



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

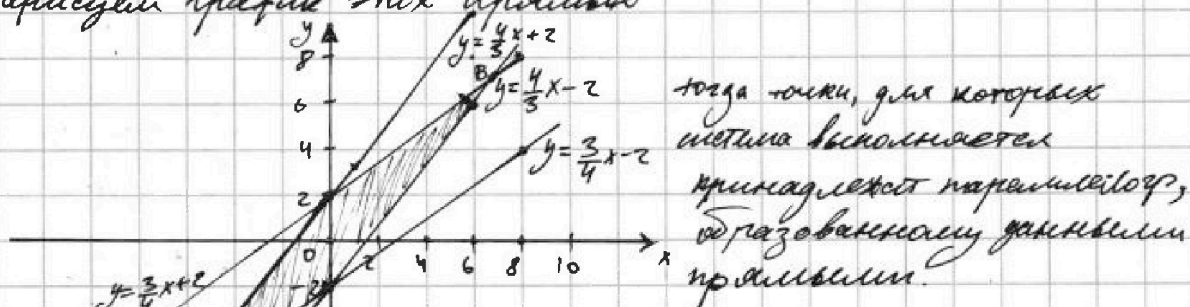
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Рассмотрим в каких интервалах лежит x и y , чтобы условие выполнялось.

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 3y - 4x \leq 6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 4y - 3x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4}{3}x - 2 \\ y \leq \frac{4}{3}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{4}x - 2 \\ y \leq \frac{3}{4}x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow нарисуем график этих прямых



\Rightarrow можем заметить интервалы для x и y , для этого нужно узнать точки пересек.

$$A: \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 2 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad B: \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - 2 \\ y = \frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$$

$$A: \frac{4}{3}x + 2 = \frac{3}{4}x - 2$$

$$16x + 24 = 9x - 24$$

$$x = -\frac{48}{7} \quad y = -\frac{50}{7}$$

$$B: \frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$16x - 24 = 9x + 24$$

$$x = \frac{48}{7} \quad y = \frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{48}{7}; \frac{48}{7}\right] \quad \text{и} \quad y \in \left[-\frac{50}{7}; \frac{50}{7}\right] \Rightarrow x \geq -\frac{48}{7} \quad y \geq -\frac{50}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 3y \geq 4 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) = -\frac{96}{7} - \frac{50}{7} = -\frac{146}{7}. \text{ Это значение достигается при } x = -\frac{48}{7} \text{ и } y = -\frac{50}{7}. \text{ При этом они удовлетворяют системе: } \left| \frac{4 \cdot (-48)}{7} + \frac{3 \cdot 50}{7} \right| = \left| \frac{150 - 192}{7} \right| = \left| \frac{42}{7} \right| = 6$$

$$\left| \frac{3 \cdot (-48)}{7} + \frac{4 \cdot 50}{7} \right| = \left| \frac{200 - 144}{7} \right| = \left| \frac{56}{7} \right| = 8$$

Ответ: $-\frac{146}{7}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Для начала преобразуем числа A и B :

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

Сразу рассмотрим число A и его множители, заметим, что по мод 2 $m-n+9 \equiv m-n+1 \Rightarrow$ числа $(m-n)$ и $(m-n+9)$ - разной четности \Rightarrow равно одному из них: 2 $\Rightarrow A : 2$.

При этом оба числа A и B - натуральные (нравны $13p^2$ и $3q^2$) и m и n - натуральные. \Rightarrow тк $B = mn(m-n+3) \Rightarrow m-n+3$ натуральное

$\Rightarrow m-n+3 > 0 \Rightarrow m-n+9 > 0$ тк $A = (m-n)(m-n+9) > 0 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$. \Rightarrow Все множители положительны.

Теперь рассмотрим 2 случая: $A = 13p^2$ и $A = 3q^2$

① $A = 13p^2$ при этом $A : 2 \Rightarrow 13p^2 : 2 \Rightarrow$ тк $13 \not\equiv 2 \Rightarrow p^2 : 2$,

тк p - простое и $p^2 : 2 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13 \cdot 4.$$

Сделаем замену переменной: $t = m-n$, тогда $t > 0$ и:

$$A = t(t+9) = 52$$

$$t^2 + 9t - 52 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 52}}{2} = \frac{-9 \pm 17}{2} \text{ тк } t > 0 \Rightarrow t = \frac{-9 + 17}{2} = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m-n = 4$. тк $A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$, тогда:

$$B = mn(m-n+3) = mn(4+3) = 7mn = 3q^2 \quad 3 \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 : 7 \quad q - \text{ простое} \Rightarrow q = 7 \Rightarrow B = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49$$

$$\Rightarrow B = m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow m \cdot n = 21 \quad \text{и } m-n = 4 \Rightarrow m = 4+n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+4)n = 21$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 21}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \text{ тк } n > 0 \Rightarrow n = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$

$$\Rightarrow m = 4+n = 4+3 = 7. \quad A = 4 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2 \quad B = 3 \cdot 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$$

\Rightarrow В случае если $A = 13p^2$ и $B = 3q^2$ $(m, n) = (7; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 продолжение.

$$\textcircled{2} A = 3q^2 \quad B = 13p^2, \text{ при этом } A : 2$$

$$\Rightarrow 3q^2 : 2 \quad 3/2 \Rightarrow q^2 : 2 \quad q - \text{простое} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (m-n)(m-n+9) = 3 \cdot 2^2$$

Отсюда делаем замену переменной $t = m-n \quad t > 0$

$$A = t(t+9) = 12$$

$$t^2 + 9t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{3 \cdot 43}}{2} \quad \text{не натуральное}$$

\Rightarrow в случае $A = 3q^2$ и $B = 13p^2$ натуральных и m -но чисел нет.

$$(m; n) = \emptyset$$

Мы рассмотрели оба случая и следовательно единственной парой $(m; n)$, которая подходит это $(m; n) = (7; 3)$

Ответ: $(7; 3)$.

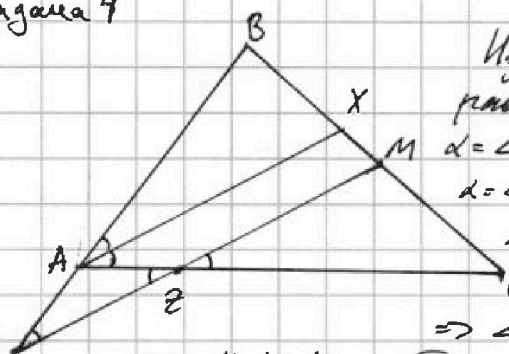


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



Из параллельности прямых следуют равенства углов:

$\alpha = \angle BAX = \angle XAC$ т.к. AX - биссектриса.

$\alpha = \angle BAX = \angle BYM = 2\angle XAC = \angle MZC$, при этом

$\alpha = \angle MZC = \angle AZY$ - т.к. вершина \Rightarrow

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle YAZ$ - равнобедренный $\Rightarrow AY = AZ = 3$

т.к. $AX \parallel YM$, то образуются подобные треугольники:

$\triangle ABX \sim \triangle BYM$; $\triangle ZCM \sim \triangle ACX$. Запишем отношения

соответственных сторон: $\frac{CZ}{AC} = \frac{CM}{CX} = \frac{ZM}{AX}$ и $\frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{AX}{MY}$. Тогда.

$$\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{AC} = \frac{(AC - AZ)}{AC} = \frac{12 - 3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CM}{CX} = \frac{3}{4}. \text{ При этом, т.к.}$$

AX - биссектриса \Rightarrow выполняются равенства отношений отрезков:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}. \text{ При этом } \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{CM}{BC} \text{ т.к. } M \text{ - ср.}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BY}{BM} \Rightarrow \frac{BY}{BM} = \frac{AC}{CX} \Rightarrow BY = \frac{BM \cdot AC}{CX} = \frac{CM \cdot AC}{CX} = \frac{3 \cdot AC}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$$

$\Rightarrow BA = BY - AY = 9 - 3 = 6$. Также выполняются также соотношения:

$$\frac{AX}{MY} = \frac{AB}{BY} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{AX}{AC} = \frac{CZ}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow AX = \frac{4}{3} CZ \text{ и } AX = \frac{2}{3} MY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} CZ = \frac{2}{3} MY \Rightarrow 2CZ = MY = CZ + CZ \Rightarrow CZ = ZY = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow MY = 2CZ = 8$. Запишем т. косинусов для $\triangle AYZ$:

$$AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AY \cdot YZ \Rightarrow 3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cos \alpha \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \Rightarrow 2 = 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}. \text{ Запишем т. косинусов для } \triangle BYM:$$

$$BM^2 = BY^2 + YM^2 - 2 \cos \alpha \cdot BY \cdot YM \Rightarrow BM^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 =$$

$$= 81 + 64 - 96 = 49 \Rightarrow BM^2 = 49 \Rightarrow BM = 7 \text{ - отрезок} \Rightarrow BM > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = 7. BC = 2BM \Rightarrow BC = 2 \cdot 7 = 14$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

| ИЗ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y} \end{cases} \text{ заметим, что } x \geq 0, y \geq 0, y \leq 5, x \leq 30.$$

Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$ тогда условия переписываются как:

$$4a^{16} + a^4 - 5b = 4b^{16} - 5a + b^4 \quad a \geq 0, b \geq 0$$

$$4a^{16} - 4b^{16} + a^4 - b^4 + 5a - 5b = 0$$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$(a^4 - b^4)(4a^4 + 4b^4 + 1) + 5(a - b) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(4a^4 + 4b^4 + 1) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5(a - b) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5 \stackrel{> 0}{\neq} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y.$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{30-x-x^2} - 5 \text{ возведем в квадрат}$$

~~x+6~~

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(x-6)(5-x)} - 5$$

$$\sqrt{x+6} = A, \sqrt{5-x} = B$$

$$A - B = 2AB - 5$$

$$A(1 - 2B) = B - 5$$

$$A = \frac{B - 5}{1 - 2B}, \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{5-x} - 5}{1 - 2\sqrt{5-x}}$$

$$x+6 = \frac{5-x-20\sqrt{5-x}+25}{1-4\sqrt{5-x}+20-4x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 ≥ ИЗ ≥

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. продолжение.

~~Решая~~ посчитаем кол-во ко

Т.к. нам нужно найти кол-во различных V -раскрасок, K а раскраски, которые можно друг из друга получить разбив на кольца, то соответственно нам надо найти кол-во колец.

Посчитаем кол-во колец мощностью 2: Для этого можно выбрать 1 клетку из верхнего левого угла 5×5 , и вторая клетка строится симметрией от центра.

$$\Rightarrow \text{Пусть } y - \text{кол-во таких колец} \Rightarrow y = C_{25}^1 = 25$$

При этом, пусть x - кол-во колец мощностью 4. тогда посчитаем общее кол-во раскрасок: $4 \cdot x + 2y$, а нам нужно найти кол-во колец - т.е. $x + y$. При этом:

$$\begin{cases} 4x + 2y = C_{100}^2 \\ y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = \frac{100 \cdot 99}{2} \\ y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 100 \cdot 99 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4 \cdot 25 = 100 \cdot 99 \Rightarrow 8x + 100 = 100 \cdot 99 \Rightarrow 8x = 100 \cdot 99 - 100$$

$$8x = 9800$$

$$x = 1225$$

$$\Rightarrow x + y = 1225 + 25 = 1250$$

Ответ: 1250.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6.

Для начала заметим, что в клетчатый квадрат 9×9 , то всего узлов сетки, лежащих на сторонах будет по 10, т.е. всего узлов сетки $10 \cdot 10 = 100$. Тогда будем рассматривать квадрат 10×10 , где вместо клеток — узлы сетки, содержащиеся в исходном квадрате. \Rightarrow из наименьшего нового квадрата (10×10) — будет черными (будем дальше будем называть этот квадрат «таблицей») \Rightarrow нас просит посчитать количество различных раскрасок узлов сетки ~~узлов~~, так чтобы белыми были ровно 2 узла, а все остальные черными. \Rightarrow Когда мы от узлов перешли к нашей таблице, задача формулируется как: нужно найти кол-во ^{различных} раскрасок таблицы 10×10 , в которой ровно 2 клетки белые, а остальные черными.

Введем определение кольца. Кольцом определенной раскраски будем называть множество раскрасок, которые могут получиться из нее поворотом. При этом, чтобы квадрат переходил сам в себя, угол поворота должен быть: 90° (поворот отн. ^{центру квадр.} центра квадр.). Тогда, заметим, что если угол между покрашенными клетками (берем угол между прямыми соединением центра квадрата и центром клетки) равен 180° и расстояние от центра покраш. клеток до центра равны, т.е. точки симметричны симметрично ^{на угол α} центра, то мощность (кол-во элементов множества) кольца этой раскраски равна 2^* . В остальных случаях, мощность кольца равна 4, т.е. чтобы мощность была < 4 должны существовать такой поворот, что точки встанут на место друг друга.

Если α тогда при повороте на угол α , должно происходить то же самое \Rightarrow такое возможно только если $\alpha: 180^\circ$ и расст до центра равны. Т.е. если точки симметричны симметрично.

* 2. т.к. при повороте на $\pm 90^\circ$ получается раскраска, в кот. покрашенные точки симметричны от центра ^{на угол α} симметрично. При этой раскраске, поворачивая поворотом на $+90^\circ =$ раскраске, полученной R на -90° .

Тогда посчитаем количество различных раскрасок.

Всего всего возможных R -раскраски — где отним. поворотом раз. считаются одинаковыми.

Всего возможных раскрасок = кол-ву способов выбрать две клетки таблицы = C_{100}^2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 4x - 3y &\leq 6 \\ 3y - 4x &\leq 6 \\ 3x - 4y &\leq 8 \\ 4y - 3x &\leq 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 6 &\leq 3y \\ \frac{4}{3}x - 2 &\leq y \\ 3y &\leq 4x + 6 \\ y &\leq \frac{4}{3}x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 4y &\leq 8 \\ \frac{3}{4}x - 2 &\leq y \\ y &\leq \frac{3}{4}x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 2 \\ y = \frac{4}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2$$

$$\frac{9}{4}x - 6 = 4x + 6$$

$$9x - 24 = 16x + 24$$

$$-48 = 7x$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$y = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$

$$x = 6 \quad 2.3$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$2.48 \quad 96$$

$$-86$$

$$+50$$

$$146$$

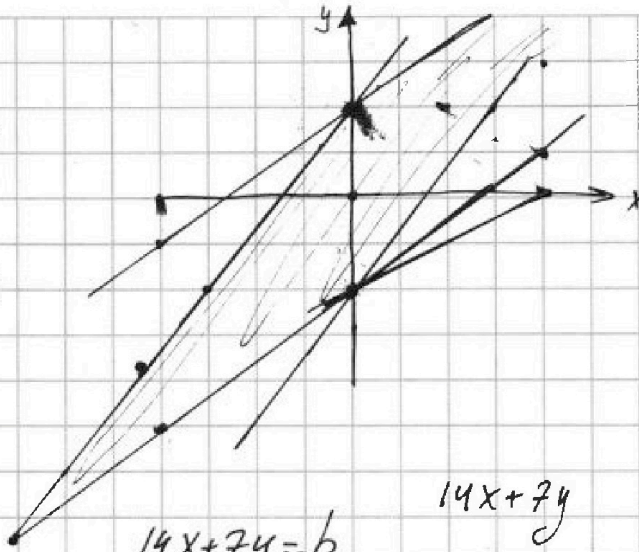
$$2.48$$

$$x \cdot 3$$

$$144$$

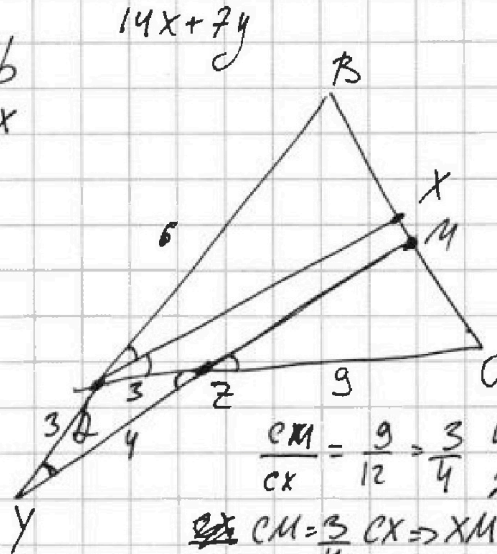
$$2.8.3.2 \cdot 9 \cdot 2$$

$$4.8.3 \cdot 12 \cdot 8 = 96.$$



$$\begin{aligned} \frac{4}{3}x &= 2 \\ x &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14x + 7y &= 6 \\ y &= \frac{6 - 14x}{7} \end{aligned}$$



$$\frac{CM}{CX} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad 4CM = 3CX$$

$$2BC = 3CX$$

$$CM = \frac{3}{4}CX \Rightarrow XM = \frac{1}{4}CX$$

$$CX = \frac{4}{3}CM \Rightarrow XM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}BM$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} \Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BY}{BM} = \frac{AC}{CX}$$

$$BY = AC \cdot \frac{BM}{CX} = \frac{3 \cdot AC}{4} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

$$\frac{AX}{MY} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \frac{AX}{MZ} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad AX = 4MZ = 2MY$$

$$\Rightarrow 2MZ = MY \Rightarrow MZ = \frac{1}{2}MY = 2$$

$$\Rightarrow AX = 4 \quad MY = 2 \quad MZ = 2$$

$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha = 23$$

$$16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \quad \frac{2}{3} = \cos \alpha$$

$$BM^2 = 64 + 81 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = 145 - 96 = 49$$

$$BM = 7 \Rightarrow BC = 14.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} m(m-n+3) &= a_1 + 4d & a_1 + 10d & \frac{2a_1 + 14d}{2} = a_1 + 7d & a_1 + 6d \\ (m-n)(m-n+3) & & & & \frac{2a_1 + 16d}{2} = a_1 + 8d \\ a_5 = 6x + 18 & a_7 = (x^2 - 4x)^2 & a_{11} = -3x^2 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2d &= (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 & 3x^2 + 6x + 18 + 6d &= 0 \\ 6d &= -3x^2 - 6x - 18 & x^2 + 2x + 6 + 2d &= 0 & x^2 + 2x + 6 &= -2d \\ 4d &= -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 & x &= \frac{-2 \pm \sqrt{1 - 6 - 2d}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 3x^2 + 6d &= 0 & \frac{35}{51} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \text{---} \\ x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 4d &= 0 & & & \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 6x + 18 + 2d &= 0 & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 16x^3 + 35x^2 - 6x - 18 + 2d &= 0 & -3x^2 + 6x + 18 &= (x^2 - 4x)^2 + d \\ 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 &= 0 & & & \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 &= 0 & -3x^2 + 6x + 18 &= 2(x^2 - 4x)^2 + 2d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} 4x < 3y \quad x < \frac{3}{4}y$$

$$3x - 4y < \frac{3}{4}y - 4y = \frac{3-16}{4}y = -\frac{13}{4}y$$

$$3y - 4x \leq 6$$

$$3y \leq 6 + 4x$$

$$y \leq 2 + \frac{4}{3}x \leftarrow 2 + y$$

$$y > \frac{4}{3}x$$

$$4x > 3y \quad 4x > y$$

$$3x - 4y \leq 8$$

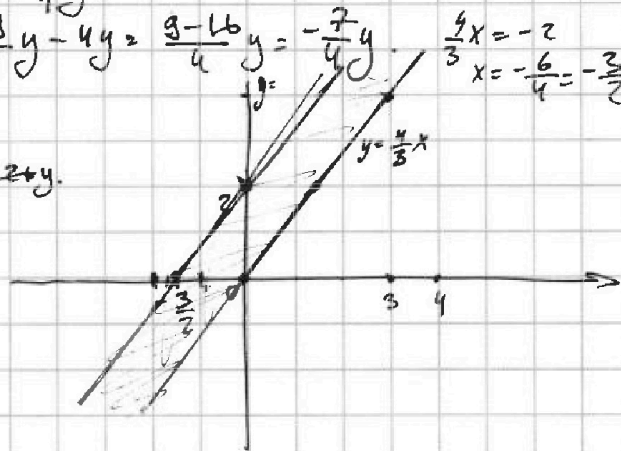
$$2(2x + 4)$$

$$4x - 3y \leq 6$$

$$4x > 3y$$

$$3y - 4x \leq 6$$

$$3x - 4y \leq 8$$



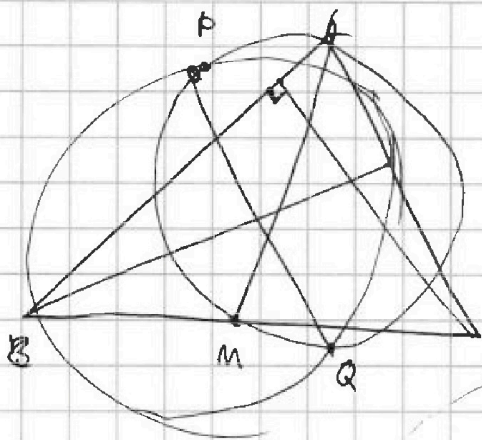


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

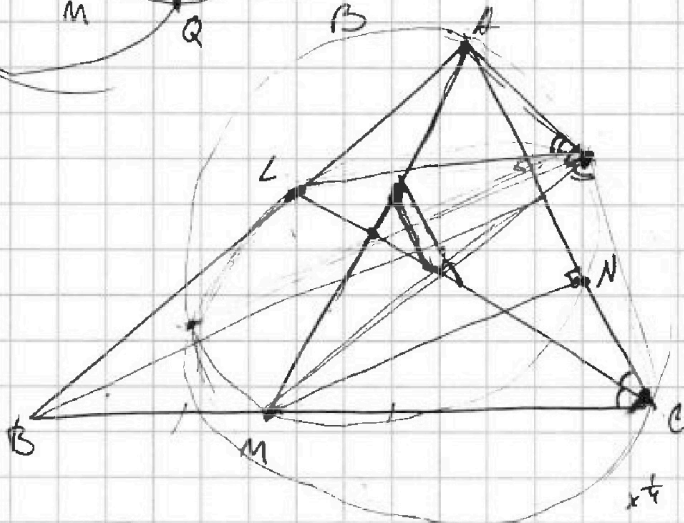
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



PQ - рад. ось $PQ \perp AC$
 $\Rightarrow AC \parallel O_1O_2$



$$\begin{array}{r} ? \\ x \cdot 25 \\ \underline{y} \\ 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9800 \overline{) 11225} \\ \underline{-8} \\ 18 \\ \underline{-16} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

$$C_{100} - 10 =$$

$$= \frac{100 \cdot 99}{2} - 10 =$$

$$= 4940.$$

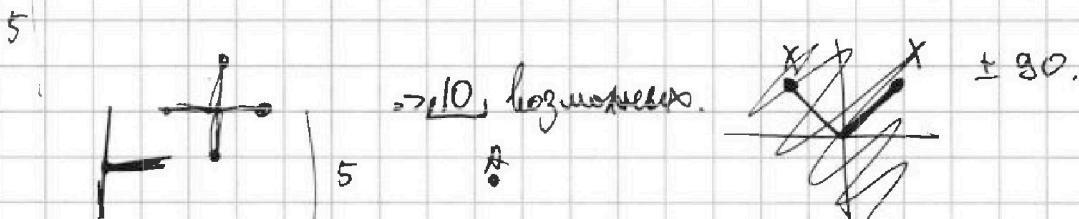
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x^4 & -y^4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

только
показал.

$$0 \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{r} 9800 \overline{) 124950} \\ \underline{-8} \\ 19 \\ \underline{-18} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$



$\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ только поворот на 180° .

$\bullet B \quad A \rightarrow B \quad B \rightarrow A$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_1 + 4d = 6x + 18 \quad a_2 = a_1 + d = (x^2 - 4x)^2 \quad a_{11} = a_1 + 10d = (-3x^2)$$

$$2d = 3x + 9$$

$$2d = \frac{(x^2 - 4x)^2}{3}$$

$$2d = \frac{-3x^2}{5}$$

$$a_1 = 6x + 18 - 4d = (x^2 - 4x)^2 - 6d = (-3x^2) - 10d$$

$$3x^2 + 6x + 18 = -6d$$

$$\frac{(x^2 - 4x)^2}{3} = 2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

$$4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 27 \\ \hline 216 \\ 135 \\ \hline 351 \\ \times 9 \\ \hline 3159 \\ \hline 153 \\ \hline 1824 \\ \hline 16248 \\ \hline 162480 \\ \hline 1624800 \end{array}$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n =$$

$$16 \rightarrow 24 + 34 = 8 \cdot 12$$

$$= (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) \text{ по mod 3 равны}$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\textcircled{1} A = 13p^2 \Rightarrow B = mn(m-n+3) = 3p^2$$

$$\textcircled{2} m-n=1$$

$$\text{если } m-n; 3 \Rightarrow (m-n)(m-n+9); 3^2$$

$$\textcircled{1} m-n=1 \quad m-n+9=10x$$

$$\Rightarrow p=3 \quad A=13 \cdot 9$$

$$\textcircled{2} m-n=13 \quad 13 \cdot (13+9) = 13 \cdot 22x$$

$$\textcircled{3} m-n=p \quad p(p+9) = 13p^2$$

$$p^2 + 9p = 13p^2$$

$$9p = 12p^2$$

$$9 = 12p$$

$$\textcircled{4} m-n=p^2 \quad p^2(p^2+9) = 13p^2 \quad B = mn(4+3) = 7 \cdot mn$$

$$p^2 + 9 = 13$$

$$p^2 = 4 \quad p = 2$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 48 \\ \hline 48 \\ \hline 129 \\ \hline 129 \\ \hline 143 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = 6x+18 \quad a_2 = (x^2-4x)^2 \quad a_{11} = (-3x^2)$$

$$a_7 = a_5 + d = a_5 + 2d \quad a_{11} = a_0 + d = a_9 + 2d = a_5 + 6d$$

$$\begin{cases} 6x+18+6d = (-3x^2) & (x^2-4x)^2 + 4d = (-3x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+18+2d = (x^2-4x)^2 \end{cases}$$

$$6d = (-3x^2) - 6x - 18$$

$$2d = -x^2 - 2x - 6$$

$$(x^2-4x)^2 + 2(2d) = -3x^2$$

$$(x^2-4x)^2 - 2x^2 - 4x - 12 = -3x^2$$

$$\{x^4 - 2 \cdot 4x^3 + 16x^2 - 2x^2 - 4x - 12 = -3x^2 \quad 4d = -x^2(3 + (x-4)^2)\}$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 2x^2 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 4x - 12 = -x^2(3 + (x-4)^2)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(3 + (x-4)^2)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(3 + x^2 - 8x + 16)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(x^2 - 8x + 19)$$

$$2(x^2 + 2x + 6)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 18 + 6d = 0$$

$$x^2 + 2x + 6 + 2d = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(6+2d)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-6-2d}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-5-2d}}{2} \quad -2d \geq 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n)$$

$$B = mn(m-n+3) \quad m-n \Rightarrow$$

$$A = (m-n)(m-n+9)$$

~~13p^2~~ $3q^2$ - возмозжные делители -

~~13p^2~~
 $13p \quad 13p^2 \quad 3q \quad 3q^2$

$$m-n < m-n+9$$

$$A = (m-n)(m-n+9) \text{ - разной четности } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=2 \Rightarrow m-n+9 \div 13$$

① $m-n+9 = 13$

$$m-n = 4$$

$$4 \cdot 13 = p^2 \cdot 13 \quad (\checkmark)$$

② $m-n+9 = 26$

$$m-n = 17$$

$$17 \cdot 26 \neq$$

③ $m-n+9 = 52$

$$m-n = 43 \quad \times$$

$$\Rightarrow m-n = 4$$

$$\Rightarrow m, n \text{ - одной четности.}$$

$$B = mn(m-n+3) =$$

$$= mn \cdot 7 = 3q^2$$

$$m > n \Rightarrow q = 7$$

$$mn = 3 \cdot 7$$

$$(4+n)n = 3 \cdot 7$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$n = \frac{-4 + 10}{2} = 3 \quad m = 7$$

$$A(A+9) = 52$$

$$a^2 + 9a = 52$$

$$a^2 + 9a - 52 = 0$$

$$a = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 52}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{172}}{2} \quad a > 0 \Rightarrow a = \frac{-9 + 17}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 52. \\ 4. \\ \hline 208 \\ + 81 \\ \hline 289 \quad | 17 \\ - 17 \quad | 17 \\ \hline 119 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \times 17. \\ \hline 28 \\ \times 7. \\ \hline 119 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 + 2d = a_2 \quad a_4 = a_2 + 4d \quad a_6 = a_5 + 6d \quad \text{2d.}$$

$$\frac{(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18}{2} = \frac{(-3x^2) - (x^2 - 4x)^2}{2} = \frac{(-3x^2) - 6x - 18}{3}$$

$$(-3x^2) \cdot 3 - 3(x^2 - 4x)^2 = (-3x^2)^2 - 12x - 36.$$

$$-3x^2 - 3(x^2 - 4x)^2 = -12x - 36.$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

$$3x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0.$$

$$x = 1 \quad 6 + 18 = 24$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (1 - 4)^2 = 9$$

$$-3x^2 = -3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \\ \sqrt{x} = a \quad \sqrt{y} = b \end{cases}$$

$$4(a^{16} + a^4 - 5b) = 4(b^{16} - 5a + b^4)$$

$$4a^{16} + a^4 - 5b = 4b^{16} - 5a + b^4$$

$$4a^{16} + a^4 - 5a = 4b^{16} + b^4 - 5b$$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(b - a) = 0$$

$$4(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) + 6.$$

$$\frac{4}{2^4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{17}{2}$$

$$x \leq 5$$

$$y^2 \leq 25$$

$$30 - x - y^2 \geq 0$$

$$30 - x \geq y^2$$

$$x \leq 30.$$

$$x^2 + x - 30$$

$$(x-6)(5-x) =$$

$$= 5x + 6x - x^2$$