



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a$  - 5-й член прогрессии,  $b$  - 8-й член прогрессии

$$\begin{cases} a = 6x + 18 \\ a + 2b = (x^2 - 4x)^2 \\ a + 6b = -3x^2 \end{cases}$$

$$2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2$$

$$\cancel{3x^4} - \cancel{16x^3} + \cancel{432x^2} - 12x - 36 = -3x^2 - \cancel{x^4} + \cancel{8x^3} - 16x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x^3(x-2) - 6x^2(x-2) + 5x(x-2) + 8(x-2) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 8 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2(x-2) - 4x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$$

Answer:  $x = 2; 2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}$ .





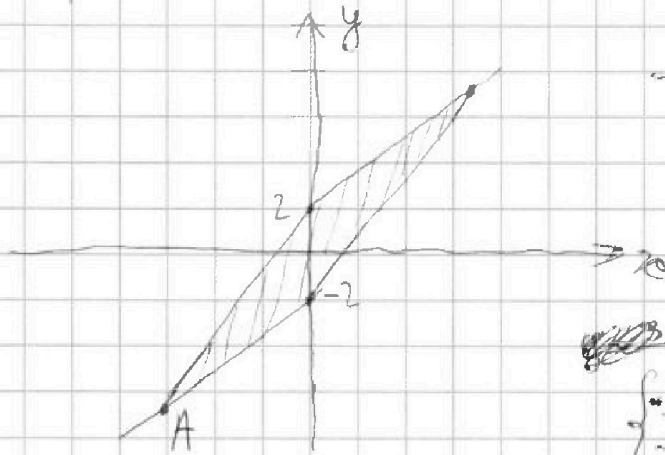
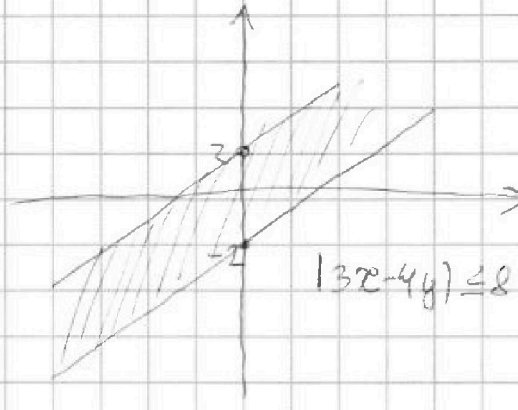
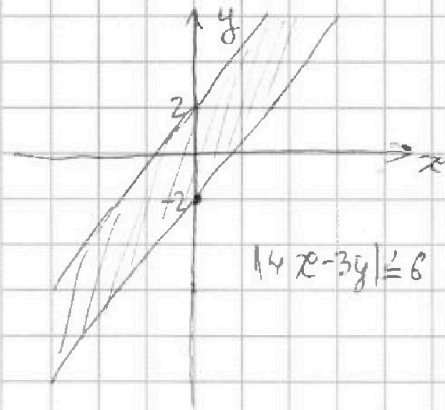
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$



— Область, для которой  
целовале верно

В точке A  $x \rightarrow \min$  и  $y \rightarrow \min$

$\Rightarrow$  это точка, при которой  
 $14x+7y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x+4y=8 \\ -4x+3y=6 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}x-2 = \frac{4}{3}x+2$$

$$x = \frac{-4}{\frac{16-3}{12}} = -\frac{48}{13}$$

$$y = -\frac{50}{13}$$

$$14x+7y = -88-50 = -138$$

Ответ: -138





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$1) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$1.1) \begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 21 \quad \emptyset$$

$$1.2) \begin{cases} m-n = 13p \\ m-n+9 = p \end{cases} \Rightarrow p = -\frac{3}{4} \quad \emptyset$$

$$1.3) \begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$mn \cdot 4 = 3q^2 \Rightarrow q = \frac{2}{3}mn$$

$$mn = 21$$

$$1.3.1) m = 7; n = 3$$

$$1.3.2) m = 21; n = 1$$

$$1.3.3) m = 1; n = 21$$

$$2.1) \begin{cases} m-n = 3 \\ m-n+9 = q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 12 \quad \emptyset$$

$$2.2) \begin{cases} m-n = 3q \\ m-n+9 = q \end{cases} \Rightarrow 2q = -9 \quad \emptyset$$

$$2.3) \begin{cases} m-n = q^2 \\ m-n+9 = 3 \end{cases} \Rightarrow q^2 = -6 \quad \emptyset$$

Ответ: (7; 3), (21; 1), (1; 21)



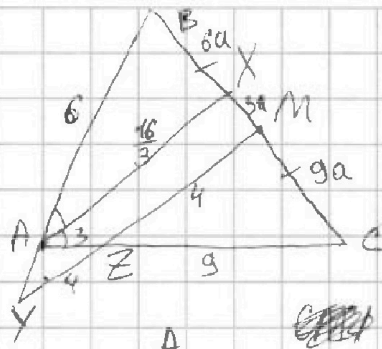
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AX \parallel ZM \Rightarrow \triangle AXZ \sim \triangle ZMC \Rightarrow$$

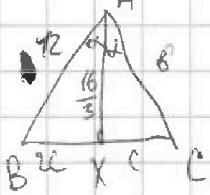
$$\Rightarrow CM = 9a; \quad BM = 3a; \quad BM = CM = 9a$$

$$\triangle ZM = 8; \quad \frac{BM}{AX} = \frac{3}{4} \Rightarrow AX = \frac{4}{3} \cdot 8$$

$$\triangle ABX \sim \triangle YBM \Rightarrow 8 + 4 / \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{3}{2}$$

$$8 = 4; \quad AX = \frac{16}{3}$$

$$\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 6$$



$$BX = 2c$$

$$CX = c$$

$$4c^2 = 144 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 4 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$2c^2 = 36 + \frac{256}{9} - 4 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$c^2 = 4 \cdot \frac{49}{9} \Rightarrow c = \frac{14}{3}$$

$$c = \frac{14}{3}$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt{y}$$

Слева и справа одинаковые, возрастающие функции

Если  $x > y$ , то л.ч.  $>$  правой, если  $x < y$ , то л.ч.  $<$  правой  $\Rightarrow x = y$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

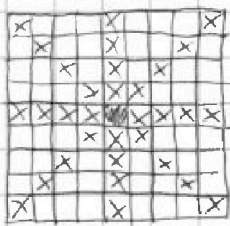
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего вариантов закрасить 2 узла, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, не считаются одинаковыми:  $81 \cdot 80 / 2 = 3240$

Вопрос: ~~какое~~ <sup>какое</sup> количество возможных закрасиваний, что закрасенные узлы симметричны <sup>относительно</sup> центра: 16



Если поворотом <sup>получается</sup> квадрат с такими закрасенными узлами, то ~~каждый~~ <sup>каждый</sup> из четырех полученных квадратов будет 2 пары одинаковых

Если ~~закрасенные~~ <sup>закрасенные</sup> узлы не симметричны относительно центра, то при поворачивании получается 4 разных квадрата.

Таким образом, в 1-м случае на каждый квадрат приходится 2 других квадрата, такой, что ~~если~~ <sup>если</sup> при поворачивании ~~каждый~~ <sup>каждый</sup> их можно получить друг из друга. Во 2-м случае на каждый квадрат приходится 3 таких квадрата.

Итоговое кол-во квадратов:  $\frac{16}{2} + \frac{3240 - 16}{4} = 8 + 806 = 814$

Ответ: 814





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$~~   $x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12$   $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$   $x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12$

~~$x^3(x-2) - 6x^2$~~   $x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$

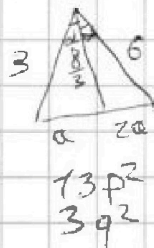
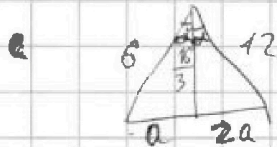
$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$   $x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x - 3x + 6$   $32 \ 24 \ 16$   
 $1606$

$a + b + c + 2ab + 5 = 0$

$a(1+b) + b(1+a) + 5 = 0$

$a(1-2b) + \frac{1}{2}(4-2b) + \frac{14}{2} = 0$   $\Delta = 16 + 12 = 28$

$(a + \frac{1}{2})(1-2b) + \frac{14}{2} = 0$   $x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{7}$



$9 + \frac{64}{9} - 16 \cos \alpha = a^2$

$36 + \frac{64}{9} - 32 \cos \alpha = 9a^2$

~~$2a^2 = 36 - 18 - \frac{64}{9}$~~

$2a^2 = 36 - 18 - \frac{64}{9}$

$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$

$m^2n - mn^2 + 3mn$

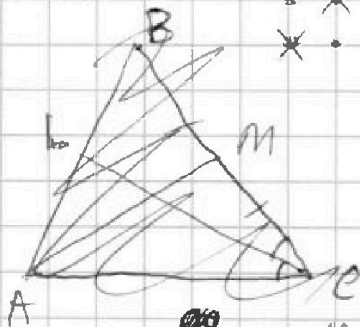
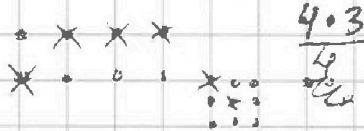
$(m-n)^2 + 9(m-n)$

1)  $\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$  2)  $\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$   $a^2 = 9 - \frac{32}{9} = \frac{49}{9}$



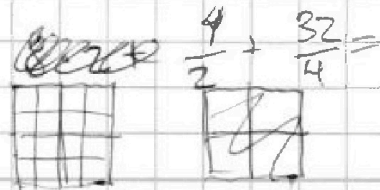
~~$13p^2$~~   $9 \cdot 8 - 12 \cdot 4$

1.1)  $\begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases}$   $mn$



$36 - 4 = 32$

$\frac{32}{4} = 8$



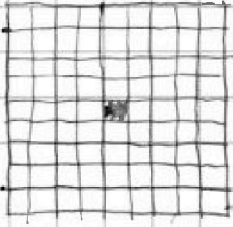


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a + 2b = 9$$

$$a + 6b = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$2b = -21 - 6\sqrt{7}$$

$$b = -\frac{21}{2} - 3\sqrt{7}$$

$$11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7}$$

$$\frac{3 + 4\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = 2$$

$$4b = -42 - 12\sqrt{7}$$

$$\frac{-42 - 12\sqrt{7}}{4} = -\frac{21}{2} - 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

~~$$1 + 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - 1 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$~~

$$30 - x - x^2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-2x - 1$$

$$\frac{121}{4}$$

$$11$$



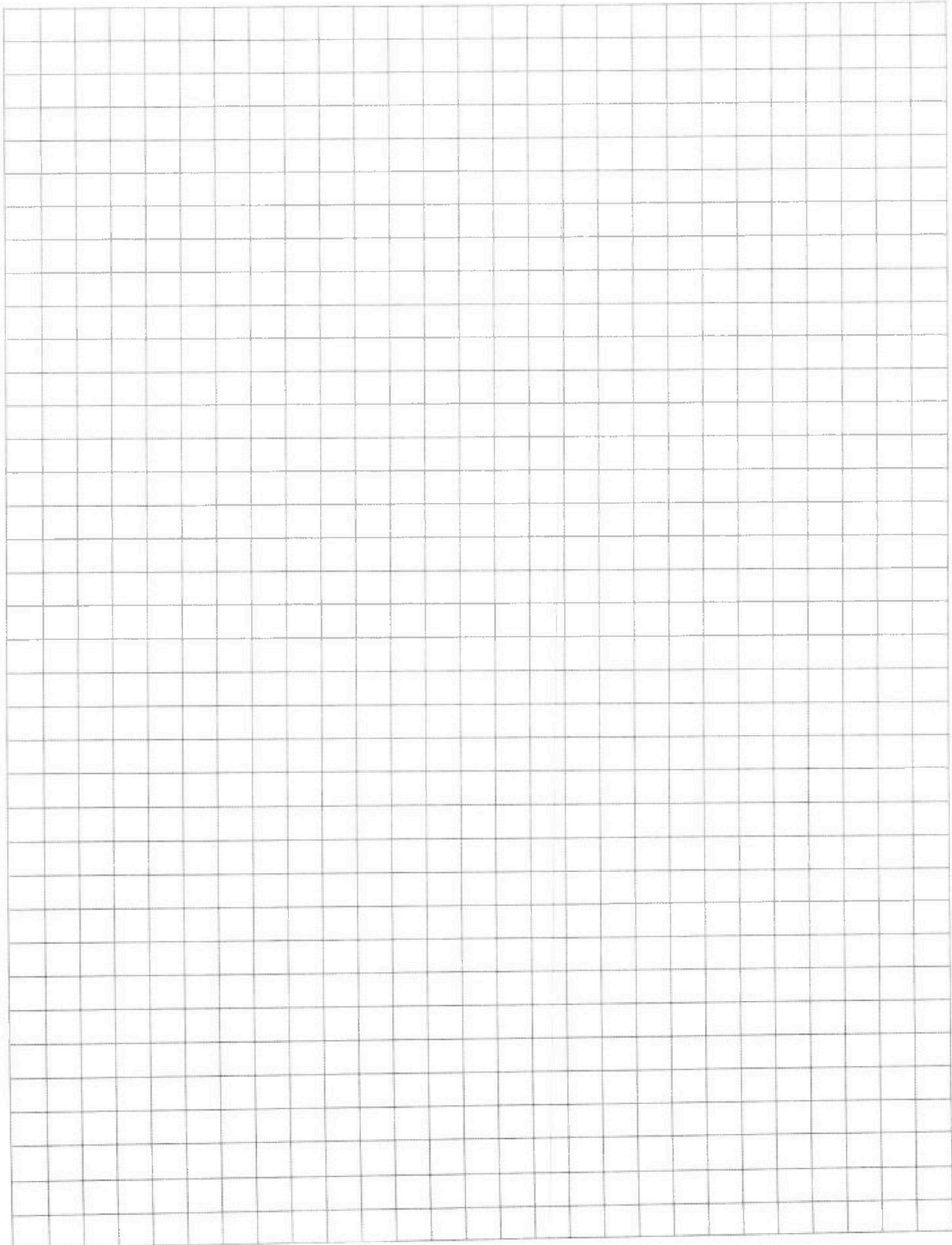


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+4b=6x+18 \\ a+6b=(x^2-4x)^2 \\ a+10b=-3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 36a^2+256-84ac \cos \alpha &= 36 \\ 144a^2+256-84ac \cos \alpha &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^6 \quad 2^5 \cdot 3 \\ 16 \quad 42a^2 + \frac{256}{3} &= 108 \\ 76 \quad 288a^2 + \frac{256 \cdot 2}{3} &= 218 \\ \frac{96}{256} \quad 216a^2 &= 180 + \frac{256}{9} \end{aligned}$$

$$4b = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 18x^2$$

$$\begin{aligned} 2b &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \\ x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 12x - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{30-x-x^2} \\ 1-1-2x \\ 2\sqrt{30-x-x^2} \end{aligned}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

$$6b = -3x^2 - 6x - 18$$

$$2b = -x^2 - 2x - 6$$

$$a+b=c$$

$$-x^2 - 2x - 6 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)(x+6)}$$

$$a^2 - b^2 + 5 = 2ab$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$108a^2 = 90 + \frac{128}{3}$$

$$a(1-2b)$$

$$a(1-b) + b(1+a) + 5 = 0$$

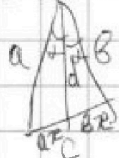
$$54a^2 = 45 + \frac{64}{3}$$

~~$$a^2 + b^2 + 5 = 2ab$$~~

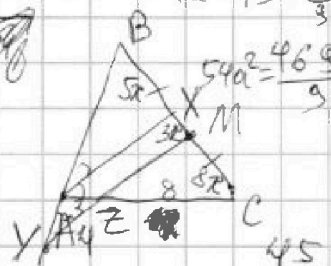
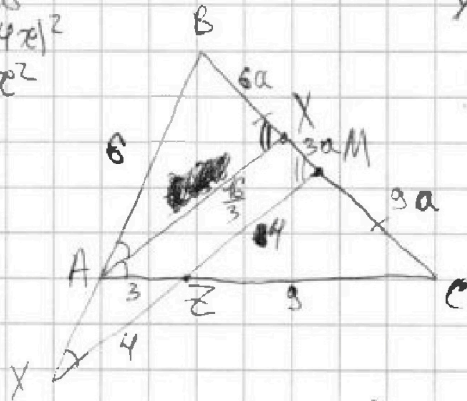
$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(5-x)(x+6)}$$

~~$$x+6 - 54x - 4(5-x)(x+6) = 2\sqrt{15}$$~~

$$\begin{cases} a=6x+18 \\ a+2b=(x^2-4x)^2 \\ a+6b=-3x^2 \end{cases}$$



$$x(a+b)=c$$



$$\frac{a+b}{AX} = \frac{3}{2} \quad \frac{405}{3}$$

$$AX = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}b$$

$$\frac{8}{3} + \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}$$

$$b = 4$$

~~$$\frac{3x^2}{(a+b)^2} + \frac{2b^2}{(a+b)^2}$$~~

$$d = \sqrt{6^2 - \frac{c^2 b^2}{(a^2+b^2)^2}} = 6\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2+b^2}} = 6\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}}$$

$$\frac{16}{9} = \frac{64}{81}$$

$$\frac{16}{9} = 6\sqrt{1 - \frac{c^2}{38+81}}$$

$$\frac{64}{81} = 1 - \frac{c^2}{114} \quad c = \sqrt{\frac{14 \cdot 114}{81}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$9x - 12y$~~   ~~$16x - 12y$~~

~~$18x - 12y = 74$~~   
 ~~$16x - 12y = 474$~~

$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{3}{4}$   
 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

$y = \frac{4x}{3} - 2$

$3y - 4x \leq 6$   $\frac{512}{4}$   
 $-48$   $\frac{104}{4}$

$y \leq \frac{4}{3}x + 2$   $\frac{22}{4}$

$4y - 3x \leq 8$

$y \leq \frac{3}{4}x + 2$   $y = \frac{4}{3}x - 2$

$4y - 3x = 8$   $\frac{144 + 368}{4}$

$y = \frac{3}{4}x -$

$y = \frac{4}{3}x - 2$

$y = \frac{3}{4}x - 2$

$y = \frac{4}{3}x + 2$

$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2$

$x = \frac{-4}{\frac{16-9}{12}} = \frac{-48}{7}$

$\frac{93}{14}$

$\frac{-48-3}{4} - 8 = 9$

$\frac{-36+56}{4}$

$a = 6x + 18$

$a + 2b = x^2(x-4)^2 = -2 - \frac{3 \cdot 12}{4} =$

$a + 6b = -3x^2$

$2b = -x^2 - 2x - 6$

$2b = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$

$2b = \frac{-3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2}{2} = \frac{-x^4 + 4x^3 - 19x^2}{2} + 2x + 3$

$4b = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$

$2b = -2x^4 + 16x^3 - 35x^2 + 6x + 18 = -x^2 - 2x - 6$

$x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 4x - 12 = 0$

$2y = 3 + \frac{42}{4}$

$y = -2 + \frac{3x}{4} = y = \frac{93}{14}$