



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3m$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a_n$  - арифметическая прогрессия,  $b$  - разность,  $a_1$  - первый член,  $a_1 + 4b$  - пятый член,  $a_1 + 6b$  - шестой,  $a_1 + 10b$  - одиннадцатый.

По условию:

$$\begin{cases} a_1 + 4b = 6x + 18 \\ a_1 + 6b = (x^2 - 4x)^2 \\ a_1 + 10b = -3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 6x + 18 - 4b \\ 6x + 18 - 4b + 6b = -3x^2 \\ a_1 + 6b = (x^2 - 4x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}x^2 - x - 3 \\ a_1 = 2x^2 + 10x + 30 \\ a_1 + 6b = (x^2 - 4x)^2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 2x^2 + 10x + 30 - 3x^2 - 6x - 18 = (x^2 - 4x)^2 \\ -x^2 + 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2 \end{cases}$$

$$t = x^2 - 4x$$

$$-t + 12 = t^2$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2) x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D/4 = 4 + 3 = 7, \quad x = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

$$x = 2 + \sqrt{7}$$

$$x = 2 - \sqrt{7}$$

Если в задаче подразумевалась целочисленная арифметическая прогрессия, то  $x = 2$ . Если любая, то  $x \in \{2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}\}$

Ответ:  $x = 2$  если прогрессия целочисленная,  $x \in \{2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}\}$  если прогрессия любая.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

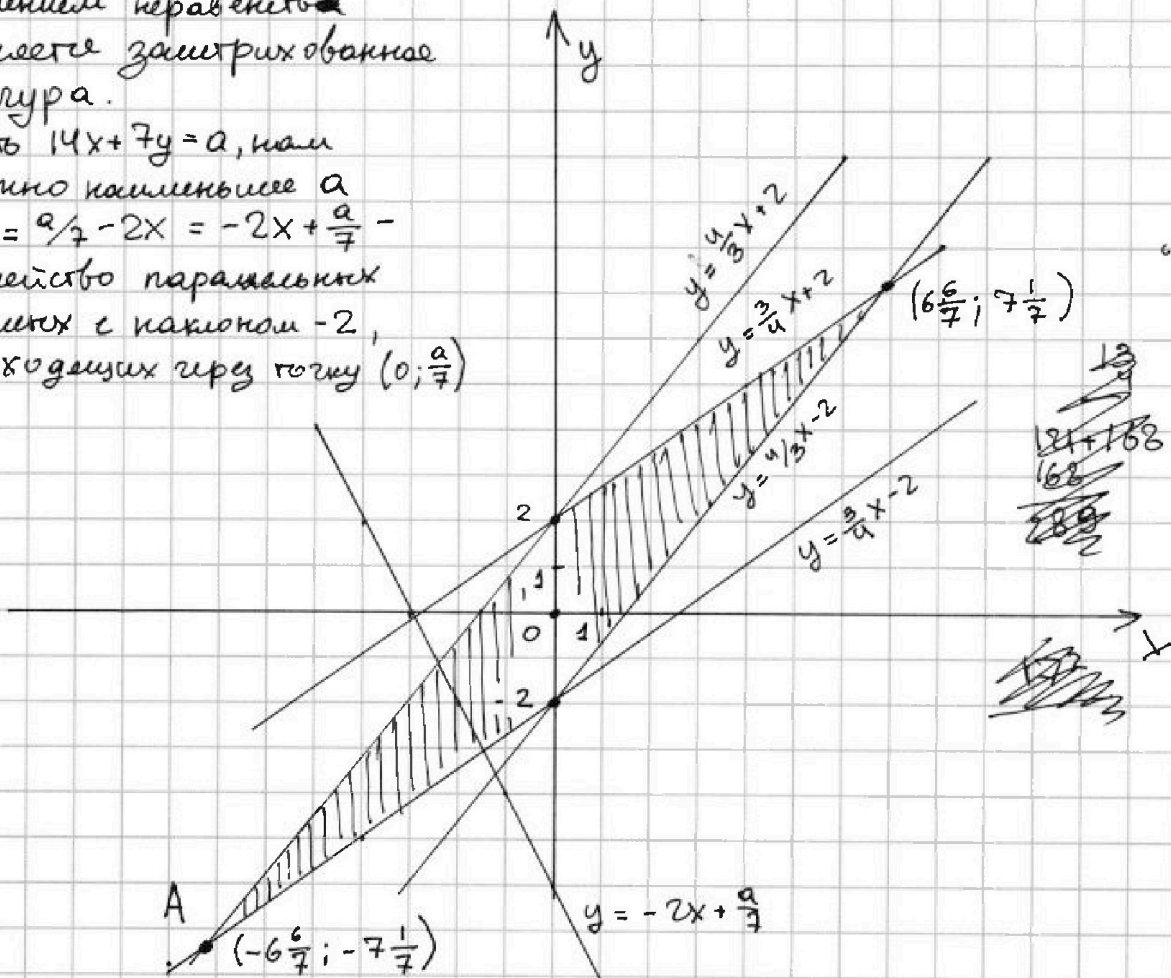
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y \geq -6 \\ 4x-3y \leq 6 \\ 3x-4y \geq -8 \\ 3x-4y \leq 8 \end{cases} \begin{cases} y \leq \frac{4}{3}x+2 \\ y \geq \frac{4}{3}x-2 \\ y \leq \frac{3}{4}x+2 \\ y \geq \frac{3}{4}x-2 \end{cases}$$

Построим график системы неравенств.  $y = \frac{4}{3}x+2$  и  $y = \frac{4}{3}x-2$  — параллельные прямые, проходящие соответственно через точки  $(0;2)$  и  $(0;-2)$ , угол наклона  $= \frac{4}{3}$ . Аналогично  $y = \frac{3}{4}x+2$ ,  $y = \frac{3}{4}x-2$  проходит через  $(0;2)$ ;  $(0;-2)$ , угол наклона  $= \frac{3}{4}$ .

Решением неравенств является заштрихованная фигура.

Пусть  $14x+7y=a$ , нам нужно наименьшее  $a$   
 $y = \frac{a}{7} - 2x = -2x + \frac{a}{7}$  — семейство параллельных прямых с наклоном  $-2$ , проходящих через точку  $(0; \frac{a}{7})$



Для выполнения условия прямая  $y = -2x + \frac{a}{7}$  должна ~~то~~ пересекать фигуру хотя бы в одной точке. Для того, чтобы  $a$  было наименьшее, точка пересечения должна быть как можно ниже.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Самая низкая (с самой маленькой ординатой) точка фигуры - точка  $A(-6\frac{6}{7}; -7\frac{1}{7})$ . ~~Каждая~~ Прямая с искомым  $a$  проходит через эту точку, значит

$$-7\frac{1}{7} = 6\frac{6}{7} \cdot 2 + \frac{a}{7} \quad | \cdot 7$$

$$-50 = 49 \cdot 2 + a$$

$a = -148$ . Значит, минимальное значение  $14x + 7y = -148$

Ответ:  $-148$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2 n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

a) Пусть  $A = 13p^2, B = 3q^2$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

1) Пусть  $m:2$  и  $n:2, 3q^2:mn \Rightarrow q:2 \Rightarrow q=2$  (единственное простое

:2).  $m-n:2 \Rightarrow 13p^2:2 \Rightarrow p:2 \Rightarrow p=2$ . Тогда

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 42 \\ mn(m-n+3) = 12 \end{cases}$$

$$m-n = k \quad k(k+9) = 42 \quad k^2 + 9k - 42 = 0 \quad (k+13)(k-4) = 0$$

$$k = -13; k = 4$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ mn \cdot 7 = 12 \end{cases} \quad 12:7 \Rightarrow \text{не имеет решений в натуральных}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ -mn \cdot 10 = 12 \end{cases} \quad 12:10 \Rightarrow \text{не имеет решений в натуральных}$$

2) Пусть  $m:2, n \not:2, 3q^2:m:2 \Rightarrow q=2$

$(m-n) \not:2$ , но  $(m-n+9):2 \Rightarrow 13p^2:2 \Rightarrow p=2$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 42 \\ mn(m-n+3) = 12 \end{cases}$$

Ровно то же мы решали в п.1 и решений в  $\mathbb{N}$  там не было.

3) Если  $m \not:2, n:2$  аналог.  $3q^2:n:2 \Rightarrow q=2$

$(m-n+9):2 \Rightarrow 13p^2:2 \Rightarrow p=2$ .

4) Если  $m \not:2, n \not:2$ , то  $(m-n):2 \Rightarrow p=2$ , но  $(m-n+3) \not:2 \Rightarrow q \neq 2$ .

$$(m-n)(m-n+9) = 42, \text{ как в п.1 } m-n \in \{-13; 4\}$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ mn \cdot 7 = 3q^2 \end{cases} \quad \text{Когда } m-n=4 \quad 3q^2:7, q\text{-простое} \Rightarrow q=7$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ mn \cdot (-10) = 3q^2 \end{cases} \quad 3q^2 > 0, mn > 0, mn \cdot (-10) \leq 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ mn \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ mn = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = 3 \\ m = -3 \\ n = -7 \end{cases}$$

В натуральных подходах  $m=7, n=3, m \not:2, n \not:2$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

д) Пусть  $A = 3q^2$ ,  $B = 13p^2$ .

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

1) Если хоть одно из  $m, n : 2$  то аналогично п. а)  $q=2$  и  $p=2$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 12 \\ mn(m-n+3) = 42 \end{cases}$$

$$k = m-n \quad k(k+9) = 12 \quad k^2 + 9k - 12 = 0$$

$$D = 81 + 48 = 129 - \text{не целый квадрат, корней в } \mathbb{N} \text{ не будет.}$$

2) Если  $m/2, n/2$ , то  $(m-n) : 2$  и  $q=2$ , а  $p \neq 2$

$$(m-n)(m-n+9) = 12.$$

То же решаем в п. д) 1), и в натуральных оно не решается.

Итого, при  $A = 13p^2$ ,  $B = 3q^2$  единственная пара  $(7; 3)$ , а при  $A = 3q^2$ ,  $B = 13p^2$  их решений в  $\mathbb{N}$

Ответ:  $(7; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (2) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y} & (1) \end{cases}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 5-y \geq 0 \\ y^2+x-30 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 5 \\ y^2+x-30 \leq 0 \end{cases}$

(1)  $x = a^4, y = b^4, x, y \geq 0, a, b \geq 0$

$$4a^{16} + 4b^{16} + a^4 - b^4 + 5a - 5b = 0$$

$$4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + (a^2+b^2)(a+b)(a-b) + 5(a-b) = 0$$

$$(a-b)(4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) + 5) = 0$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2) + (a^2+b^2)(a+b) + 5=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & > 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{все выражение}$$

строго больше нуля, решения не имеет.

$$\Rightarrow a=b \Rightarrow a^4=b^4 \Rightarrow x=y$$

(2)  $\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$

ОДЗ:  $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 30-x-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ (x+6)(x-5) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ОДЗ} = x \in [0; 5]$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$m = \sqrt{x+6}, m \geq \sqrt{6}, n = 5-x, n \in [0; 5]$$

$$\begin{cases} m+n+5 = 2nm \\ m^2 = x+6 \\ n^2 = 5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2+m^2=11 \\ n^2+m^2-2nm+m-n+5-11=0 \\ m^2=x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2+m^2=11 \\ (m-n-2)(m-n+3)=0 \\ n^2=5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=2 \\ n^2+m^2=11 \\ m-n=-3 \\ n^2+m^2=11 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \begin{cases} m = n + 2 \\ 2n^2 + 4n - 7 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} m = n - 3 \\ 2n^2 - 6n - 2 = 0 \end{cases}$$

$$a) D/4 = 4 + 49 = 53 \\ n = \frac{2 \pm \sqrt{53}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$a) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = m - m = 2$$

$$2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 7$$

$$4(x+6)(5-x) = 49$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 49$$

$$4x^2 - 4x - 71 = 0$$

$$D/4 = 4 + 71 \cdot 4 = 72 \cdot 4 = (12\sqrt{2})^2$$

$$x = \frac{2 \pm 12\sqrt{2}}{4}$$

$$b) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = m - n = -3$$

$$2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 2$$

$$30 - x - x^2 = 1$$

$$x^2 - x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 117$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

$$\begin{cases} x \in [0; 5] \\ x = \frac{1 \pm 6\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{117}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+6\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{117}}{2} \end{cases}$$

$$x = y, \text{ так 200 решения } \left( \frac{1+6\sqrt{2}}{2}; \frac{1+6\sqrt{2}}{2} \right); \left( \frac{1+\sqrt{117}}{2}; \frac{1+\sqrt{117}}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{1+6\sqrt{2}}{2}; \frac{1+6\sqrt{2}}{2} \right); \left( \frac{1+\sqrt{117}}{2}; \frac{1+\sqrt{117}}{2} \right)$$



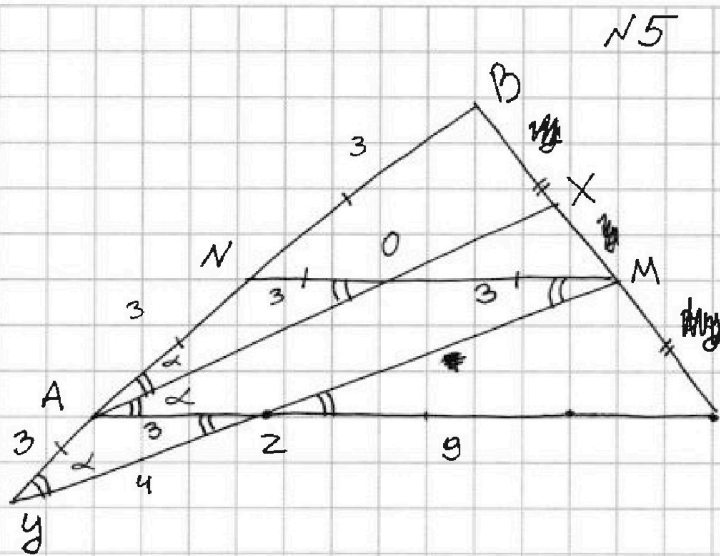
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BAX = \angle XAC$  по условию,  
 $\angle BYM = \angle BAX$  тк  $AX \parallel YM$ ,  
 $\angle AZY = \angle XAC$  как  
 накрест лежащие при  
 $AX \parallel YM$  и сек.  $AZ \Rightarrow$   
 $\triangle AYZ$  равнобедренный,  
 $AY = AZ = 3$   
 $\angle AYZ = \alpha$   
 Для  $\triangle AYZ$  по теор.  $\cos$ :  
 $9 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$   
 $6 \cos \alpha = 4$   
 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\alpha \in (0; \frac{\pi}{4}))$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$NM$  - средняя линия  $ABC$  ( $NM \parallel AC$ ,  $NM = AC/2 = 6$ )

$AX \cap NM = O$ ,  $AO \cap ZM$  - параллелограммы ( $OM \parallel AN$ ,  $AO \parallel ZM$ )  $\Rightarrow$

$OM = AZ = 3$ ,  $NO = NM - OM = 3$ ,  $\angle NOA = \angle OAC$  как накрест  
 лежащие при  $NM \parallel AC$  и сек.  $AO \Rightarrow \angle NOA = \angle NAO \Rightarrow NA = NO = 3$ .

$AN = NB$  по построению  $\Rightarrow AB = 2AN = 6$

По теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 144 + 36 + 12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = 196$$

Ответ:  $BC = 196$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

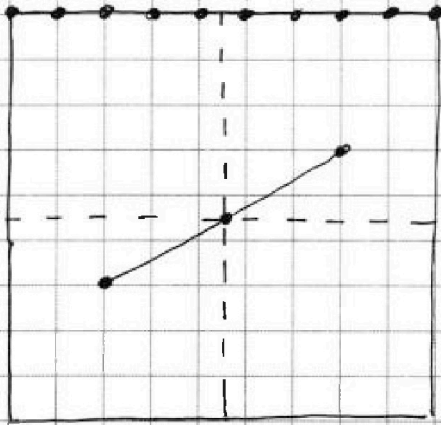


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Всего 100 узлов.

Если выбрать две точки так, что соединяющая их прямая не проходит через центр, то поворотом такая раскраска перейдет в кубую 4 раза. А если брать точки, как на рисунке (симметричны относ. центра), то такая раскраска поворотом перейдет в кубую два раза.

Всего вариантов 6 выбрать любые

две точки  $C_{100}^2$ . Выбрать симметричные относительно центра - 50, тк можно выбрать любую точку в одной половине квадрата, вторая определится однозначно. Значит выбрать не симметричные  $C_{100}^2 - 50$ . Кол-во симметричных разделим на 4, тк поворачивается 4 раза, кол-во симметричных ка? <sup>25</sup>

$$\frac{C_{100}^2 - 50}{4} + \frac{50}{2} = \frac{C_{100}^2}{4} + \frac{50}{4} = \frac{100 \cdot 99}{4 \cdot 2} + \frac{25}{2} = \frac{25 \cdot 99}{2} + \frac{25}{2} = 25 \cdot 50 =$$

= 1250

Ответ: 1250



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик!

$$6b = -3x^2 - 6x - 18$$

$$\frac{p}{q} = 4+3=7$$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$b = -\frac{1}{2}x - x - 3$$

$$a_1 = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 = 2x^2 + 10x + 30$$

$$|4x - 3y| \leq 6$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases}$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y}$$

$$x = a^4$$

$$4a^{16} - 4b^{16} + a^4 - b^4 + 5a - 5b$$

$$(a^8)^2$$

$$a^{16} - b^{16}$$

$$4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + 5(a - b)$$

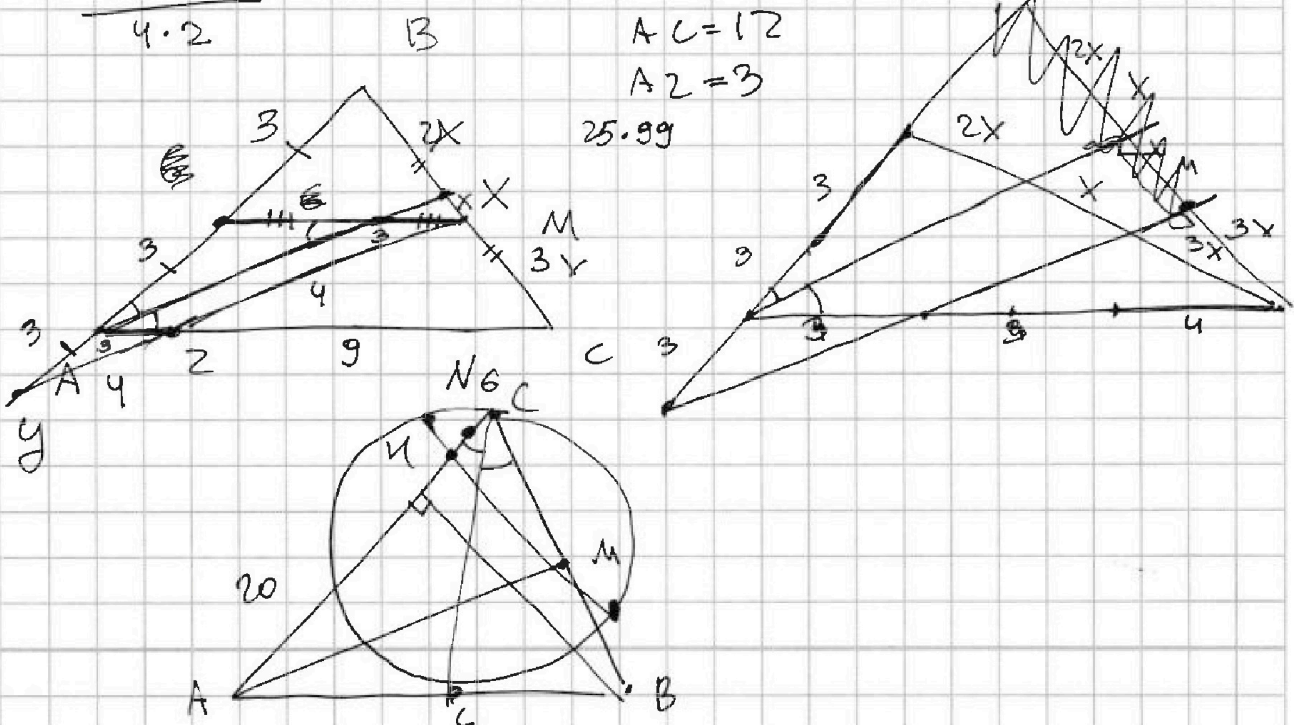
$\leq 0 \quad \leq 0 \quad < 0$

$$\frac{100 \cdot 99}{4 \cdot 2}$$

$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$25 \cdot 99$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

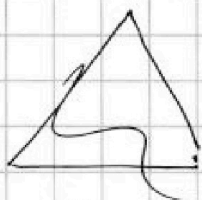


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4x - 3y \geq 0 \\ 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y < 0 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \geq 0 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y < 0 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{4}{3}x \\ y \geq \frac{4}{3}x - 2 \\ y > \frac{4}{3}x \\ y \leq \frac{4}{3}x - 2 \\ y \leq \frac{3}{4}x \\ y \geq \frac{3}{4}x - 2 \\ y > \frac{3}{4}x \\ y \leq \frac{3}{4}x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - 3y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \leq 4x + 6 \\ 3y \geq 4x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{4}{3}x + 2 \\ y \geq \frac{4}{3}x - 2 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}x + 2 = \frac{3}{4}x - 2 \quad | \cdot 12$$

$$16x + 24 = 9x - 24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7} = 7 - \frac{1}{7}$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 = \frac{4}{3}\left(7 - \frac{1}{7}\right) + 2$$

$$\frac{64}{7} - \frac{4}{21} + 2 = \frac{3 \cdot 12}{7} - \frac{14}{7} = \frac{36 + 14}{7} = \frac{50}{7}$$

$$\frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$$

$$4x^4 - 4y^4 + x^2 - y^2 + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$\begin{aligned} & (2x^2)^2 - (2y^2)^2 + (x^2 - y^2) \\ & 4(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$5x^{\frac{1}{2}} - 5y^{\frac{1}{2}} = 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$(m-6)(m+2)$$

$$m = n + 4$$

$$A = (m-n)^2 - 9(m-n) =$$

$$= (m-n)(m-n-9)$$

$$mn(m-n+3)$$

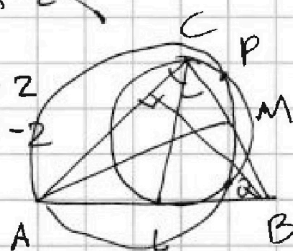
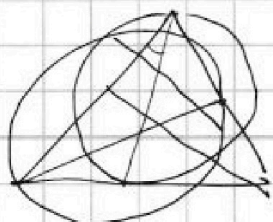
$$\text{пусть } m > n \quad X = x^4, y = y^4$$

$$m \text{ равно } > n$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$(n+7)(n-3) = 0$$

$$n = -7$$



$$\begin{aligned} & 13 \cdot 2^2 \\ & 3 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 81 \quad 81 \\ & 48 \\ & 129 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \quad A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

a) пусть  $A = 13p^2$ ,  $B = 3q^2$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$3q^2 : n, q - \text{простое} \Rightarrow n \in \{1, 3, q, 3q, q^2, 3q^2\}$$

1) Если  $n=1$ :

$$\begin{cases} (m-1)(m-10) = 13p^2 \\ m(m-4) = 3q^2 \end{cases}$$

Если  $m$  - четное, то  $q:2$  ( $3q^2:m \Rightarrow q:2$ ), а значит  $q=2$

(2 - единственное простое :2).  $m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow m \in \{-2; 6\}$

-2 отрицательное, не натуральное. Если  $m=6$ , то  $13p^2 = 5 \cdot (-4) < 0$ ,

противоречие. Тогда  $m$  - нечет, но  $m-1:2 \Rightarrow p=2$  (аналог.  $q$ )

$$m^2 - 11m + 10 = 52, \quad m^2 - 11m - 42 = 0$$

$$x+6+5-x+25$$

$$-2\sqrt{30-x+x^2} - 10\sqrt{5-x} + 10\sqrt{x+6} = 4\sqrt{30-x-x^2}$$

$$n^2 + m^2 + 25 - 2nm - 10n + 10m = 4n^2m^2 \quad m + 2nm - 4nm - n + 4 + 1$$

$$m(1-2n) = n-5$$

$$21 \text{ нечет} \quad m - m + 5 = 2nm$$

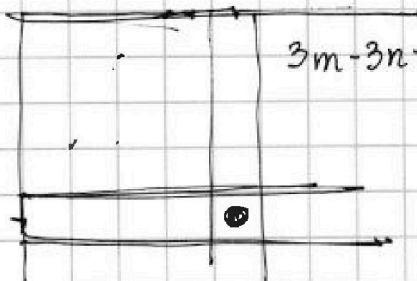
$$\text{коро } C_{21}^2 / 4? \quad \uparrow 2 \downarrow 1$$

$$m - 2nm - n + 5 = 0$$

$$3m - 2m - 3n + 2n - 2nm + 3 + 2$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$



$$3m - 3n + 3 - 2nm - 2m + 2n + 3n + 5 = 2nm$$

$$n - 2nm + m + 5 = 0$$

$$5 = 2\sqrt{nm} - \sqrt{n} - \sqrt{m}$$

$$25 = 4nm + n + m$$

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 30 \\ (X+6)(X-5) \end{aligned}$$

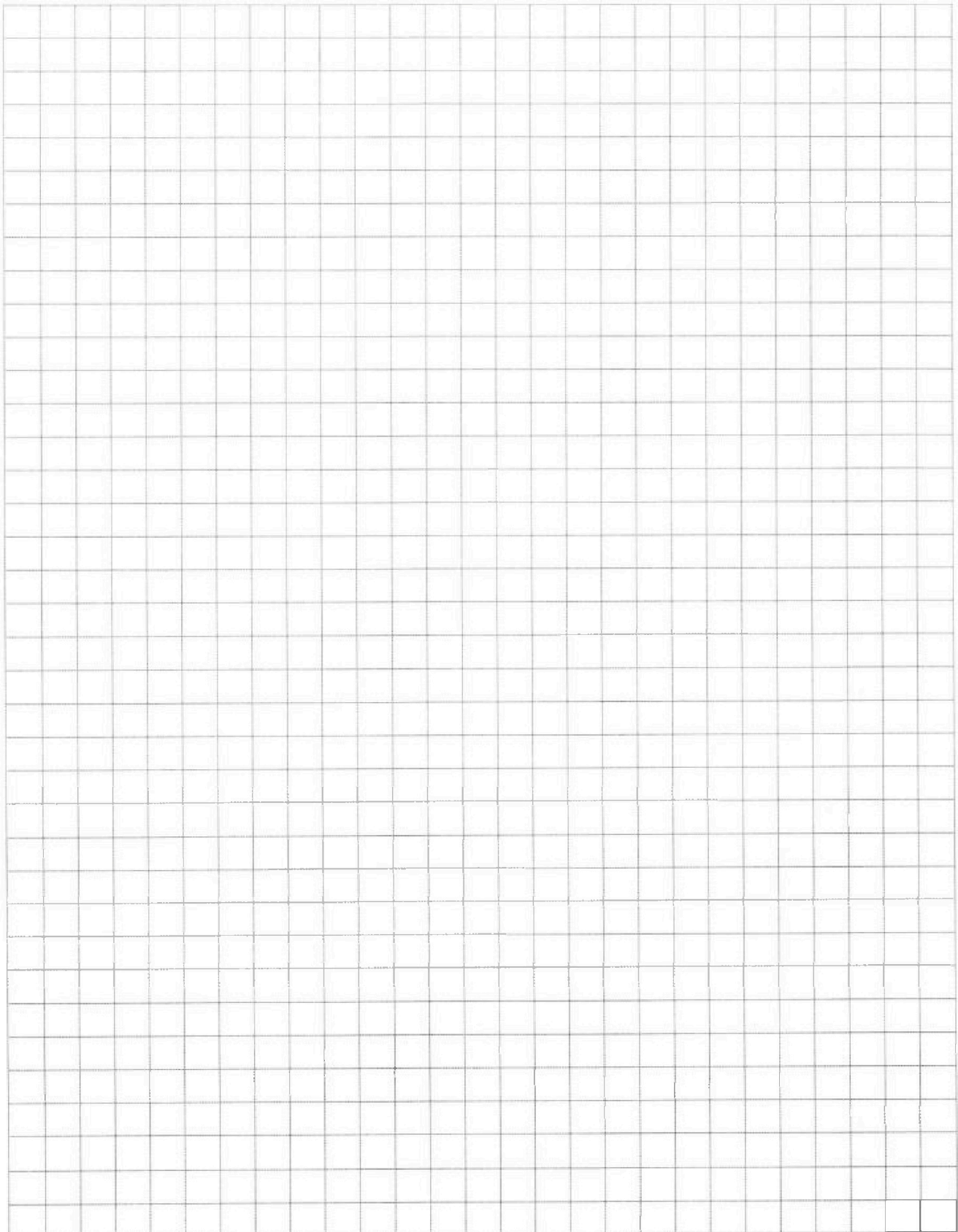


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

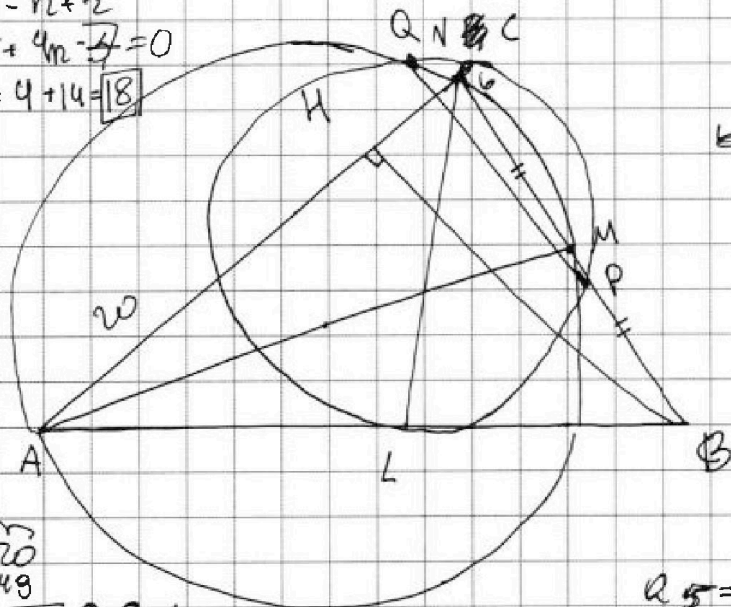
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Лорча QR-кода недопустима!

$$m = n + 2$$

$$2n^2 + 4n - 4 = 0$$

$$P/q = 4 + 14 = 18$$



$$b = -2 - 2 - 3 = -7$$

$$a_1 = 12 + 18 + 28 = 58$$

$$12 + 18 = 30$$

$$58 - 28 = 30$$

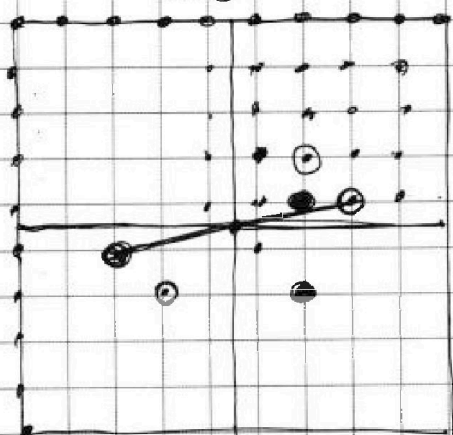
$$(4 - 8)^2 = 16$$

$$b = -2 - 2 - 3 = -7$$

$$a = 12 + 18 + 28 = 58$$

$$\frac{120}{49} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2$$

$$22 \cdot 3$$



$$a_5 = 58 - 28 = 30 \checkmark$$

$$a_7 = 58 - 42 = 16 \checkmark$$

$$a_{18} = 58 - 70 = -12 \checkmark$$

$$n^2 + m^2 - 2nm + m - n - 6 = 0$$

$$m^2 - mn - 2m - 2nm + n^2$$

$$m - n = 2$$

$$(m - n - 2)$$

$$\frac{1}{2} + 3\sqrt{2} \quad 5$$

$$3\sqrt{2} \quad 4.5$$

$$(m - n - 2)(m - n + 3) =$$

$$= m^2 - mn - 3m - nm + n^2 + 3n - 2m + 2n + 6 =$$

$$= m^2 - 2nm + n^2$$

$$(m - n - 2)(m - n + 3) =$$

$$= m^2 - mn + 3m - mn + n^2 - 3n - 2m$$

$$+ 2n - 6 =$$

$$= m^2 + n^2 - 2mn + m - n - 6$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 4 \\ \hline 116 \\ 117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 116 \quad 4 \\ 8 \quad 29 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$n \cdot n = \sqrt{x+6}$$

$$m = \sqrt{5-x}$$

$$n^2 = x - 6$$

$$m^2 = 5 - x$$

$$n^2 + m^2 = 11$$

$$n - m + 5 = 2nm$$

$$n^2 + m^2 - 2nm + m - n + 5 - 11 = 0$$

$$(m - n)^2$$

$$(m - n)(m - n + 1) = 6$$