



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1. \quad a_5 = 6x + 18 = a_4 + 4d \quad a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_4 + 6d$$

$$a_{11} = -3x^2; \quad a_{11} = a_0 + 10d \Rightarrow \frac{a_5 + a_{11}}{2} = a_4 + 7d = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2}$$

$$a_{11} - a_5 = -3x^2 - 6x - 18 = 6d \Rightarrow d = -\frac{x^2 + 2x + 6}{2}$$

Где  $a_1$  - первый член арифм. прогрессии, а  $d$  - шаг.

Тогда  $a_4 + d = \frac{a_5 + a_{11}}{2}$

$$(x^2 - 4x)^2 - \frac{x^2 + 2x + 6}{2} = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - x^2 - 2x - 6 = -3x^2 + 6x + 18$$

$$2(x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 8x - 24 = 0$$

Заменим  $t = x^2 - 4x$ :  $2t^2 + 2t - 24 = 0$

$$t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$$

Обратная замена:  $t = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 7$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Проверка:

	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	
$x = 2$ :	30	23	16	9	2	-5	-12	+ верно $\Rightarrow x = 2$
$x = 2 + \sqrt{7}$	$30 + 6\sqrt{7}$	$19,5 + 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 - 3\sqrt{7}$	$-12 - 6\sqrt{7}$	$-22,5 - 9\sqrt{7}$	$-33 - 12\sqrt{7}$	+ верно $\Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}$
$x = 2 - \sqrt{7}$	$30 - 6\sqrt{7}$	$19,5 - 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 + 3\sqrt{7}$	$-12 + 6\sqrt{7}$	$-22,5 + 9\sqrt{7}$	$-33 + 12\sqrt{7}$	+ верно

Проверка:  $x = 2$ :  $a_5 = 30$ ;  $a_7 = 16$ ;  $a_{11} = -12$  верно можно проверить, но

$$a_7 = 9; d = -7 \text{ задает прогресс.} \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 + \sqrt{7}: a_5 = 30 + 6\sqrt{7}; a_7 = 9; a_{11} = -33 - 12\sqrt{7} \text{ можно}$$

проверить, но прогресс задана:  $d = -10,5 - 3\sqrt{7}$ ;  $a_7 = 72 + 18\sqrt{7}$

$$x = 2 - \sqrt{7}: a_5 = 30 - 6\sqrt{7}; a_7 = 9; a_{11} = -33 + 12\sqrt{7} \text{ можно проверить, но}$$

$$a_7 = 72 - 18\sqrt{7}; d = -10,5 + 3\sqrt{7} \text{ задает прогресс.} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{7}$$

Ответ:  $\{2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

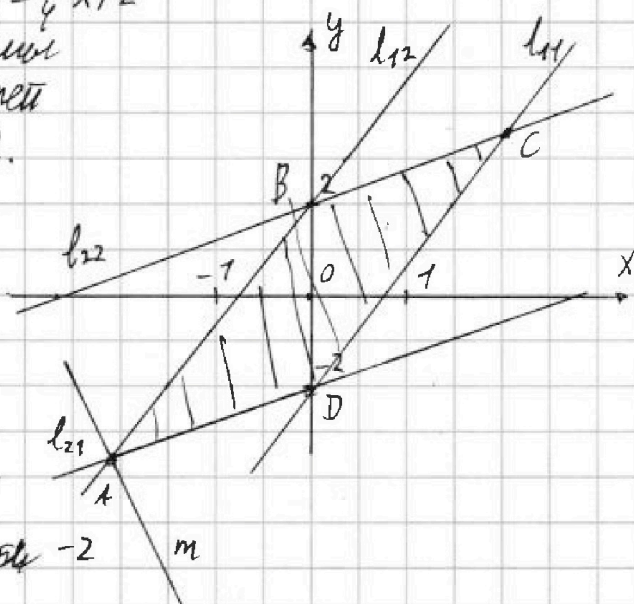
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \quad (+1) \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \quad (+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 3y-4x \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x-2 \leq y \leq \frac{4}{3}x+2 \\ \frac{3}{4}x-2 \leq y \leq \frac{3}{4}x+2 \end{cases} \text{ построим границы } l_{11}: y = \frac{4}{3}x-2; \\ l_{12}: y = \frac{4}{3}x+2; \quad l_{21}: y = \frac{3}{4}x-2; \\ l_{22}: y = \frac{3}{4}x+2$$

Таким образом решим систему  
кер. в. Будет пересечение областей  
между  $l_{11}$  и  $l_{12}$  и  $l_{21}$ ,  $l_{22}$ , т.е.

ABCD, т.е. кер. в. нестрогие, но  
границы включ.



Пусть  $14x+7y=7 \cdot m$

$\Rightarrow y = m - 2x$ , требуется

миним.  $7m$ , то есть минимиз.  $m$ ,

$y = m - 2x$  — прямая  
параллельная с угловым коэффициентом  $-2$

и проходящая через  $T(0; m)$ , для наименьш. мин  $m$  можно  
просто постепенно ее увелич. до первого пересеч. ABCD, т.е.  
то, что углов. кер. в. По графику можно понять, то  
 $y = m - 2x$  пройдет чрез т. А. возьмем т. А:

$$l_{12} \cap l_{21} = A \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{4}{3}x_A + 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x_A + 2 = \frac{3}{4}x_A - 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): \frac{16-9}{12}x_A = -4 \quad \frac{7}{12}x_A = -4 \quad x_A = \frac{-48}{7} \Rightarrow y_A = -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow \text{т. А } A\left(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7}\right) \Rightarrow -\frac{50}{7} = m - 2 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) \Rightarrow m = 2 \cdot \frac{-48}{7} - \frac{50}{7} =$$

$$= -\frac{96+50}{7} = -\frac{146}{7} = m \Rightarrow 14x+7y=7 \cdot m = -146 \text{ — мин. значение } 14x+7y \text{ углов. системы кер. в.}$$

Ответ:  $-146$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} A = 3q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \textcircled{2}: \begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 3q^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: A = 3q^2 = (m-n)(m-n+9) \Rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{3} \\ a_1 b_1 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow a_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow m-n = 3k; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3q^2 = 3k(3k+9) \Rightarrow q^2 = 3k(k+3) \Rightarrow q^2 : 3$$

$$\Rightarrow q^2 = 3k \quad \text{м.к. } q \text{ - простое то } q=3 \Rightarrow 9 = 3k(k+3)$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k = 3 \quad k^2 + 3k - 3 = 0$$

$D = 9 + 4 \cdot 3 = 3 \cdot 7$  - не полн. квадрат  $\Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow$  противоречие, м.к.  
 м.к.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow k = m-n$ , но  $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \textcircled{1}$  - вариант ~~не~~ - Нет решений  $\Rightarrow \emptyset$

$$\textcircled{2}: (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \quad (*)$$

$$\begin{cases} mn(m-n+3) = 3q^2 > 0 \\ m-n+3 > 0 \Rightarrow m-n+9 > 0 \end{cases} \quad \text{м.к. } m > 0 \text{ и } n > 0, \text{ м.к. } n, m \in \mathbb{N}$$

$$(*): (m-n)(m-n+9) = 13p^2;$$

$$\text{м.к. } 13p^2 > 0 \text{ и } m-n+9 > 0 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$$

$$\text{пусть } d = m-n, \text{ тогда } d \in \mathbb{N} \text{ и } d > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}$$

$$d(d+9) = 13p^2, 0 < d < d+9; p \text{ - простое, тогда все}$$

случаи:

$$\textcircled{1} \begin{cases} d = 1 \\ d+9 = 13p^2 \end{cases} \text{, но тогда } 13p^2 = 10 \text{ нет целых реш. } \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} d = p \\ d+9 = 13p \end{cases} \Rightarrow 13p - p = 9 = 12p, \text{ тоже нет реш.}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} d = p^2 \\ d+9 = 13 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} d = 13p \\ d+9 = p \end{cases} \text{, но тогда } 13p < p \Rightarrow 13 < 1 \text{ - Нет реш.}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} d = 13p^2 \\ d+9 = 1 \end{cases} \text{, но тогда } 13p^2 < 1 \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} d = 13 \\ d+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 22, \text{ нет целых реш. } \Rightarrow \text{нет реш.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом у (1), (2), (4), (5), (6) нет реш., решим (3):

$$\begin{cases} a = p^2 \\ a + q = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = q \\ a = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \text{ м.к. } p\text{-простое} \\ a = 4 = m - n \end{cases}$$

вернемся в систему: 
$$\begin{cases} mn(m-n+3) = 3q^2 \Rightarrow mn \cdot 7 = 3q^2 \\ m-n=4 \\ p=2 \end{cases}$$

м.к.  $q$ -простое и  $m \cdot n \cdot 7 : 7$ , а  $3$  не делит  $7 \Rightarrow q = 7$

$$\Rightarrow m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow m \cdot n = 21 \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 21 \\ m - n = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(n+4) = 21 \Rightarrow n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 21 = 4 \cdot 25 \quad \text{не цел. уст, м.к. } n \in \mathbb{N}$$

$$n = \frac{-4 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = -7 \\ n = 3 \Rightarrow m = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n=3; m=7), \text{ проверим: } \begin{cases} 3 \cdot 7(7-3+3) = 3 \cdot 7^2 - \text{верно} \rightarrow (7; 3) \\ (7-3)(7-3+9) = 13 \cdot 2^2 - \text{верно} \end{cases}$$

Ответ: (7; 3).

ед. пары (7; 3)

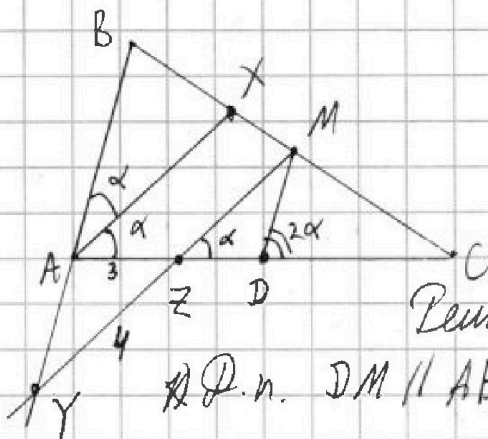


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AX$  - высота;  
 $M$  - ср.  $BC$ ;  $ZM \parallel AX$ ;  $ZM \cap AC = Z$   
 $ZM \cap AB = Y$ ;  $AC = 12$ ;  $AZ = 3$ ;  $YZ = 4$   
 Найти:  $BC$  - ?

Решение:

Р.п.н.  $DM \parallel AB$ ;  $D \in AC \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha = \angle MDC$  как угол при вершине  $M$ .  
 $AX \parallel ZM \Rightarrow \angle XAC = \alpha \Rightarrow \angle MZC = \alpha = \angle XAC$  (как соотв. углы при паралл. пр.п.)

$\angle MDC = 2\alpha$  - внешний угол  $\triangle ZDM$ ;  $\Rightarrow \angle MZD + \angle ZMD = \angle MDC = 2\alpha$   
 $\Rightarrow \angle ZMD = \alpha \Rightarrow \triangle ZMD$  -  $\triangle$   $\Rightarrow ZD = DM$ .

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$  (по 2 равн. углам и отн. смежных углов)

$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{MC}$  (по отн. подобия);  $\frac{BC}{MC} = 2$ , т.к.  $M$  - ср.  $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2 \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{AC}{2} = 6 \Rightarrow$  т.к.  $AZ + ZD + DC = AC \Rightarrow ZD = AC - AZ - DC = 12 - 3 - 6 = 3$

$\Rightarrow DM = ZD$  (как см. в  $\triangle$  пр.п.)  $\Rightarrow DM = 3$

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$   $k=2 \Rightarrow AB = 2 \cdot DM = 6$ .

$\triangle AZY = \triangle DZM$ : ( $\angle AZY = \angle MZD$  как верт.)

( $AZ = 3$ ;  $ZD = 3$ ;  $\angle YAZ = \angle ZDM = 180^\circ - 2\alpha$ )

$YZ = ZM = 4$ . По кос. в  $\triangle ZMD$ :  $ZD^2 + ZM^2 - 2 \cdot ZD \cdot ZM \cdot \cos \alpha = MD^2$

(по т. косинусов)  
 $\Rightarrow 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 9 \Rightarrow 16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9} = \cos 2\alpha$

По кос. в  $\triangle ABC$ :  $AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 2\alpha = BC^2$

$6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-\frac{1}{9}) = 180 + 2 \cdot 7 \cdot 4 = 196 = BC^2 \Rightarrow BC = \pm 14$

$BC = -14$  - негод.  
 $\Rightarrow BC = 14$  - год. м.к.  
 $BC$  - длина.

Ответ:  $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ 4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y & (2) \end{cases}$$

Введем  $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$ , т.к. каждая из слагаемых функции опред. на  $x \geq 0$ , т.к. каждая из слагаемых на интервале  $x \in [0; +\infty)$  — возраст. функциями, то  $f(x)$  также возраст. на  $x \in [0; +\infty)$ , т.е. обратим опред.

Тогда (2) имеет вид:  $f(x) = f(y)$ , если

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$  — не удовл. усл.  
по опред. возрастающ. ф.  $\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = y \end{cases}$  — удовл. условие  
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  — тоже не удовл.  $\Rightarrow$  (2) ур.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ x = y; x \geq 0 \end{cases}$$

Решим (1): пусть  $a = \sqrt{x+6}$ ;  $b = \sqrt{5-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = x+6+5-x-2\sqrt{x+6}\sqrt{5-x} = 11-2\sqrt{x+6}\sqrt{5-x}$$

$$(x+6)(5-x) = 30-x-x^2$$

$$\Rightarrow (1): a-b+5+(a-b)^2-11=0$$

$$\text{Заменим } t = a-b \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

$$t=2 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{5-x}$$

$$x+6 = 4 + 5 - x + 4\sqrt{5-x} \Rightarrow 2x+2 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow x+1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 = 20-4x \Rightarrow x^2+6x-19=0$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-12x+9 = 20-4x \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-8x-11=0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 11 = 16 \cdot 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{0 \pm 4\sqrt{15}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ единств. возможные корни}$$

$$t = -3 \Rightarrow \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x} \quad \begin{cases} x+6+9+6\sqrt{x+6} = 5-x \\ 6\sqrt{x+6} = -2x-10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$t = -3 \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3 \quad \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6+9+6\sqrt{x+6} = 5-x$$

$$6\sqrt{x+6} = -2x-10$$

$$\begin{cases} 9x+54 = x^2+25+10x \\ -x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+6} = -x-5 \\ x^2+25+10x = 9x+54 \\ x-5 \end{cases}$$

не удовлетв. м.к. из ур(2)  
отрицательные  $x \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ x \geq 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \text{верно} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $\left(1 + \frac{\sqrt{15}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е.  $\frac{3n^2}{8} \left( \frac{n^2}{4} - 1 \right)$  и каждая из этих ушкальных раскр-ов. даст 4 раскр-без-поворота, т.е.

$$\frac{3n^2}{8} \left( \frac{n^2}{4} - 1 \right) \text{ из } \frac{3n^2}{8} \left( \frac{n^2}{4} - 1 \right)$$

Пусть  $x$  — количество остальных, тогда т.к. все предыдущие были симметричны, эти несимм., каждая даст по 4 пов. раскр-без-поворота; тогда из  $\sum d_i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$  след.

$$2 \cdot \frac{n}{2} + n^2 - 2n + n^2 + 4x = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$4x = \frac{n^4}{2} + \frac{n^2}{2} - 2n^2 + n \Rightarrow x = \frac{n^4}{8} - \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{4}$$

Тогда всего раскр-ов:  $\frac{n^4}{8} - \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} =$   
 $= \frac{n^4}{8} - \frac{5n^2}{8} + \frac{n}{2} = \frac{10000}{8} - \frac{500}{8} - 50 = 1250$

Остальными  $\frac{3n^2}{8}$  на  $\frac{n^2}{4} \cdot \frac{(n^2-3)}{2} = \frac{n^2}{8} \cdot \frac{(n^2-3)}{2}$

где  $\frac{n^2}{4}$  выдраны первую т. в верх. и в ниж. ряду;

$\frac{n^2}{2}$  выдраны из остальных ряд т. не симм. и не совм. этой

и  $\frac{n}{2}$  для избавления от порядка точек

Всего:  $\frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - n + \frac{n^2}{8}(n^2-4) = 25 + 50 - 10 + 50 \cdot 23 =$   
 $=$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



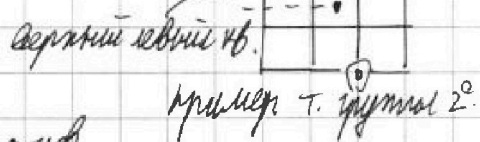
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недопустима!

2° Группа: пара точек не лежит на одной диагонали, но симметр. относительно центра. Выбрав одну из  $\frac{n^2}{4}$  т. в верхнем левом квадрате

в  $\frac{n}{2}$  случ. т. попадет на диаг., то идет к группе 1°, в остальных  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$  случ. они не лет. на диаг. и построив



симметр. относительно этой точки получим  $\frac{n}{2} - \frac{n}{2}$  уникальных раскр. Без поворота с поворотом, каждая из которых, поверн. на 4 раза получится еще 4 от каждой раскраски без поворота. Итого  $n^2 - 2n$  раскр.-без-пов. из  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$  раскр.-с-пов.

3° Группа - пара точек, симметр. относ. одной из осей симм. проходя через центр кв. и парал. одной из сторон.

Точки лежат на одной из осей симм. и теперь строим т. симметр.



Точки не должны лежать на главной диагонали квадрата

пример, гр. 3°

3.1° Точки лет. на ~~одной~~ главной диаг. кв., тогда т.  $\frac{n}{2}$  также построив т. симметр. относ. одной из осей получили 4 нов. раскр. без-повн. из  $\frac{n}{2}$  т. т.е.  $2n$

3.2° Не лежат на  $n$  диагоналей  $\Rightarrow$  точки  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ , каждая из них можно отложить симметр. т. относ. к осей и получить 2 пары раскр. без-пов., каждая из кот. даст 4 нов. раскр.-без-пов., но каждая раскр. с-повор. считается дважды, т.е. их всего  $(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}) \cdot 2 \cdot 2 = \frac{n^2}{2} - n$  и каждая даст еще по 4 нов., т.е.  $n^2 - 2n$  раскр.

Таким образом гр. 3°:  $n^2$  раскр. без повор. из  $\frac{n^2}{2} - n$  раскр.-с-пов.

4° ~~Остальные, их всего  $\frac{n^2}{4}$  + выбрать первую т. в  $\frac{n^2}{4}$  мест;  $(\frac{3n^2}{4} - 3)$  + выбрать втор. т. и делить на 2, т.к. они симм. относительно друг друга~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нет поворота, тогда всего  $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$  способов покрасить два узла в белый, где  $n=10$ .

Пусть есть  $m$  уник. раскрасок, попарно которые различны ~~до~~ с учетом поворота, т.е. если одна поворотом переходит в другую, то они равны) тогда  $m$  и есть ответ на вопрос.

Пусть есть шара  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$  кол-во раскрасок, повернув которые можно получить очередную из  $m$  раскрасок, тогда  $\sum_{i=1}^m d_i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ , т.к. любая раскраска перейдет в какую-то из  $m$  раскрасок с поворотом. т.к. так были выбраны раскраски с поворотом.

Возьмем раскр. с поворотом на группу  $5$  раз

$1^{\circ}$  2 точки (покраш. узлы) лежат на диагонали и симметр. относительно центра квадрата (т.к. квадрат  $9 \times 9$ , то всего 100 т.) и ~~можно их считать узлами на тр.~~

Такие раскр. задаются одной пар. кой, удал. от центра, всего их может быть 5 различных.

на рис. 1 изображены все 5 т. удаленных раскр. в группе  $1^{\circ}$ , остальные раскр. этой группы получаются поворотом, поэтому всего 5.

Каждая раскр. такой группы даст по 2 раскр.-без-поворота, причем уникальные, т.к. одна раскр. без поворота не может перейти к двум раскр.-с-поворотом, т.е. эта группа даст  $\frac{10}{2}$  раскр.-без-п и ее размер  $\frac{10}{2}$  раскр.-с-пов.

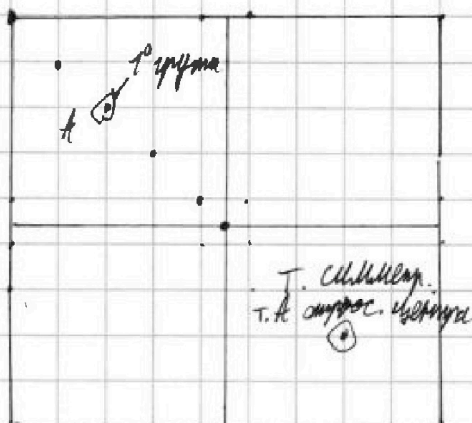


рис 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$5 \geq x \geq 0$

$x+6+5-y-2\sqrt{(x+6)(y-4)}$   $a=\sqrt{x+6}; b=\sqrt{y-4}$

$\sqrt{x+6}-\sqrt{y-4}+5=2\sqrt{(x+6)(y-4)}$   $x=3: 3 \rightarrow \sqrt{9}$   $a \neq b = 7-1$   $a=\sqrt{11-b^2}$

$\sqrt{x+6}+5=2\sqrt{(x+6)(y-4)}$   $\sqrt{x+6} = 2\sqrt{(x+6)(y-4)}$   $11+2\sqrt{30-x^2-x}$

$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2} = 2\sqrt{ab}+a+b$   
 $k \cdot b = 30-x^2-x$

$(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2 - 11 = 5 + \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$

$2ab = 5+a-b$   $(a+b)^2 - 11 = 5+a-b$

$2ab - a + b - 5 = 0$   
 $a(2b-1)$

$\sqrt{2b-1} = \sqrt{4-\frac{b^2}{2}} + 5$

$(a-b)^2 = 11 - 2\sqrt{30-x-y^2}$

$a-b+5+(a-b)^2-11=0$   $\sqrt{x+6} = \sqrt{y-4} + 2$

$\begin{cases} a-b=2 \\ a-b=-3 \end{cases}$

$\sqrt{b^2} = \sqrt{y-4} + 2$   
 $x+6 = 5-x+4+4\sqrt{y-4}$

$1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \leq 5$   
 $\sqrt{15} \leq 8$

$4x^2+9-12x=20-4x$   $4x^2-8x-11=0$   
 $64+4 \cdot 4 \cdot 11 = 16(15)$

$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = 13p^2$   $x = \frac{8 \pm 4\sqrt{15}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{15}$

$B = m^2n - mn^2 + 3nm = 3q^2$   $p, q - \text{простые}$

$B = mn(m-n+3) = 13q^2$

$a^2+9a-13p^2=0$

$A = (m-n)(m-n+9) = 3q^2 = 27$

$a^2+3a-3=0$

$D = 81 + 4 \cdot 13p^2$

$3a(3a+9) = 27$

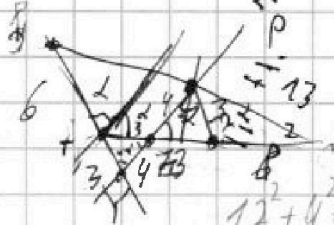
$9+3 \cdot 4 = 3 \cdot 7$

$mn(m-n+3) = 13p^2$   $B = 3q^2 = mn(m-n+3)$   $n=1: m(m+2) = 3q^2$

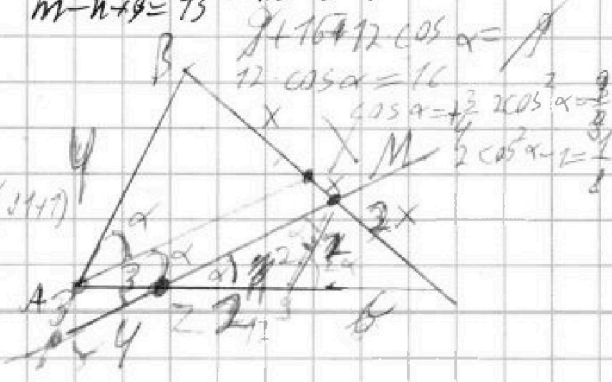
$3k(3k+2) = q^2 \rightarrow 3k+2 = q^2$

$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$

$m-n=p$   $m-n=4$   
 $m-n+9=13$



$12^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 =$   
 $-144 + 16 + 12 = 144 + 4 = 4(34+1)$   
 $2\sqrt{62}$



$9+16+12 \cos \alpha =$   
 $12 \cos \alpha = 16$   
 $\cos \alpha = \frac{4}{3}$   $2 \cos^2 \alpha = \frac{16}{9}$   
 $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$   
 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$a_5 = 6x + 7d$ ;  $a_0 = 6d$ ;  $a_{11} = -3x^2$

$a_8 = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2}$

$a_{11} = (x^2 - 4x)^2$

$6d = \frac{-3x^2 - 6x - 18}{2}$

$d = -\frac{x}{2} - x - 3$

$(x^2 - 4x)^2 - \frac{x}{2} - x - 3 = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2}$

$2(x^2 - 4x)^2 - x^2 - 2x - 6 = -3x^2 + 6x + 18$

$t^2 + t - 12 = 0$

$t = 3 = x^2 - 4x$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

$D = 16 + 12 = 28$

$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$

$4x - 3y = 6$

$\frac{10}{3}x - 2 \leq \frac{14}{x+2}$

$\frac{40-33}{12}x \leq \frac{14}{x+2}$

$x \leq \frac{48}{7}$

$x \leq \frac{48}{7}$

$|4x - 3m + 6x| \leq 6$

$|3x - 4m + 8x| \leq 8$

$\frac{11}{4}x + 2 \geq m \geq \frac{11}{4}x - 2$

$\frac{10}{3}x + 2 \geq m \geq \frac{10}{3}x - 2$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$

$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + 4$

$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$

$x+6+5-y+5-2\sqrt{(x+6)\cdot(5-y)} = 4(30-x-y^2)$

$5x - y - 4y^2 - 104 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y} - 5x - 4y^2$

$25 - 4y^2 - 104 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y}$

$-79 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y}$

$-79 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y}$

$-79 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y}$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$30x - 3m \leq 6$

$4x - 3y = 6$

$3x - 4y = 8$

$y = \frac{3}{8}x + 2$

$y = \frac{3}{8}x + 2$

$y = -2x + m$

$x = \frac{4.24 + 4}{23}$

$x = \frac{4.24 + 4}{23}$

$y = m - 2x$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$10x - 3m \leq 6$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$

$2x + y = m$