^2 + 5 = 2ab$$~~

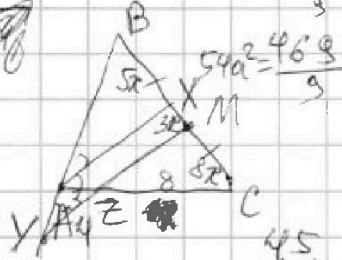
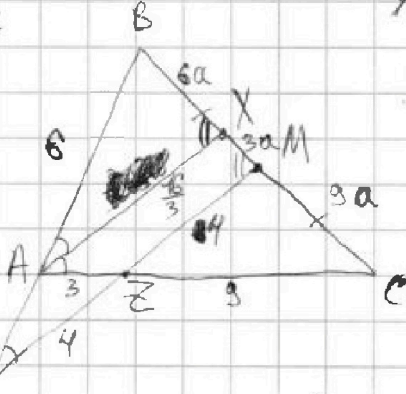
$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

~~$$x+6 - 54x - 4(5-x)(x+6) = 2\sqrt{15}$$~~

$$\begin{cases} a=6x+18 \\ a+2b=(x^2-4x)^2 \\ a+6b=-3x^2 \end{cases}$$



$$x(a+b) = c$$



$$\frac{a+b}{AX} = \frac{3}{2} \quad \frac{405}{3}$$

$$AX = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}b$$

$$\frac{8}{3} + \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}$$

$$b = 4$$

$$d = \sqrt{6^2 - \frac{c^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = 6\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 + b^2}} = 6\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{13 \cdot 14}{9}$$

$$\frac{16}{3} = 6\sqrt{1 - \frac{c^2}{38+81}}$$

$$\frac{64}{81} = 1 - \frac{c^2}{114} \quad c = \sqrt{\frac{14 \cdot 114}{81}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$9x - 12y$~~ ~~$16x - 12y$~~

~~$18x - 12y = 74$~~
 ~~$16x - 12y = 474$~~

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{3}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

$y = \frac{4x}{3} - 2$
 $y =$

$3y - 4x \leq 6$ ~~$512 \frac{7}{4}$~~
 $y \leq \frac{4}{3}x + 2$ ~~$-48 \frac{10}{4}$~~

$4y - 3x \leq 8$
 $y \leq \frac{3}{4}x + 2$ ~~$8 \frac{10}{4}$~~

$y = \frac{4}{3}x - 2$
 $4y - 3x = 8$ ~~$144 + 368$~~
 $y = \frac{3}{4}x -$ ~~$\frac{7}{4}$~~

~~$18x - 12y = 74$~~
 ~~$16x - 12y = 474$~~
 $-144 - 4y = 6$ ~~186~~
 $y = \frac{3}{4}x - 2$
 $y = \frac{4}{3}x - 2$
 $y = \frac{3}{4}x - 2$
 $y = \frac{4}{3}x + 2$

$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2$
 $x = \frac{-4}{\frac{16-9}{12}} = \frac{-48}{7}$
 $\frac{93}{14}$
 $-48 - 3 - 8 = 9$
 $\frac{-36+56}{4}$

$a = 6x + 18$
 $a + 2b = x^2(x-4)^2 = -2 - \frac{3 \cdot 12}{7} =$
 $a + 6b = -3x^2 = -14x + 36$
 $2b = -x^2 - 2x - 6$
 $2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$
 $2b = \frac{-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2}{2} = \frac{-x^4 + 4x^3 - 19x^2}{2} + 2x + 3$
 $4b = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$
 $2b = -2x^4 + 16x^3 - 35x^2 + 6x + 18 = -x^2 - 2x - 6$
 $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 4x - 12 = 0$