



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1: $\{a_n\}$ - ариф. прогр., $\text{max} = 6$

$$a_4 = 6 - 3d$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$a_6 = a_4 + 2d$$

$$a_{10} = a_6 + 4d \Rightarrow 2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$\Rightarrow 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

коэффициент $x=1$ подходит

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

$x=1$ тоже подходит

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x-1$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ \underline{-x^2 - 2x + 4} \\ - 2x^2 - 2x + 4 \end{array} \mid \begin{array}{r} x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

$$ - 2x^2 - 2x + 4$$

$$ \underline{-2x^2 + 2x} $$

$$ - 4x + 4$$

$$ \underline{-4x + 4}$$

$$ 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

~~Ответ: $x = 1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$~~

$$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $x = 1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Найти наиб. знач. $6x + 3y$, при $\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$ рассмотрим кр-ва с модулем как систему

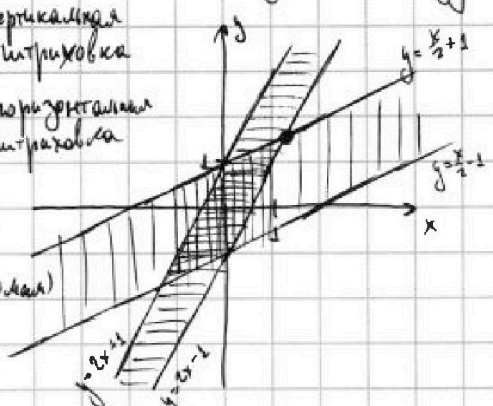
$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq 2x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{вертикальная} \\ \text{штриховка} \\ \text{горизонтальная} \\ \text{штриховка} \end{matrix}$$

изобразим это на графике

$$y = \frac{x}{2} - 1 \text{ (прямая)}; \quad y = \frac{x}{2} + 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	2
y	-1	0

x	0	2
y	1	0



$$y = 2x - 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	1
y	-1	1

$$y = 2x + 1 \text{ (прямая)}$$

x	0	-1
y	1	-1

Место пересечения штриховки является множеством решений системы

$6x + 3y$ будет наибольшим, когда x и y принимают наибольшие значения. Из графика видно, что среди решений системы существует точка с наибольшим возможным значением x и y . Это точка пересечения $y = 2x - 1$ и $y = \frac{x}{2} + 1$. Найдем ее:

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$4x - 2 = x + 2$$

$$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 6x + 3y = 6 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{5}{3} = 8 + 5 = 13 \quad \text{Это точка } \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (m, n) - натуральные числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Одно из них $11p^2$, а другое $75q^2$, где p и q - простые числа

1) Пусть $A = 11p^2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n-7 : 11 \\ m+2n : 11 \end{cases}$ Одновременно они делятся на 11 не могут, т.к. разница их разности: 11 $\Rightarrow 7 : 11$, это неправда

1. $m+2n : 11$

\Rightarrow рассмотрим, какая из скобок $: p$ и p^2

1. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n = 11p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 1$ (иначе $A \neq 11p^2$) \Rightarrow
 $\Rightarrow m+2n = 8 \Rightarrow m+2n \not\equiv 11 \Rightarrow \text{нельзя}$

2. $\begin{matrix} m+2n : p \\ m+2n-7 : p \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m+2n - (m+2n-7) : p \\ \Rightarrow 7 : p \Rightarrow p = 7 \text{ (} p \text{ простое число)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{н.к. } A = 11p^2, \text{ то } m+2n = 11p \\ m+2n-7 = p \Rightarrow \begin{matrix} m+2n = 77 \\ m+2n = 14 \end{matrix} \Rightarrow \text{нельзя}$

3. $\begin{matrix} m+2n-7 : p^2 \\ (m+2n) : p \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m+2n = 11 \\ \Rightarrow m+2n-7 = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 44 \end{matrix}$

\Rightarrow при $m+2n = 11$ число A будет цел. попробуем все пары натуральных m и n : $m+2n = 11$ и проверим подойдут ли B по условию.

$(1; 5) \Rightarrow B = 1 \cdot 5 \cdot (1+10+9) = 100 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(3; 4) \Rightarrow B = 3 \cdot 4 \cdot (3+8+9) = 20 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(5; 3) \Rightarrow B = 5 \cdot 3 \cdot (5+6+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow B = 75 \cdot 4 \rightarrow \text{подходит}$

$(7; 2) \Rightarrow B = 7 \cdot 2 \cdot (7+4+9) = 7 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow \not\equiv 75$

$(9; 1) \Rightarrow B = 9 \cdot 1 \cdot 20 \Rightarrow \not\equiv 75$

2. $m+2n-7 : 11$ 1. $m+2n-7 : p^2 \Rightarrow m+2n = 1 \Rightarrow m+2n-7 = -6 \Rightarrow \text{нельзя}$

2. $\begin{matrix} m+2n-7 : p \\ m+2n : p \end{matrix} \Rightarrow p = 7 \Rightarrow \begin{matrix} m+2n-7 = 77 \\ m+2n = 7 \end{matrix} \Rightarrow \text{нельзя}$

3. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = p^2 = 18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow \text{нельзя}$

Нельзя найти разобран



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

2) Пусть $b = 11p^2$
 $b = m \cdot n (m+2n+g)$

1. $m=1: n(2n+10) = 11p^2$
 $2n(n+5) = 11p^2 \Rightarrow p^2 : 2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow p^2=4$
 $\Rightarrow n(n+5) = 22; n^2+5n-22=0; D=25+88=113$
 Очевидно, что натуральных корней нет

2. $n=1: m(m+1) = 11p^2$

пусть $m \neq 11 \Rightarrow m+1 \neq 11 \Rightarrow m \neq 11 \Rightarrow \frac{m}{11} \Rightarrow \frac{1}{11}$

пусть $m : 11 \Rightarrow m+1 : 11 \Rightarrow 11 : 11^2 \Rightarrow b = 11^3 (p=11)$

$m(m+1) = 11^3$ решить в натуральных числах

1	11 ³
11	11 ²
11 ²	11
11 ³	1

Очевидно, что ни в одном случае решений нет

3. $m+2n+g=1$ — это невозможно, т.к. $m, n \in \mathbb{N}$

\Rightarrow все множители $> 1 \Rightarrow \forall$ из них это ~~то~~ ^{или} 11, p или p
 т.к. $n, m \in \mathbb{N}$, то $m+2n+g > m, n \Rightarrow m+2n+g=11$
 $m+2n=2$

но при $m=1, n=1: m+2n=3$, то $g=2 \Rightarrow$ нет решений

другой разбор.

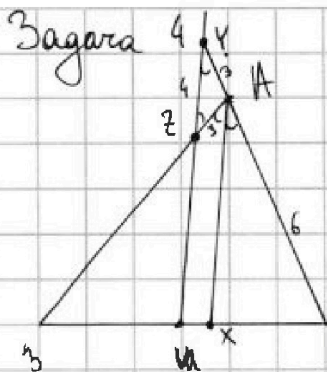
Ответ: (5; 3)



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$; $AX \perp BC = a$; $(1) \angle A - \text{пр. } \angle C$; $Z \in AX$;
 $(2) Z \in AC$; $(3) Y \in AC$; $AC = 6$; $AZ = 3$; $YZ = 4$

Найти: BC

Решение: 1) $AX \perp BC = a \perp BC$ (ум.) $\Rightarrow \angle BAX = \angle XAC$
 $AX \parallel YZ$ (ум.) $\Rightarrow \angle YZC = \angle XAC$ (соотв. YA -секундар.) (об-во \parallel прям.)
 $\angle YZA = \angle ZAX$ (накрест. леж.; ZA -секундар.)

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle YZA \Rightarrow \triangle YZC - \text{пр. } \triangle$ (по двум уг.) $\Rightarrow AZ = AY = 3$ (ум. 3 отпр.)

2) $AX \parallel YZ$ (ум.) \Rightarrow по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC}{YA} = \frac{XC}{XZ} = \frac{2}{1} \Rightarrow XC = 2XZ$$

$$XC + XZ = CZ = \frac{1}{2} BC \Rightarrow XZ = CZ = \frac{1}{2} BC = 7$$

$$\frac{AZ}{YZ} = \frac{AZ}{XZ} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{XZ} \Rightarrow XZ = 4 \Rightarrow AZ = 12$$

3) Пусть $XZ = y \Rightarrow$ (из н. 2) $XC = 2y$; $BX = 4y$; $BC = 6y$

Уравнение Пифагора: $AX^2 = AB \cdot AC - BX \cdot XC = 72 - 8y^2$

4) $AX \parallel YZ$ (ум.) $\Rightarrow \triangle YZC \sim \triangle XZC$ (по лемме о подобии) $\Rightarrow \frac{AX}{YZ} = \frac{12}{4} = \frac{4}{1}$
 $\frac{AX}{YZ+4} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$
 в.н. логич.

$$\Rightarrow \frac{2X+4}{2X} = 2 \Rightarrow 2X+4 = 2 \cdot 2X$$

$$2X = 4 \Rightarrow AX = \frac{16}{3}$$

5) $AX^2 = 72 - 8y^2$ (н. 3) $\Rightarrow 72 - 8y^2 = \frac{256}{9}$
 $AX = \frac{16}{3}$ (н. 4) $\Rightarrow 8(9 - y^2) = \frac{256}{3} \Rightarrow 9 - y^2 = \frac{32}{3}$; $9y^2 = 81 - 32$
 $9y^2 = 49 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$
 $\Rightarrow y^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$ (н. 3) $\Rightarrow BC = 6y = \frac{6 \cdot 7}{3} = 14$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} & (1) \\ x^3+3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ограничения: в системе есть $\sqrt{2x}, \sqrt{2y}, \sqrt{7-x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$$

(2) $x^3+3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$ $x, y \geq 0$ (из ограничений)
 Очевидно, что $f(x) = x^3+3x + \sqrt{2x}$ строго возрастает на $x \in [0; +\infty)$

$\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x \in [0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = y$ (т.к. \forall знак аргумента соотв. только одно значение q -знач)

(1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$ ($0 \leq x \leq 7$)

1) Пусть $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t \Rightarrow t^2 = x+2 + 7-x - 2\sqrt{14+5x-x^2}$
 $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$

2) $t+7 = 9-t^2, t^2+t-2=0$
 $\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$

~~2-й шаг замена~~
 $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \\ 0 \leq x \leq 7 \end{cases}$

3) Обратная замена: 1. $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-1 \Rightarrow$ ($0 \leq x \leq 7$)
 $14+5x-x^2 = 16$

$x^2-5x+2=0; D=25-8=17$

$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ ($x > 0; \sqrt{17} < \sqrt{25} = 5 \Rightarrow x < \frac{5+5}{2} = 5 < 7$)

$x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ ($5 > \sqrt{17} \Rightarrow x > 0; 5 < 7 \Rightarrow x < 7$)

\Rightarrow решения $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}); (\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2})$

2. $2\sqrt{14+5x-x^2} = 5$ ($0 \leq x \leq 7$)

$4(14+5x-x^2) = 25$

$4x^2 - 20x - 31 = 0; D = 400 + 484 = 884 = 16 \cdot 55 \Rightarrow x = \frac{20 \pm 2\sqrt{55}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{55}}{2}$

$x = \frac{5+\sqrt{55}}{2}; \sqrt{55} < \sqrt{64} = 8 \Rightarrow x < \frac{5+8}{2} = 6,5 < 7 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{55}}{2} > 0 \Rightarrow x > 0$

$y = \frac{5-\sqrt{55}}{2}; 5 \neq \sqrt{25} < \sqrt{55} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ не подходит

\Rightarrow Решения: $(\frac{5+\sqrt{55}}{2}; \frac{5+\sqrt{55}}{2})$

$(\frac{5+2\sqrt{14}}{2}; \frac{5-2\sqrt{14}}{2})$

Ответ: $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}); (\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2});$ ~~$(\frac{5+\sqrt{55}}{2}; \frac{5+\sqrt{55}}{2})$~~ ~~$(\frac{5+2\sqrt{14}}{2}; \frac{5-2\sqrt{14}}{2})$~~



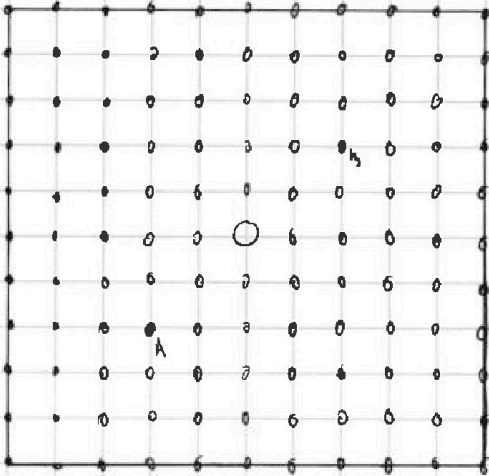
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6



Всего узлов $(10+1)(10+1) = 121$ штука

\Rightarrow всего способов выбрать 2 узла из них

$C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2}$ - это количество раскрасок, которые могут отличаться друг от друга на поворот, но не совпадают изначално

Если 2 узла сетки лежат на ^{одинаковой} расстоянии до центрального узла (обозначен

большими кружками) и ~~лежат соседстве~~ на одной прямой с ним (все три точки на одной прямой) - например как точки a и b на рисунке - то при повороте на 180° ~~они перейдут~~ a и b ~~будут все остальные расстояния~~ ~~они перейдут~~ ~~а b - в ст.~~ Если a и b не подходят под описание выше условия, то ~~нет~~ нет такого поворота, при котором ~~узлы~~ переходят друг в друга (кроме этого нулевого поворота на 180° и симметрии отк. центра вращения, т.е. центрального узла).

\Rightarrow ~~Почему~~ ~~симметричные~~ отк. центра вращения при повороте C_{121}^2 дают по 2 раскраски в обн. число (от 2 с ними совпадают, всего раскрасок, которые дают 2 точки - 4, т.е. 4 поворота: на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$). Остальные пары точек дают по 4 раскр. в обн. число. Ответ будет суммарное кол-во пар.

Посчитаем количество пар, которые дают по 2 раскраски. Это несложно сделать по рисунку (разными парами считаются пары, у которых хотя бы один будет узел разный) \Rightarrow их 36 но если любую из них повернуть на 90° , то получится пара, которая тоже входит в эти 36, \Rightarrow в соотв. с усл. задачи эти 36 пар дадут 18 различных раскрасок.

$\Rightarrow C_{121}^2 - 36 = 7224$ пар, которые дают по 4 раскраски \Rightarrow различные из них $\frac{7224}{4} = 1806 \Rightarrow$ всего раскр. $1806 + 18 = 1824$ Ответ: 1824 разн. раскрасок

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение

①

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 4x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 6}{2} = a_5 = 6 - 9x + d$$

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$a_4 > a_6 > a_{10}$$

$$6 - 9x > 9x^2$$

$$\begin{cases} 6 - 9x > x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ 6x^4 - 4x^3 + 4x^2 > 9x^2 \end{cases}$$

$$9x^2 + 9x - 6 < 0$$

$$-3 \Rightarrow d = 2$$

$$x^2(x-5)(x+1) > 0$$

$$\sqrt{33} < 6$$

$$D = 9 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 33$$

$$\frac{1}{9}$$

$$x > 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$$

$$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$$

$$x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

$$d < 0; \text{ но } a_{10} > 0$$

$$\Rightarrow 6 - 9x + 6d = 9x^2$$

$$x = -1: a_4 = 15$$

$$a_6 = 9$$

$$a_{10} = 9$$

$$6 - 9x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 9x - 6) = 9x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x = 1: 1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^4 - 2x^3 + x^2 & \end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$x^2 - 2x - 4$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$\frac{56}{4} = 14$$

$$-2x^3 + 16x$$

$$-2x^3 + 4x^2 - 2x$$

$$-4x^2 - 8x - 4$$

$$\begin{array}{r|l} 896 & 57 \\ \hline 57 & 156 \\ \hline 326 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 896 & 16 \\ \hline 80 & 56 \\ \hline 96 & 96 \end{array}$$

$$56 = 8 \cdot 7 =$$

$$16 \cdot 4 = 64 = 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^2 + 3x - \sqrt{2x} = y^2 - \sqrt{2y} + 3y \end{cases}$$

$$x^2 + 3x + \sqrt{2x} = y^2 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$$

это же строго возр. ф-ция
($x > 0; y > 0$)

$$\Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (x+2)(7-x) = 14+5x-x^2$$

$$\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2}{2\sqrt{14+5x-x^2}} = \frac{x+2+7-x-2\sqrt{14+5x-x^2}}{2\sqrt{14+5x-x^2}} = -\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2}{2\sqrt{14+5x-x^2}} + 9$$

$$\frac{121}{220} = \frac{121}{220}$$

$$\begin{array}{r} 7260 \\ - 24 \\ \hline 7224 \end{array}$$

$$9 - t^2 = t + 7 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2)\sqrt{x+2} &= 1 + \sqrt{7-x} \\ x+2 &= 1 + 2-x + 2\sqrt{7-x} \\ x\sqrt{2+7-x} + 2\sqrt{14+5x-x^2} &= 1 \\ 2\sqrt{14+5x-x^2} &= 3 \\ 14+5x-x^2 &= 16 \\ x^2-5x+2 &= 0 \\ D &= 25-8=17 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 7224 \quad 1806 \\ \hline 4 \\ \hline 1806 \\ + 18 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Кр. миним.

$$\begin{aligned} a_1 &= 6-4x \\ a_2 &= (x^2-2x)^2 \\ a_3 &= 4x^2 \\ x &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x-6 &: 6 \\ 3x^2+3x-2 &: 2 \\ 3x(x+1) &: 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x^2-4x^3-5x^2 &: 4 \\ x^4-4x^3-5x^2 &: 4 \\ x^2(x+1)(x-5) &: 4 \\ D &= 1+4-25 = -20 \end{aligned}$$

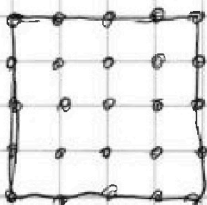
$$x^2-4x-5$$

$$\begin{cases} 3x^2+3x-6 = 6d \\ x^4-4x^3-5x^2 = 4d \end{cases}$$

$$x^4-4x^3+4x^2+3x-6 = 4d \quad 1) x:2; 2) x:2; 3) x:4$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33+24d}}{6}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ + 250 \\ \hline 300 \end{array}$$



$(a+1)^2$ 1) Крайних центральных: 4 ст.

2) Если точки переходят друг к другу (все) или какой-то стороне, то точек 2 со стороны раскр. \rightarrow таких пар 12

3) Если нет, то 4
 $C^2 = \frac{25-24}{2}$ м. выбрать 2 точки (с внутр. раскр.)

$$\begin{aligned} 300 - 24 &= 276 \\ \frac{276}{4} &= 69 \end{aligned}$$



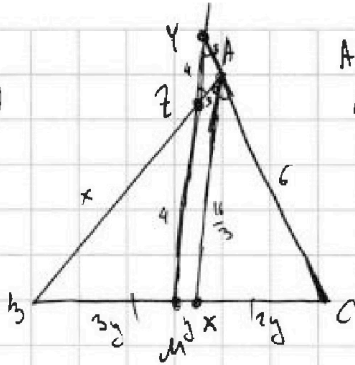
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$AC = 6$$

$$AZ = 3$$

$$YZ = 1$$

$$\frac{BM}{MX} = \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$$BM = xy; MX = 3y \Rightarrow h_x = (x+3) \cdot y$$

$$\frac{h_x}{XC} = \frac{BA}{AC} = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{256}{y} = 8(9-y)^2$$

$$32 = 81 - 3y^2; y^2 = 49; y = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow h_c = 6y = 7 \cdot 2 = 14$$

$$\therefore 6h_x = (x+3) \cdot XC; 6y(x+3) = (x+3) \cdot XC$$

$$\Rightarrow XC = 6y$$

$$AX^2 = 12 \cdot 6 - 8y^2 = 8(9-y^2)$$

$$h_c = (x+y) \cdot y$$

$$\frac{AX}{2M-4} = \frac{2}{3}; \frac{AX}{2M} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3AX = 2M+8 \Rightarrow 2M = 4$$

$$3AX = 2M+8 \Rightarrow AX = \frac{16}{3}$$

$$AX^2 = AB \cdot h_c - BM \cdot XC = 6x + 18 - y^2(6x+18) = 6(x+3)(1-y^2)$$

$$\frac{h_c}{MX} = \frac{y}{2}$$

$$\frac{AX}{yM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3AX}{2} = 4+2M \quad \frac{AX}{2M} = \frac{x+3}{x}$$

$$p = \frac{6+6}{2} = 6$$

$$S_{Azy} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

$$AX \cdot yM : \frac{1}{2}(AX + 2M + 4) \cdot h = \frac{1}{2}(AX + 2M) \cdot h + S_{Azy}$$

$$\frac{XC}{XC+XM} = \frac{2}{3}; \frac{y-z}{y} = \frac{2}{3}$$

$$(AX + 2M + 4)h = (AX + 2M) \cdot h + 4\sqrt{5}$$

$$\frac{h_c}{h_c+X} = \frac{3}{4}; \frac{y}{y+z} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2(2M+4)}{32M} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 2x(2M+4) = 32M \cdot x + 972M$$

$$2M \cdot x + 8x - 32M = 0$$

$$2M = \frac{8x}{3-x}$$

$$2M = \frac{8x}{x+8}$$

$$\frac{y-z}{y+z} = \frac{1}{2}$$

$$AX = \frac{\frac{16x}{x+8} + 8}{3} = \frac{24x+72}{3(x+8)} = \frac{8x+24}{x+8} = \frac{8(x+3)}{x+8}$$

$$x = y \Rightarrow h_c = 12$$

$$\frac{XC}{MX} = \frac{2}{1}; \frac{h_c}{MX} = \frac{3}{1}$$

$$6(x+3)(1-y^2) = \frac{64(x+3)^2}{(x+8)^2}$$

$$6(x+8)^2(1+y^2) = 64(x+3)$$

$$3(x+8)^2(1+y^2) = 32(x+3)$$

$$\frac{MX}{3} = \frac{XC}{6} \quad \frac{XC}{6} = \frac{h_c}{x} \quad \frac{MX}{XC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2MX = MC; MX = \frac{1}{3} h_c$$

$$\frac{MX}{3} = \frac{h_c}{x} \quad \frac{MX}{x} = \frac{h_c}{3x} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $m+2n-7 : 11$

$(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$

$m+2n-7 : p^2 \rightarrow \downarrow (m+2n=1)$

$m+2n-7 : p \Rightarrow p=7$ (оба: $p \Rightarrow p-18 : p$)

$\Rightarrow m+2n-7=77 \rightarrow \downarrow$
 $m+2n=7$

$m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n-7=11$
 $m+2n=18 = p^2 \rightarrow \downarrow$

* $mn(m+2n+9) = 11p^2$

1) $m=1: n(2n+10) = 11p^2$

$2(n+5) \cdot n = 11p^2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n(5+n) = 22$
 $2 \cdot 11 \rightarrow \downarrow$

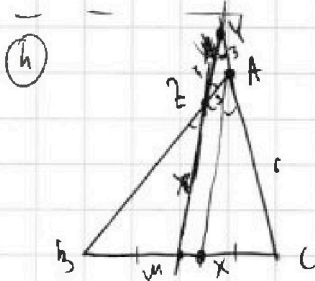
$$\begin{array}{r} \times 121 \\ \times 11 \\ \hline 1331 \\ + 1331 \\ \hline 15541 \\ \hline 1 \Rightarrow 1 \end{array}$$

2) $n=1: m(m+1) = 11p^2$

\Rightarrow оба: 11 или оба / $\Rightarrow m:11 \Rightarrow m+1:11$
 $\Rightarrow m(m+1) = 11^2 \rightarrow \downarrow$

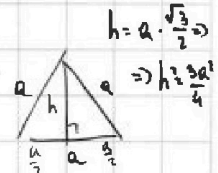
3) $m+1, n+1 \Rightarrow$ при m, n и n $11, p^2, p, m+2n+9 > m, n \Rightarrow$

$m+2n+9=11$ (оба /)
 $\Rightarrow m+2n+9=11 \Rightarrow m+2n=2$
 $m=n=p$



$AC=6; AZ=3; AZ=4$
 $BC=? \quad XC=4$

$\frac{XC}{AX} = \frac{ZA}{AZ} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow AX = \frac{AZ \cdot XC}{ZA} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$
 $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$



$\frac{AZ}{CX} = \frac{AX}{XZ}$

$\frac{2}{3} = \frac{AX}{4+X}$
 $AX = \frac{8+2X}{3}$

$\frac{AZ}{XC} = \frac{AZ}{AX} = \frac{3}{4}$
 $\frac{3}{4} = \frac{3}{2(X+4)} = \frac{3X}{2(X+4)} = \frac{3X}{2X}$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ \times 4 \\ \hline 196 \\ \hline 56 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 6 \\ \times 6 \\ \hline 36 \\ \hline 36 \end{array}$$

$AX^2 = AC \cdot AZ - 3X \cdot XC$

$AX = \frac{8+2X}{3}$

$AX^2 = \frac{6 \cdot (8+2X)}{3}$

$\frac{386}{4} = 2,28$

$2X \cdot AZ + 8AZ = 8X + 3X \cdot AZ$

$X \cdot AZ - 8AZ + 3X = 0$

$AZ = \frac{-9X}{X-8} = \frac{3X}{8-X} \Rightarrow AB = \frac{3X}{8-X} + 3 = \frac{6X+24}{8-X}$

$\frac{228}{4} = 57$

$\frac{57}{3} = 19$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ \times 16 \\ \hline 186 \\ \hline 31 \\ \hline 31 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 14 \\ \times 4 \\ \hline 196 \\ \hline 56 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① *Сурдолог*

mm

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

$a_4 = 6 - 9x$

$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$a_{10} = 9x^2$

$\frac{9x^2}{2} = 3^2$

$a_6 = a_4 + 2d$

$a_{10} = a_6 + 4d$

$a_{10} = a_4 + 6d$

$9x^2 = 6 - 9x + 6d$

$3x^2 + 3x - 2 - 2d = 0$

$D = 9 + 3 \cdot 4 - 2(1+d) = 9 + 24 + 24d = 33 + 24d$

$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4d$

$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4d = 0$

$x^4 - 4x^3 + 4x^2$

② $\max (3y + 6x) = 3(y + 2x)$

$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$

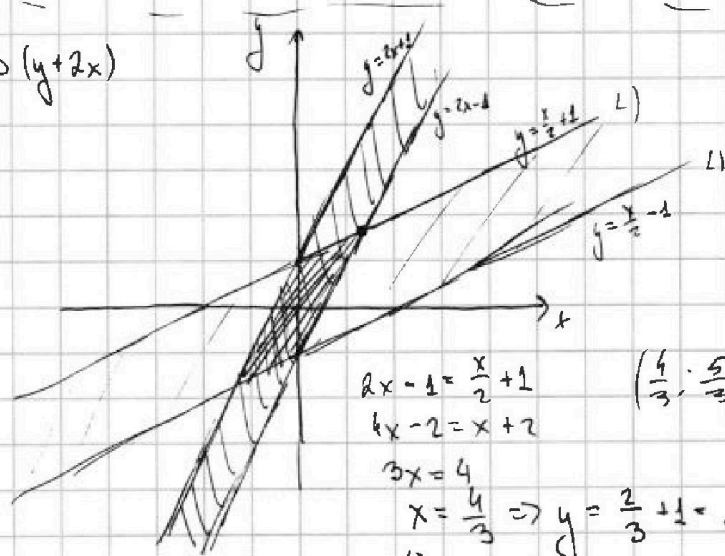
$-2 \leq x - 2y \leq 2$

$\begin{cases} -2 \leq x - 2y \\ 2 \geq x - 2y \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leq 2x - y \\ 1 \geq 2x - y \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$



$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1 \quad \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

$4x - 2 = x + 2$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

$3 \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3} \right) = 13$

③ $(m, n) \in \mathbb{N} \quad A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2m^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

Одно (1 p), другое 75 q² (p, q - простые) $75 = 5 \cdot 15 = 25 \cdot 3$

1) $A = 11p^2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n : 11 \\ m+2n-7 : 11 \end{cases}$ (оба факт не могут)

2) $m+2n : 11 \Rightarrow x = 11, 22, 33, 44, \dots$
 так $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n-7 : 1 \Rightarrow y$
 $m+2n : p \Rightarrow p=2$
 $m+2n=7 \Rightarrow m+2n-7=0 \Rightarrow y$
 $m+2n-7 = p^2 \quad m+2n-7=4 \Rightarrow p=2$
 $m+2n=11$

$\{m+2n=11$ (каждо проверить B, сразу же исключено)