



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_1 + 4q = 6x + 18$$

$$a_7 = a_1 + 6q = (x^2 - 4x)^2$$

a_1 - первый член арифметической прогрессии

q - разность арифметической прогрессии

$$a_{11} = -3x^2$$

Т.к. $a_7 > 0$, а $a_{11} < 0$, $q < 0$ гарантированно

Найдем из a_7 и a_{11} 9-й член прогрессии:

$$a_9 = \frac{a_7 + a_{11}}{2} = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

Найдем из a_9 и a_5 7-й член прогрессии:

$$a_7 = \frac{a_9 + a_5}{2} = \frac{\frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2} + 6x + 18}{2} = (x^2 - 4x)^2$$

Тогда:

$$(x^2 - 4x)^2 - 3x^2 + 12x + 36 = 4(x^2 - 4x)^2$$

$$-3x^2 + 12x + 36 = 3(x^2 - 4x)^2 \quad | :3$$

$$-x^2 + 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \begin{matrix} t_1 = -4 \\ t_2 = 3 \end{matrix}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 3} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Проверим найденные корни:

при $x = 2$: $a_5 = 30 \Rightarrow q = -7 \Rightarrow a_{11} = a_7 - 28 = -12 = -3x^2$ - верно

при $x = 2 + \sqrt{7}$: $a_5 = 30 + 6\sqrt{7}$
 $a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q = \frac{9 - 30 - 6\sqrt{7}}{2} = \frac{-21 - 6\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow a_{11} = a_7 + 4a_9 = 9 - 2(21 + 6\sqrt{7}) = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$a_{11} = -3(2 + \sqrt{7})^2 = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -3(11 + 4\sqrt{7}) = -33 - 12\sqrt{7} \rightarrow$$

\Rightarrow верно

$$\text{при } x = 2 - \sqrt{7} : \begin{matrix} a_5 = 30 - 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{matrix} \rightarrow a_9 = \frac{9 - 30 + 6\sqrt{7}}{2} = \frac{-21 + 6\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 9 + 2(-21 + 6\sqrt{7}) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$$a_{11} = -3(2 - \sqrt{7})^2 = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7} \Rightarrow \text{верно}$$

Ответ: $\{2; 2 \pm \sqrt{7}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

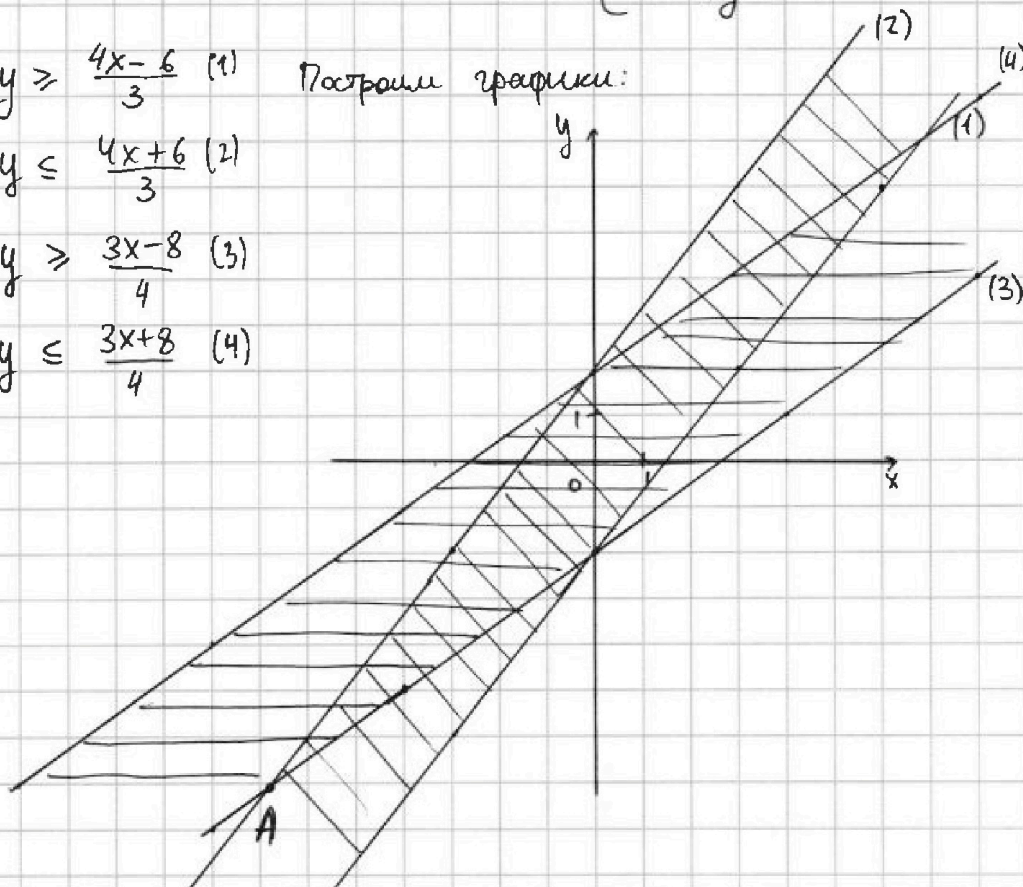
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y \leq 6 \\ 4x-3y \geq -6 \\ 3x-4y \leq 8 \\ 3x-4y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4x-6}{3} & (1) \\ y \leq \frac{4x+6}{3} & (2) \\ y \geq \frac{3x-8}{4} & (3) \\ y \leq \frac{3x+8}{4} & (4) \end{cases}$$

Построим графики:



$14x + 7y$ минимально при минимальных x и y
Из графика найдем минимальное решение системы (и по x , и по y), это т. А

Видно, что это точка пересечения прямых $y = \frac{4x+6}{3}$ и $y = \frac{3x-8}{4}$.
Найдем x_A и y_A - координаты т. А.

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} \quad ; \quad y = \frac{4x+6}{3} = \frac{-4 \cdot 48}{7} + 6 = \frac{-4 \cdot 48 + 42}{21} = \frac{-50}{7} \approx -7$$

$$\begin{aligned} 16x+24 &= 9x-24 & \text{Тогда } 14x+7y &= \frac{-14 \cdot 48}{7} - \frac{7 \cdot 50}{7} \\ 7x &= -48 & &= -2 \cdot 48 - 50 = -146 \end{aligned}$$

$$x = -48/7 \approx -7 \text{ как} \\ \text{и по графику}$$

Ответ: -146



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

т.к. ни A , ни B не равны 0, $m \neq n$, т.к. $(m-n)$ - делитель A

I. Пусть $A = 13p^2$; $B = 3q^2$

Тогда $(m-n)(m-n+9) = 13p^2$, а $mn(m-n+3) = 3q^2$

или $\begin{cases} m = m-n+3 = q \\ n = 3 \\ m = m \end{cases}$ или $\begin{cases} m = 3 \\ n = m-n+3 \\ \downarrow \\ n = 6-n \\ n = 3 \rightarrow \text{не годит.} \\ \text{т.к. } m \neq n \end{cases}$

Подставим в A m и $n=3$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$(m-3)(m+6) = 13p^2$$

Тогда или ~~$m-3=13$~~ $m-3=13$ или $m+6=13$

$$m=10$$

$$m+6=16=p^2$$

$$p = \pm 4 - \text{не годит.}$$

т.к. p - простое

$$m=7$$

~~$m-3=4=p^2$~~

$$p = \pm 2 - \text{годится.}$$

$$p=2$$

II. Пусть $B = 13p^2$; $A = 3q^2$

Тогда $mn(m-n+3) = 13p^2 \Rightarrow$ или $\begin{cases} m = m-n+3 = p \\ n = 13 \\ m = m-10 - \text{не годит.} \end{cases}$ или $\begin{cases} n = m-n+3 = p \\ m = 13 \\ n = 16-n \\ n = 8 \end{cases}$

Подставим $m=13$ и $n=8$ в A

$$(m-n)(m-n+9) = (13-8)(13-8+9) = 5 \cdot 14 = 5 \cdot 2 \cdot 7 \neq 3q^2 \Rightarrow$$

не годится

Ответ: $(7; 3)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC = 2(a+b) = 2 \cdot 38 = 68 = 6 \cdot 7/3 = 14$$

Ответ: 14

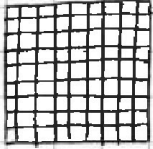


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $10 \cdot 10 = 100$

сначала
Пусть мы выбираем какую-нибудь точку (узел),
а потом считаем способы выбрать ей вторую
точку.

~~Выбор первой точки~~

Данный квадрат можно повернуть 4-мя способами, то есть
каждую раскраску мы посчитали 4 раза

Способов выбрать первую точку - 100 $\Rightarrow \frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99 = 2475$
Способов выбрать вторую точку - 99

Ответ: 2475

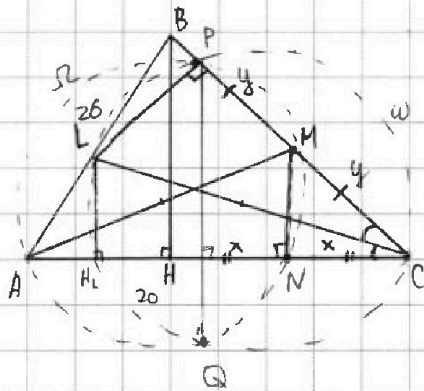


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{l|l} AB=26 & AC=? \\ AN=20 & BC=? \end{array}$$

1. Проведем высоту LH_1 . Точка H_1 принадлежит ω , т.к. $\angle LH_1C$ опирается на CL

2. Также MN - высота, т.к. $\angle MNA$ опирается на диаметр AM , $N \in AC$

3. Т.к. AM - медиана BC , $HN=NC=x$, тогда $AN=20-x$; $AC=20+x$

4. ~~$\triangle CLP \cong \triangle CH_1L$ (т.к. $\angle CH_1L = \angle PCH_1$, $\angle P = 90^\circ = \angle H_1$, CL - общая)~~
Тогда $CP = CH_1$ и $PL = LH_1$

5. ~~$\triangle ARM \cong \triangle BMN$ (аналогично п. 4) $\Rightarrow \angle LPC = \angle APC = 90^\circ$~~
 ~~$\angle P = \angle B = 90^\circ$~~

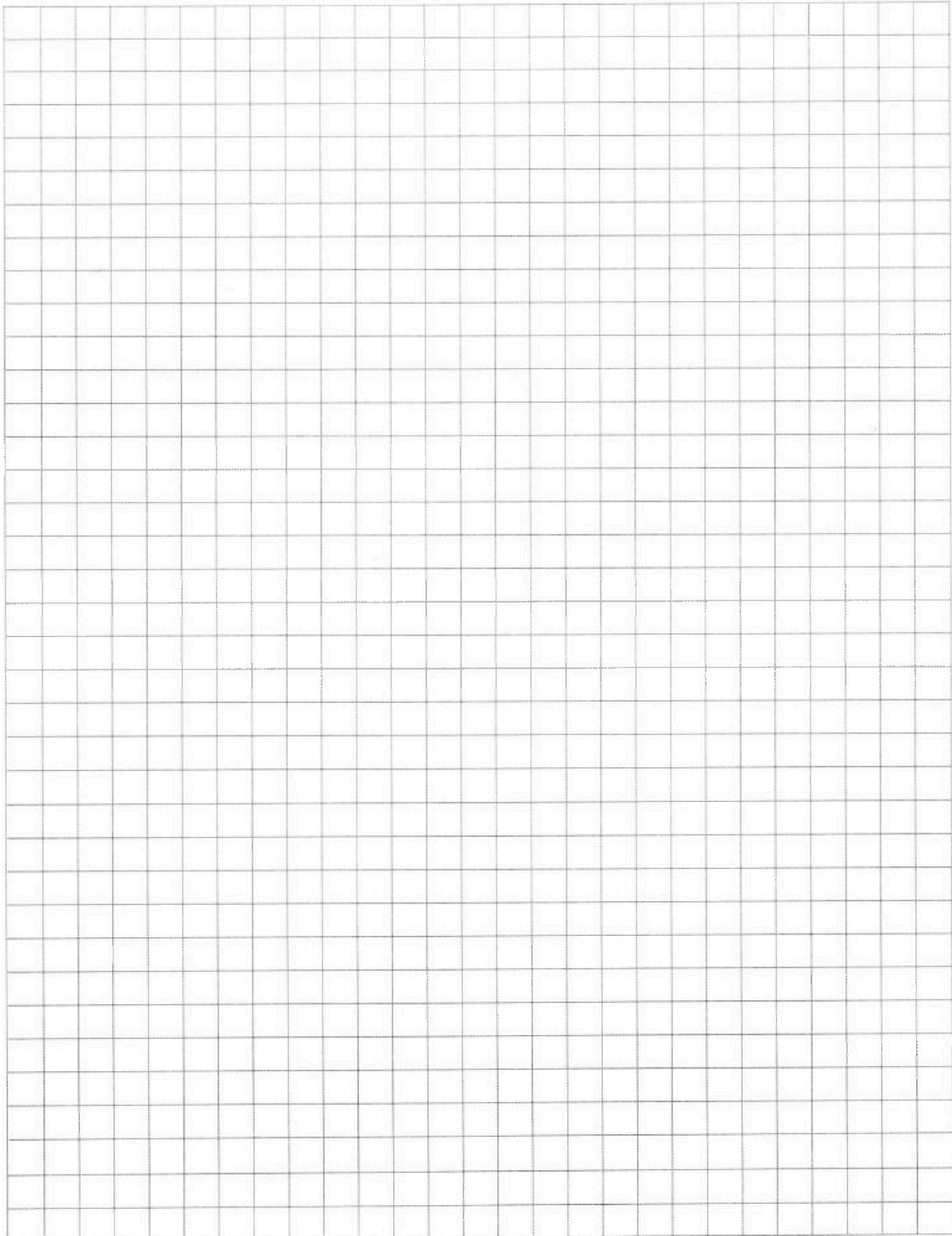


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$(x+6) + (5-y) - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 5 + 25\sqrt{x+6} - 25\sqrt{5-y} = 4(30-x-y^2)$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y} \leftarrow \text{симметрично от } x \text{ и } y$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x+y} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y+x}$$

Функции возрастающие \Rightarrow 1 решение $x=y=1$ и $x=y=0$

$$\sqrt{7} - \sqrt{4} + 5 = 2\sqrt{30-1-1} = 4\sqrt{7}$$

$$5 - \sqrt{4} = 3\sqrt{7}$$

$$3 = 3\sqrt{7} - \text{нет.}$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{30} = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$$

$$5 - \sqrt{5} = \sqrt{6}(2\sqrt{5}-1)$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{6}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{Сосед.} - 99-4 = 95$$

$$\text{Сосед.} - 99-8$$

$$99 + (99-4) + (99-8) + (99-\dots)$$

$$a_1 = 99$$

$$q = -4$$

$$S_{10} = 10a_1 + 9+2q+\dots+9q =$$

$$= 10a_1 + \frac{10q \cdot 9}{2} =$$

$$(x+6)(5-y) =$$

$$= 10a_1 + 45q =$$

$$= 10 \cdot 99 + 45(-4) =$$

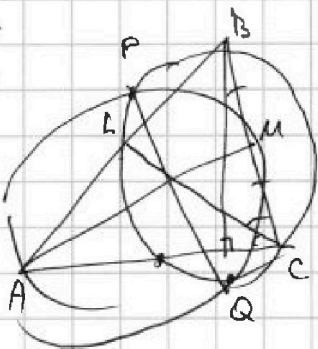
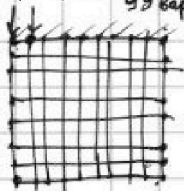
$$= 990 - 180 =$$

$$= 810$$

$$6V$$

Узлов 100

Борем верх. прав. гр. 99 бор.



$$\frac{990}{81}$$

$$x=y=0 \quad x=y=1$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$4(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$+ (x^2+y^2)(x+y)(x+y)$$

$$(1 + 4(x^2+y^2)(x+y))(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5 = 0$$

Поворотов - 4 \Rightarrow

каждую раскроем посылкам 4 раза

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 424 \\ - 192 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 422 \\ - 96 \\ \hline 326 \\ - 50 \\ \hline 276 \\ - 46 \\ \hline 230 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \overline{) 4} \\ 99 \cdot 96 \overline{) 4} \\ 24 \end{array}$$

$$99 \cdot 11 \text{ or } 99 \cdot 90 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{одн. } 99 + 9 + 2q + \dots + 24q &= \\ = 99 + \frac{25q \cdot 24}{2} &= 99 + 300q \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N/V \quad \frac{(x^2-4x)^2 + 3x^2 + 6x + 18}{2} = (x^2-4x)^2$$

$$(x^2-4x)^2 - 3x^2 + 12x + 36 = 4(x^2-4x)^2$$

$$-3x^2 + 12x + 36 = 3(x^2-4x)^2$$

$$-x^2 + 4x + 12 = (x^2-4x)^2$$

$$(x^2-4x)^2 + (x^2-4x) - 12 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \begin{matrix} t = -4 \\ t = 3 \end{matrix}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

ум $x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+3} = 2 \pm \sqrt{7}$$

6x+18

$$-3x^2 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow q < 0 \\ \text{т.к. } a > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{x^2-4x}{x=2+\sqrt{7}} = 4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7} = 3$$

$$6x+18 = 30 \quad x=2$$

$$q = -7$$

$$|q_7 = 9| \quad 2 - \sqrt{7} = 4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7}$$

$$(4-4 \cdot 2)^2 = 16$$

$$q_n = (-3 \cdot 2^2) = -12 \quad -28$$

$$6x+18 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 > 9$$

$$12 - 6\sqrt{7} + 18 > 9$$

2 кор.

mm

$$mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$mn(m-n+3) = 13p^2$$

3V

$$m = m-n+3 \quad \text{ум} \quad n = m-n+3$$

$$n = m-n+3$$

$$m = m-n+3 \quad \text{ум} \quad n = m-n+3$$

$$n = 3$$

$$m = 3$$

$$n = 13$$

$$m = 13$$

$$m = m-10$$

$$n = 16-n$$

нет

$$n = 8$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$(m-3)(m+6) = 13p^2$$

$$\div 13 \quad m-3 = 13 \quad 16 = p^2 \text{ -нет}$$

$$m+6 = 13$$

$$m = 7$$

$$7 \cdot 3 = p^2$$

$$p = 2 \quad q = 7 \quad \checkmark \text{ ег.}$$

$$mn(m-n+3) = 13 \cdot 8 \cdot (13-8+3) =$$

$$= 13 \cdot 8 \cdot 8 \quad \checkmark$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} = 4b^2 \quad | \cdot 2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 + (12)^2 - 2 \cos \alpha \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = (a+2b)^2 = (4b)^2 = 16b^2 \quad \Rightarrow$$

$$2 \cdot 6^2 + 2 \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cos \alpha \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = 8b^2$$

$$8b^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 12^2 - 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 2 \cdot 6^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 8b^2$$

$$2^3 \cdot 3^2 - \frac{2^8}{3^2} = 8b^2$$

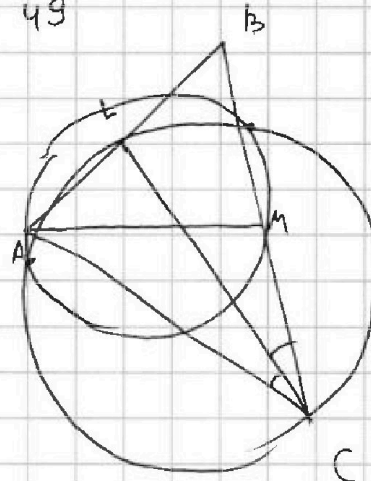
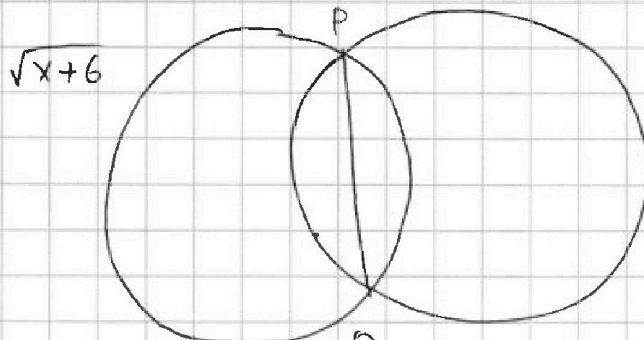
$$3^2 - \frac{2^5}{3^2} = b^2$$

$$3^4 = 81$$

$$2^5 = 32$$

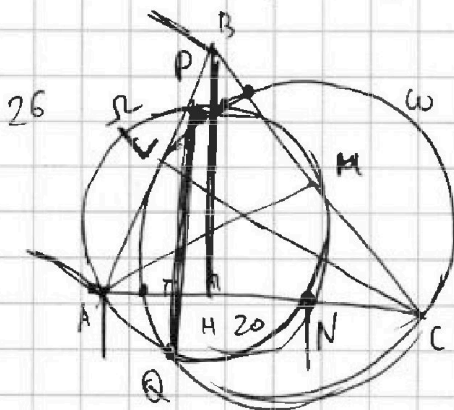
$$\frac{81}{32} = \frac{10}{49}$$

$$\sqrt{\frac{3^4 - 2^5}{3^2}} = b = \frac{7}{3}$$



$$\sqrt{x+6} + 5 = \sqrt{5-y}$$

$$(x+6)(5-y) = 30 - 6y + 5x - xy$$



AC
BE

$$4t^6 + t^4 + 5t = 4p^{16} +$$

