



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 4d = 6x + 18 \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \\ a_0 + 10d = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = -3x^2 - 6x - 18 \\ a_0 = 6x + 18 - 4d \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d = -x^2 - 2x - 6 \\ a_0 = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 \\ 2x^2 + 10x + 30 - 30^2 - 6x - 18 = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \\ & (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0 \\ & (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3) = 0 \\ & (x-2)^2(x-1)(x-3) = 0 \\ & \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Для  $x=1$ :  $\begin{cases} a_5 = 24 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 36 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow a_7 = 36 - 18 = 18 \neq 9$  - неверно

Для  $x=2$ :  $\begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 58 \\ d = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases}$  - верно

Для  $x=3$ :  $\begin{cases} a_5 = 36 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = -27 \\ 2d = -18 \end{cases}$  - неверно

Ответ 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -8 \leq 4x-3y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 \leq x+y \leq 12 \\ -6 \leq 4x-3y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -48 \leq 7x \leq 48 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -98 \leq 7x+7y \leq 98 \\ -48 \leq 7x \leq 48 \end{cases}$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146 \Rightarrow \min(14x+7y) = -146$$

Ответ: -146





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 13, p^2\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ p^2 = \frac{12}{10} \notin \mathbb{N} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ 22 = p^2 \text{ не квадрат} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} p^2=4 \\ m-n=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=2 \\ m-n=4 \\ 7mn = 3q^2 \end{cases} \Rightarrow 9 \Rightarrow 19 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ 7mn = 3 \cdot 7 \cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4+h \\ n^2+4n-21=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h+7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=-7 \notin \mathbb{N} \\ h=0 \\ h=4+h \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=3 \\ m=7 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 13\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=3q^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{10}{3} \text{ не квадрат} \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=3 \\ q=2 \\ 6mn=13p^2; 6 \nmid 13p^2 \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Ответ (7, 3)



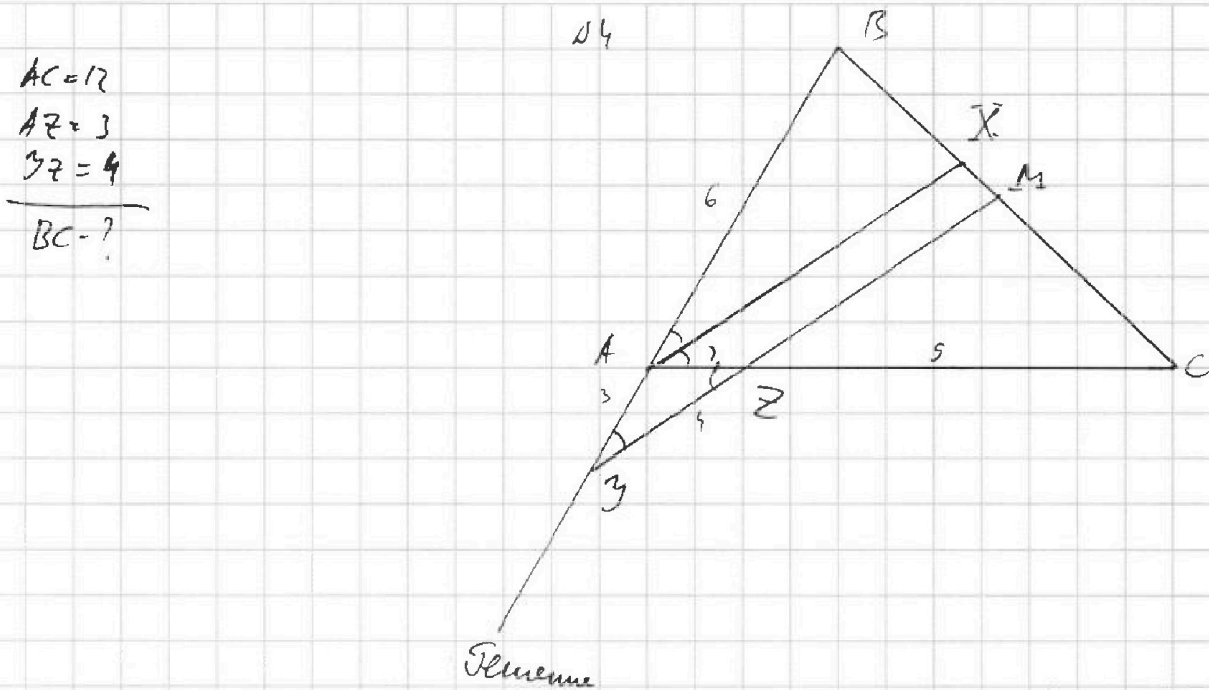
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1)  $\angle XAZ = \angle ZAX$  - накрест лежащие при  $AX \parallel ZM$  и сек.  $AZ$
- 2)  $\angle BAX = \angle BZM$  - соответ. при  $AX \parallel ZM$  и сек.  $BZ$
- 3)  $\angle BAX = \angle XAC$   
 $\angle ZBA = \angle ZCA \Rightarrow \angle BZM = \angle AZC \Rightarrow \triangle AZC$  - равнобедр.  $\Rightarrow AZ = AC = 3$
- 4)  $AC = AZ + ZC \Rightarrow ZC = 12 - 3 = 9$
- 5)  $\angle ACX$   
 $ZM \parallel AX \Rightarrow$   $\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{CA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$   
 $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BX}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3}$
- 6)  $\angle ZBM$   
 $AX \parallel ZM \Rightarrow$   $\frac{BA}{BZ} = \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow BZ = \frac{3}{2} BA = 6 \Rightarrow BA = ZB = 6$
- 7) Пусть  $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle ZAZ = 180^\circ - \alpha$
- 8) По теореме косинусов в  $\triangle AZC$   
 $ZC^2 = AZ^2 + AC^2 - 2 \cdot AZ \cdot AC \cdot \cos \angle ZAZ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(\alpha) (180^\circ - \alpha)$$

$$16 = 18 + 18 \cos(\alpha)$$

$$18 \cos(\alpha) = -2$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{9}$$

5) По формуле косинусов в  $\triangle ABC$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos(\alpha)$$

$$BC^2 = 180 - 144 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = \pm 14 \quad \begin{matrix} BC > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases} \quad (1)$$

(1) Пусть  $x = a^4, y = b^4$  (можно так сделать, так как  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ )

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b) \underbrace{(4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) + (a^2 + b^2)(a + b) + 5)}_A = 0$$

$$\begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ a^8 + b^8 \geq 0 \\ a^4 + b^4 \geq 0 \\ a^2 + b^2 \geq 0 \\ a + b \geq 0 \\ 5 \geq 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow A \geq 5 \quad (a - b)A = 0 \quad \Rightarrow a - b \geq 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

Пусть  $c = \sqrt{x+6}, d = \sqrt{5-x}$ , тогда так  $30 - x - x^2 = (x+6)(5-x)$

$$\begin{cases} c - d + 5 = 2cd \\ c^2 - d^2 + 25 = 20cd \end{cases}$$

$$c^2 + d^2 - 2cd = 4cd + 25 - 20cd$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 - 2cd = 4cd + 25 - 20cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 = 4(cd)^2 + 25 - 18cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \quad 4(cd)^2 - 18cd + 14 = 0$$

$$2(cd)^2 - 9cd + 7 = 0$$

$$2x = (cd - 1)(2cd - 7) = 0$$

$$\begin{cases} cd = 1 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c^2+d^2=11 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} c^2+d^2=11 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2-2cd=11 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} (c+d)^2-2cd=11 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2=13 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} (c+d)^2=13 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d=\sqrt{13} \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} c+d=3\sqrt{2} \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=\sqrt{13}-d \\ d\sqrt{13}-d^2=1 \quad (4) \end{cases} \vee \begin{cases} c=3\sqrt{2}-d \\ 6\sqrt{2}d-2d^2=7 \quad (5) \end{cases}$$

$$(4) \quad d^2-d\sqrt{13}+1=0$$

$$\Delta=13-4=9$$

$$d=\frac{\sqrt{13}\pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} c=\frac{\sqrt{13}-3}{2} \\ d=\frac{\sqrt{13}+3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c=\frac{3\sqrt{2}-2}{2} \\ d=\frac{3\sqrt{2}+2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=\frac{\sqrt{13}+3}{2} \\ d=\frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c=\frac{3\sqrt{2}+2}{2} \\ d=\frac{3\sqrt{2}-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22-6\sqrt{13}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22+6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22+6\sqrt{13}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22-6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22-12\sqrt{2}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22+12\sqrt{2}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22+12\sqrt{2}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22-12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}(-3-6\sqrt{13}) \\ x=\frac{1}{4}(-1-6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-7+6\sqrt{13}) \\ x=\frac{1}{4}(-1+6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-24-12\sqrt{2}) \\ x=\frac{1}{4}(-2-12\sqrt{2}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-2+12\sqrt{2}) \\ x=\frac{1}{4}(2+12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$x < 0$  - не верно  $x < 0$  - не верно  $x < 0$  - не верно  $x > 0$  - верно

$$x = \frac{-2+12\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ  $\left( \frac{-1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

И.И. Ваулин  $9 \times 9$ , то у него всего 100 клеток покрашены  
в чёрный. Способов покрасить два узла в белый всего  $100 - 99 = 1$ . И.И.  
при повороте на  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  мы получаем ту же раскраску,  
но все раскраски мы посчитали по 4 раза, но есть всего  
 $\frac{100 - 99}{4} = 25 - 99 = 2475$  различных способов. Если же поворачивать на  
углы покрашенные  $90^\circ$ , то квадраты  
не перейдут сам в себя.

Ответ 2475.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

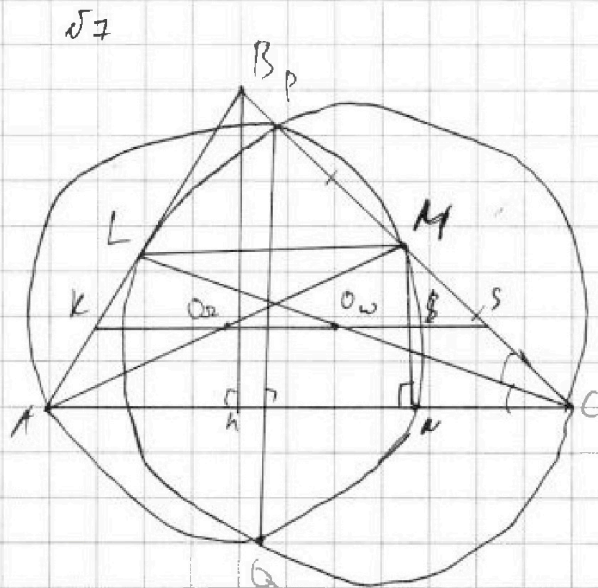


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AB=26$   
 $AK=20$   
Вн. касательн. к  $\triangle ABC$



Решение

- 1) Пусть  $O_\Omega$  и  $O_\omega$  - центры окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  соосн.
- 2)  $AK$  и  $LC$  - диаметры  $\Rightarrow O_\Omega$  и  $O_\omega$  - середины  $AK$  и  $LC$  соосн.
- 3)  $P \in \Omega \cap \omega$   
 $Q \in \Omega \cap \omega \Rightarrow PQ$  - радикальная ось  $\Omega$  и  $\omega \Rightarrow PQ \perp O_\Omega O_\omega$   
 $O_\Omega$  и  $O_\omega$  - центры
- 4)  $PQ \parallel BH$   
 $BH \perp AC \Rightarrow B, PQ \perp AC$
- 5)  $PQ \perp AC$  (к.4)  
 $PQ \perp O_\Omega O_\omega$  (к.3)  $\Rightarrow O_\Omega O_\omega \parallel AC$
- 6)  $O_\Omega O_\omega \parallel AC$   $\xrightarrow{\text{к.}}$   $O_\Omega O_\omega$  - средняя линия в  $\triangle AMC \Rightarrow MS = SC$ ,  
 $AO_\Omega = O_\Omega M$  где  $S = O_\Omega O_\omega \cap MC$
- 7)  $LO_\omega = O_\omega C$   $\xrightarrow{\text{к.}}$   $O_\omega S$  - средняя линия в  $\triangle MC \Rightarrow SO_\omega \parallel LM \Rightarrow$   
 $MS = SC \Rightarrow O_\omega O_\Omega \parallel LM$
- 8)  $O_\Omega O_\omega \parallel LM$  (к.7)  $\xrightarrow{\text{к.}}$   $LM \parallel AC \Rightarrow LM$  - средняя линия в  $\triangle ABC \Rightarrow$   
 $O_\Omega O_\omega \parallel AC$  (к.5)  $\xrightarrow{\text{к.}}$   $BH = MC \Rightarrow BL = LA \Rightarrow CL$  - медиана



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9) CL-медиана (h.g) | h.  
CL-бис-са (y.g.)  $\Rightarrow \triangle ABC$  - равнобедр.  $\Rightarrow AC = BC$

10) AA-углы  $\angle C \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow MN \perp BH$  / Т. Палеса  
 $BM = MC \Rightarrow MN = NC$

11) Пусть  $MN = NC = x \Rightarrow AN = 20 - x \Rightarrow AC = 20 + x = BC$

12) По Т. Пифагора в  $\triangle ABM$  ( $\angle AMB = 90^\circ$ ):

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

13) По Т. Пифагора в  $\triangle CBM$  ( $\angle CMB = 90^\circ$ ):

$$CM^2 + BM^2 = BC^2$$

14) из 12) и 13)

$$AB^2 - AM^2 = BC^2 - CM^2$$

~~776~~  
 $676 - (20-x)^2 = (20+x)^2 - 4x^2$

$$676 = 400 + x^2 - 40x + 400 + x^2 + 40x - 4x^2$$

$$676 = 800 - 2x^2$$

$$2x^2 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \Rightarrow x = \sqrt{62} \Rightarrow AC = BC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

Ответ  $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - m^2 + 3mn$$

$$\sqrt{3}$$

$$13p^2$$

$$3q^2$$

$$(7; 3) \rightarrow \begin{cases} 4 - 13 = 13 \cdot 2^2 \\ 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \checkmark \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13p \\ m-n = p \end{cases}$$

из 1-го

$$p^2 - 9 = 13$$

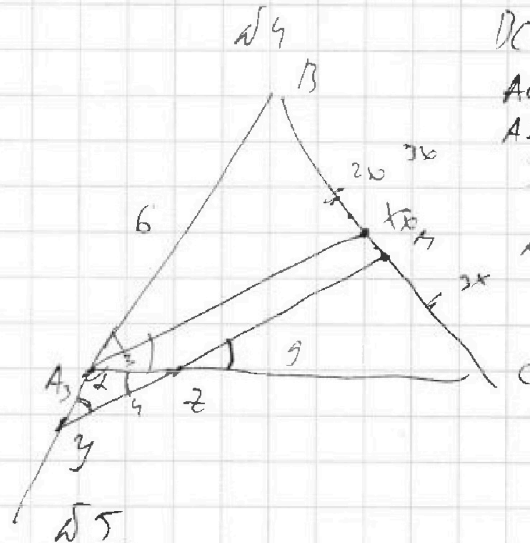
$$p^2 = 22 = 2 \cdot 11$$

$$\begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases}$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ mn \cdot 6 = 3q^2 \end{cases}$$



BC=?

$$AC=12$$

$$AZ=3$$

$$3Z=4$$

$$AZ=AZ=3$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{6} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{6} = 4y^4 + y + 5\sqrt{x}$$

$$4x^4 - 4y^4 = y - x + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{x}$$

$$(4x^4 - 4y^4) + (x - y) + 5(\sqrt{6} - \sqrt{x}) = 0$$

$$(x+6)(5-y) = 20 - 6y + 5x - xy$$

$$20 - x - y^2 = 20 - 6y + 5x - xy + A$$

$$A = -y^2 + 6y - 6x + xy =$$

$$= -y(y-x) + 6(y-x) =$$

$$= (y-x)(6-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_5 = 6x + 18$   
 $a_7 = (x^2 - 4x)^2$   
 $a_{11} = (-3x^2)$

$x^2$   $d$

$$\begin{cases} a_5 = a_0 + 4d \\ a_7 = a_0 + 6d \\ a_{11} = a_0 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 - 6x - 18 \\ 4d = -3x^2 - x^4 - 16x^2 + 6x^3 \end{cases}$$

$$6d = -3x^2 - 6x - 18$$

$$2d = -x^2 - 2x - 6$$

$$a_0 = a_5 - 4d = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 = 2x^2 + 10x + 30$$

$$2x^2 + 10x + 30 - 3x^2 - 6x - 18 = (x^2 - 4x)^2$$

$x=1$

$$-x^2 + 4x + 12 = x^4 + 16x^2 - 8x^3$$

$$24 = -12 + a_0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$9 = -18 + a_0$$

$$x=2, 16 - 64 + 68 - 8 - 12 - 20 - 20 = 0$$

$$-3 =$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x=21$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} 30 \\ 6 \\ 16 \\ -12 \end{cases}$$

$$2d = -14$$

$$a_0 = 10 - 28$$

$$(x-2)^2(x-1)(x-3) = 0$$

$$2d = -4$$

$$a_0 = 58$$

$$x=3$$

$$\begin{cases} 36 \\ 9 \\ -24 \end{cases}$$

$$2d = -27$$

$$2d = -18$$

$d$

with  $14x + 7y = ?$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$14x + 7y = -162$$

$$2x + y =$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 14 + 4 = 18 \\ & 4x - 3y \leq 4x \leq 6 + 3y \Rightarrow 2 + 3y \leq x \leq \frac{6 + 3y}{4} \\ & -3 + 4y \leq 3x \leq 8 + 4y \Rightarrow -3 + 4y \leq x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x + y \leq 14 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -56 \leq 4x + 4y \leq 56 \\ -24 \leq 3x - 4y \leq 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -64 \leq 7x \leq 64 \\ -59 \leq 7x + 7y \leq 69 \end{cases}$$

$$\textcircled{162} \leq 14x + 7y \leq 162$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$5x-6 + \sqrt{-y+25} + 10\sqrt{x-6} - 10\sqrt{5-y} - 2\sqrt{-20+6y+5x-xy} =$$

$$= 4(30-x-y^2) - 10 - 4x - 4y^2$$

$$(x-6)(5-y)(y-x)(6-y) = (6y-y^2-6x+xy)(5x-xy-30+6y) =$$

$$= (30xy-6xy^2-180y+36y^2-5xy^2+xy^3+30y^2-6y^3-30x^2+6x^2y-30x-$$

$$-36xy+5x^2y-x^2y^2-30xy+6xy^2) =$$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \\ 5-y \geq 0 \rightarrow y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ x+y^2 \leq 30 \end{cases} \rightarrow y \in [0; 5] \rightarrow y^2 \in [0; 25]$$

$$x \in [0; 30]$$

$$x = a^4 \quad y = b^4$$

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^8+b^8)(a^8+b^8) + (a^8-b^8)(a^2+b^2) + 5(a-b) = 0$$

$$4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + (a^2+b^2)(a-b)(a+b) + 5(a-b) = 0$$

$$(a-b)(4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) + 5) = 0$$

$$a=b \Rightarrow x=y$$

→ 0

$$(x+6)(5-x) = 30 - 6x + 5x^2 =$$

$$= 30 - x - x^2$$

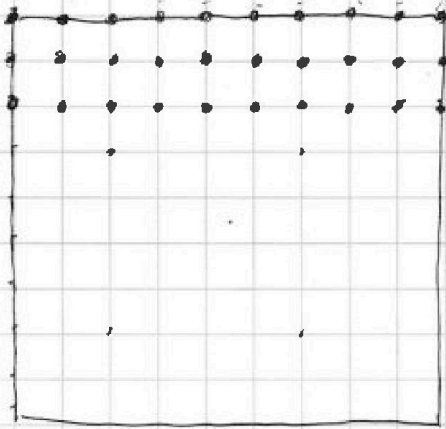


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{5}$

всего 100 узлов  $\Rightarrow$  100 квадратов  
 перекрещиваются два узла в белом?  
 все фиксированы по 4 узла в белом.

всего способов  $\Rightarrow 100 \cdot 99$

но,  $\frac{100 \cdot 99}{4} = 99 \cdot 25 = 100 \cdot 25 - 25 = 2500 - 25 = 2475$



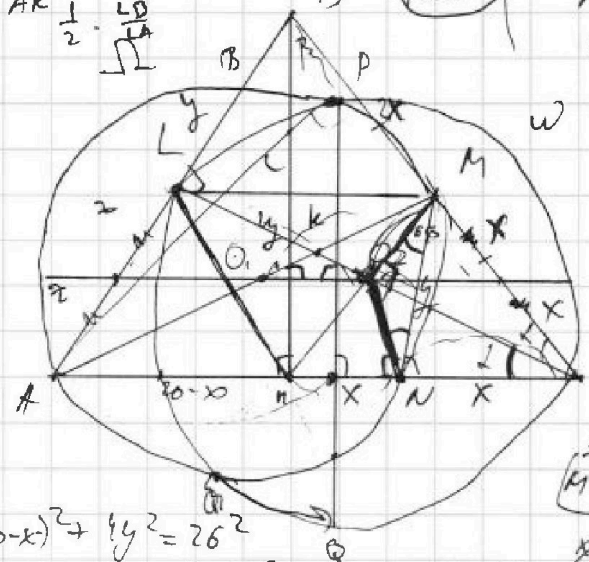
$4x - 3y = -6$   
 $3x - 4y = -7$   
 $x + y = -2$   
 $x = y - 2$   
 $4(y - 2) - 3y = -6$   
 $4y - 8 - 3y = -6$   
 $y = 2$   
 $x = 0$



$x + y = 26$   
 $x = 26 - y$   
 $576 - 196 = 400$   
 $400 + 144 = 624$

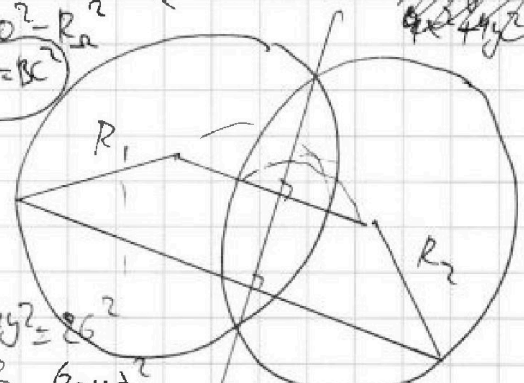
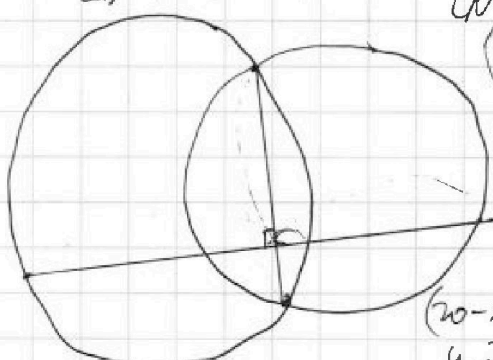
$AC = ?$   
 $BC = ?$   
 $\frac{CK}{KL} \cdot \frac{LA}{AB} = 1$   
 $\frac{KA}{AA} = \frac{LA}{LB} = \frac{AC}{CB}$   
 $\frac{AC}{CM} = \frac{AK}{KM} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AL}{LB}$   
 $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{2KM} \Rightarrow \frac{AK}{2KM} = \frac{AL}{LB}$   
 $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MK}{KA} = 1$   
 $\frac{AK}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{LB}{KA} = 1$

$\frac{2KM}{AK} = \frac{LB}{\frac{1}{2} \cdot \frac{LA}{LB}}$



$AN = 20$   
 $AN = AC + x$   
 $AN = \frac{1}{2} BH$   
 $AN^2 + NA^2 = AM^2$   
 $AC = AM + 2x$   
 $d_{KL}^2 = 20^2 + y^2$   
 $AN = AM + x$   
 $KN = y$

$(20-x)^2 + y^2 = 26^2$   
 $CN \cdot CA = CO^2 - R_2^2$   
 $d^2 + 13^2 = BC^2$



$(20-x)^2 + y^2 = 26^2$   
 $4x^2 + 4y^2 = (20-x)^2$