



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



~~✎~~ [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .

~~✎~~ [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.

~~✎~~ [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

~~✎~~ [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

~~✎~~ [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

~~Пусть~~ Пусть  $u$  — нек. ариф. прогрессия  $[a]$ , с  
наименьшим членом  $a_0$  и разностью  $d$ , тогда заметим

$$a_{10} + a_4 + a_4 = \text{~~3a_0 + 18d~~}, \quad 3a_0 + 18d = 3(a_0 + 6d) = 3a_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 12 - 18x = 3(x^2 - 2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4 - 6x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0, \quad \text{заметим при } x=1, \quad f(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)u(x), \quad \text{выберем } u(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4,$$

заметим  $u(1) = 0 \Rightarrow u(x) = (x-1)v(x)$ , выберем

$$v(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ:  $x = 1; x = 1 + \sqrt{5}; x = 1 - \sqrt{5};$

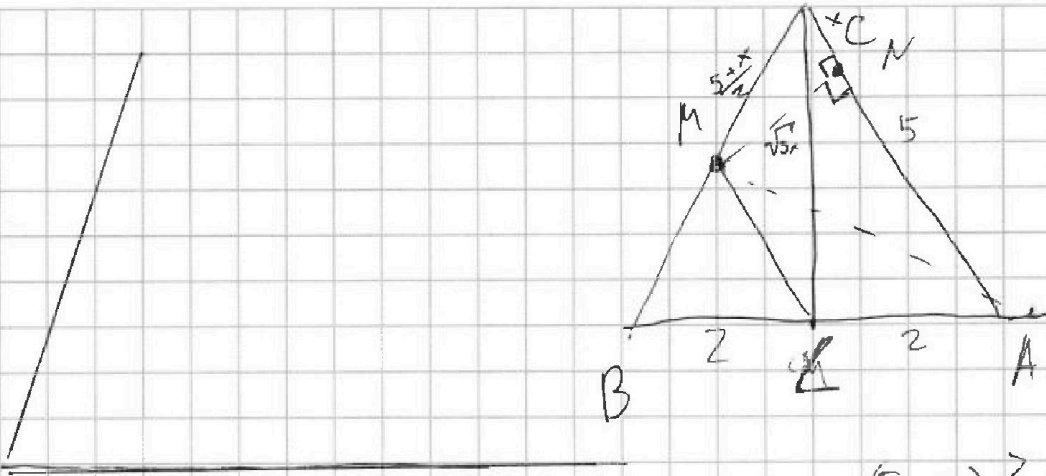


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

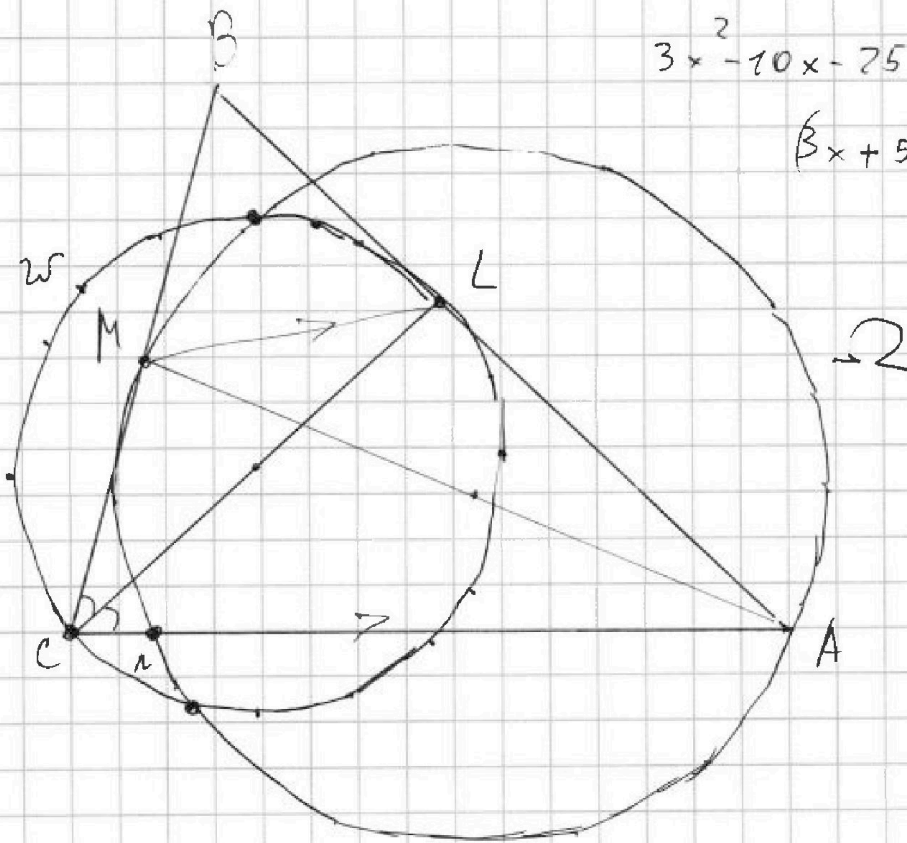


$$5x + x^2 = \left(\frac{5+x}{2}\right)^2$$

$$20x + 4x^2 = 25 + 10x + x^2$$

$$3x^2 - 10x - 25 = 0$$

$$(3x + 5)(x - 5)$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

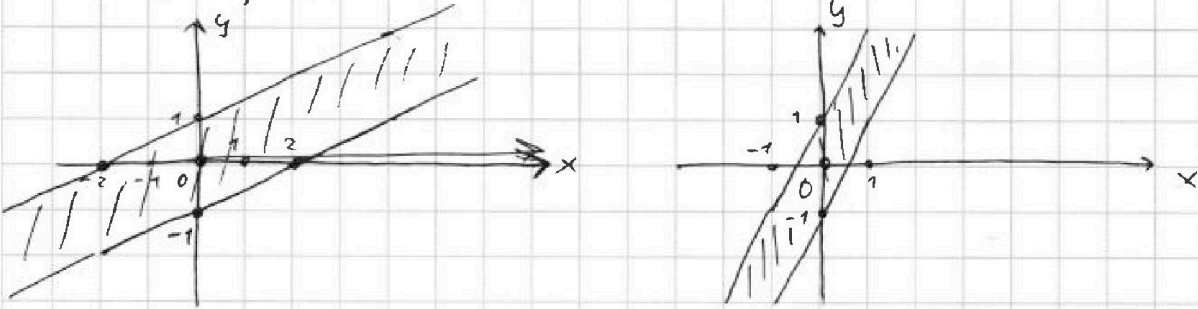
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

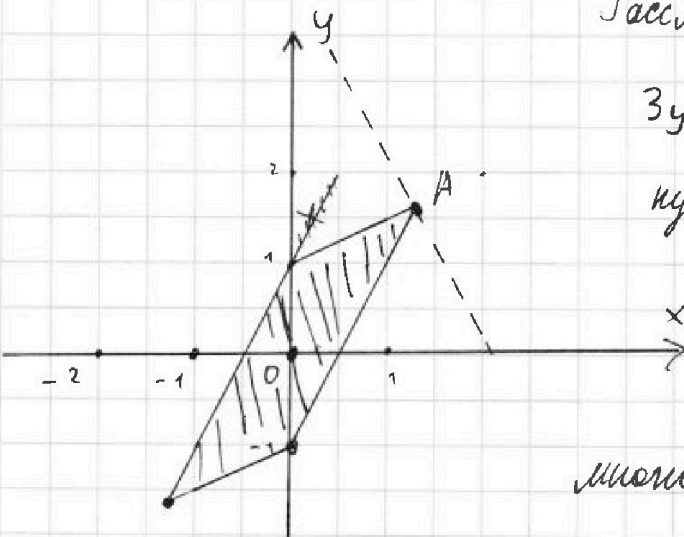
№ 2

Нарисуем графики функций  $|x-2y| \leq 2$  и  $|2x-y| \leq 1$



Тогда Пересечение этих графиков — множество всех возможных пар  $x, y$ , удовлетворяющее условию.

Вот оно:



Рассмотрим лн-во прямой

$3y + 6x = a$ , Тогда ~~мы~~

нужно найти максимален  $a$ , при

котором

прямая  $3y + 6x = a$  все

еще будет проходить через

множество значений, очевидно, что

максимум  $a$  получится когда  $3y + 6x = a$

проходит через точку  $A$  на графике, тогда посчитаем координаты

точки  $A$ : 
$$\begin{cases} x_A - 2y_A = -2 \\ 2x_A - y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_A - 4y_A = -4 \\ 2x_A - y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y_A = -5 \\ y_A = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A - 2 \cdot \frac{5}{3} = -2 \\ x_A - \frac{10}{3} = -2 \\ x_A = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{max } 3y + 6x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y_A + 2x_A = 4 \\ 2x_A - y_A = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{" " } \\ + \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 3y_A = 5 \\ x_A = \frac{1+y_A}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{5}{3} \\ x_A = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\max} = 3y_A + 6x_A = 5 + 6 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\text{Заметим } A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 + 7(m+2n) - 7 = (m+2n)(m+2n+7)$$

$$B = m^2n + 2m^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Заметим  $(m+2n)$  и  $(m+2n+7)$  - разной четности  $\rightarrow A \equiv 2$

и  $(m)$ ,  $(m+2n+9)$  - разной четности  $\rightarrow B \equiv 2$

$$\Rightarrow 11p^2 \equiv 2, 75q^2 \equiv 2 \Rightarrow p^2 \equiv 2, q^2 \equiv 2, \text{ но } p \text{ и } q -$$

целоства  $\Rightarrow p=q=2 \Rightarrow$

Разберем 2 случая 1)  $B=44, A=300$  и 2)  $B=300, A=44$

1)  $mn(m+2n+9) = 44$ . Одно из чисел  $m, n, m+2n+9 \equiv 11$ ,  
если  $\geq 10$  ~~то  $m+2n+9 \geq 11$~~  <sup>либо  $m$  или  $n$</sup>  ~~или  $m \geq 11 \Rightarrow m+2n+9 \geq 11 \Rightarrow$~~  <sup>или</sup>

$$\Rightarrow B \geq 121 > 44 \Rightarrow \text{только } m+2n+9 \text{ может быть } \equiv 11$$

$$\Rightarrow \text{или } m+2n+9 = 11 \text{ или } 27 \text{ или } 44 \Rightarrow \begin{cases} m+2n=2 \\ mn=4 \end{cases} \vee \begin{cases} m+2n=13 \\ mn=7 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \text{ или } \begin{cases} m+2n=35 \\ mn=7 \end{cases}$$

$m, n \geq 1 \Rightarrow m+2n \geq 3 \Rightarrow$  1 вариант невозможен, а если

$mn=7 \Rightarrow m=n=1 \Rightarrow m+2n=3 \neq 35 \Rightarrow$  3 вариант невозможен

если  $mn=7 \Rightarrow$  либо  $m=7, n=1 \Rightarrow m+2n=9 \neq 13$  либо  $m=1, n=7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m+2n=9 \neq 13 \Rightarrow B \neq 44 \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow A = 44 \text{ сделаем замену } x = m + 2n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = x(x-4) = 44 \Rightarrow x^2 - 4x - 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+4) = 0$$

$$\text{п.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m, n \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow m + 2n = 11, \quad B = mn(m + 2n + 9) = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mn = 15. \Rightarrow \begin{cases} mn = 15 \\ m + 2n = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{15}{m} \\ m + 2n = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m + \frac{30}{m} = 11 \Rightarrow m^2 - 11m + 30 = 0 \Rightarrow (m-6)(m-5) = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ или } m = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{2} \text{ или } n = 3, \text{ но } n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 5, \quad n = 3. \text{ — единственное решение.}$$

$$\underline{\text{Ответ: } m = 5; n = 3.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$k^2$~~

.....

$$(k^2 - 1) - 1$$

$$(k^2 - 2) + (k^2 - 6) + (k^2 - 10) + \dots + (k^2 - 2 - 4(k^2 - 2)) + \frac{(k-2)^4}{8}$$

$$(k^2)(k-1) - 4 \cdot (1+2+3+\dots+(k-2))$$

$$(k^2)(k-1) - 2 \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

$$(k^2 - 2k + 2)(k-1) + \frac{(k-2)^4}{8}$$

$$k^4 - 3k^3 + 4k^2 - 2k + 16 +$$

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

$$k^3 - 3k^2 + 4k - 2$$

$$(1 \pm \sqrt{5})^2 = 6 \pm 2\sqrt{5}$$

$$a_{10} - a_0 = 18 \pm 18\sqrt{5}$$

$$(1 \pm \sqrt{2})^2 = 1 + 2 \pm 2\sqrt{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = (3 \pm 2\sqrt{2} - 2 \mp 2\sqrt{2})^2 = 1$$

$$a_4 = 6 - 9 \pm 9\sqrt{2} = -3 \pm 9\sqrt{2}$$

$$a_8 = (6 \pm 2\sqrt{5} - 12 \mp 2\sqrt{5})^2 = 36$$

$$a_{10} = 2^4 \pm 18\sqrt{2}$$

$$a_4 = 6 - 9 \mp 9\sqrt{5} = -3 \mp 9\sqrt{5}$$

$$a_{10} - a_6 = 26 \pm 18\sqrt{2}$$

$$a_{10} = 54 \pm 18\sqrt{5}$$

$$a_6 - a_4 = 4 \mp 9\sqrt{2}$$



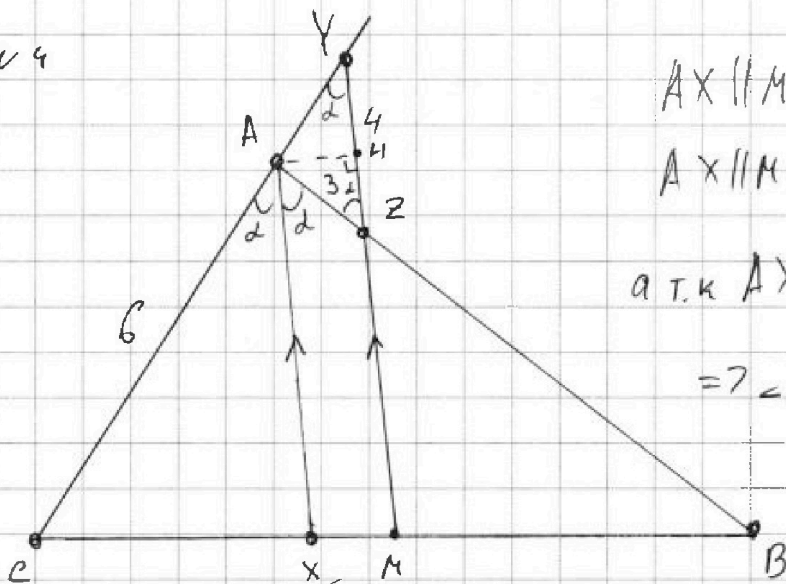
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$AX \parallel MY \Rightarrow \angle CAX = \angle CUM$$

$$AX \parallel MY \Rightarrow \angle XAB = \angle AZY$$

$$\text{а т.к. } AX - \text{диалла} \Rightarrow \angle CAX = \angle XAB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \angle AYZ \Rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle AZY - \text{р/б } \Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AY = AZ = 3.$$

$$AX \parallel MY \Rightarrow \text{по теореме Фаллеса} \frac{CX}{CA} = \frac{XM}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CX}{xM} = 2, \text{ Тогда пусть } CX = 2a \Rightarrow XM = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = CM = CX + XM = 3a \Rightarrow \text{по обобщенной}$$

$$\text{теореме Фаллеса } \frac{AZ}{xM} = \frac{ZB}{MB} \Rightarrow ZB = AZ \frac{MB}{xM} = 3 \frac{3x}{x} =$$

$$= 9. \text{ Проведем высоту } AM \text{ в } \triangle AYZ, \text{ т.к. } \triangle AYZ - \text{р/б } \Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM - \text{ медиана} \Rightarrow HZ = 2 \Rightarrow \cos \angle = \frac{HZ}{AZ} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\angle = 2 \cos^2 \angle - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\text{по теореме косинусов } CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 2\angle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 16 = 196 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = 14$$

Ответ:  $BC = 14$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.в.

Заметим, если мы рассмотрим все раскраски, выставляя те, которые можно получить поворотом, то их можно разбить на 2 группы: центральносимметричные раскраски и нецентральносимметричные. Тогда среди всех раскрасок будет по 2 одинаково центральных и по 4 одинаково нецентральных. Всего раскрасок  $\frac{100 \cdot 99}{2}$ , а центральносимметричных  $\frac{100}{2}$ , т.к. у каждой раскраски ~~будет~~ ~~существует~~ точка есть только одна центральносимметричная содержащая ее, а в каждой раскраске по 2 точки  $\Rightarrow$  "уникальные" (т.е. не получающиеся поворотом) раскрасок.

$$\left( \frac{100 \cdot 99}{2} - \frac{100}{2} \right) + \frac{100}{2} = \frac{100 \cdot 98}{8} + \frac{2 \cdot 100}{8} = \frac{100^2}{8} = \frac{10000}{8} = 1250 \text{ раскрасок}$$

Ответ: 1250

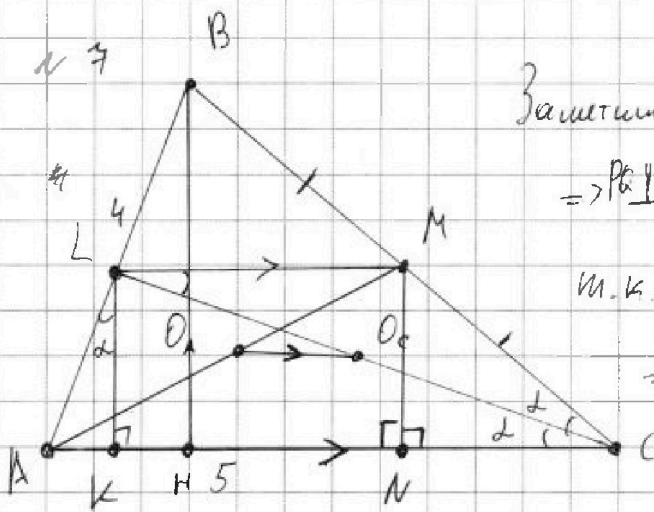




1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Защитим  $PQ$  - радиус  $\omega$  и  $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ \perp$  линии центров  $\omega$  и  $\Omega$   $OAO_c$ ,

т.к.  $PQ \parallel$  высоте к стороне  $AC \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ \perp AC \Rightarrow OAO_c \parallel AC$ ,

а тогда т.к.  $AO_A = O_{AM}$ ,  $CO_c = O_{CL}$ ,

$OAO_c \parallel AC$ , по теореме Фалеса  $LM \parallel AC$ ; т.к.  $M$  середина

$BC \Rightarrow LM$  - средняя линия  $\Rightarrow L$  - середина  $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow L$  и середина стороны и совпадают  $\Rightarrow ABC$  - р/во и

$AC = CB$ . Пусть  $AC = 2x \Rightarrow NC = 2x - 5$ .

Проведем  $LK$  - высоту из  $L$  на  $AC$ , т.к.  $LM$  - средняя

$\Rightarrow LM = \frac{AC}{2} = x \Rightarrow KN = LM = x \Rightarrow AK = 2x - x - (2x - 5) =$

$= 5 - x$ . Пусть  $\angle APB = 2\alpha \Rightarrow \angle ACL = \alpha \Rightarrow \angle CAL = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ALK = \alpha$  Посчитаем синус  $\alpha$  в  $\triangle ALK$  и в  $\triangle CLA$

получим  $\sin \alpha = \frac{AK}{AL} = \frac{5-x}{2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{AL}{AC} = \frac{2}{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5-x}{2} = \frac{2}{2x} \Rightarrow 5x - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow AC = BC = 2x = 5 \pm \sqrt{17}$ , заметим

$AC > AN > 5 \Rightarrow AC = 5 + \sqrt{17} \Rightarrow AC = BC = 5 + \sqrt{17}$

Ответ:  $5 + \sqrt{17}$



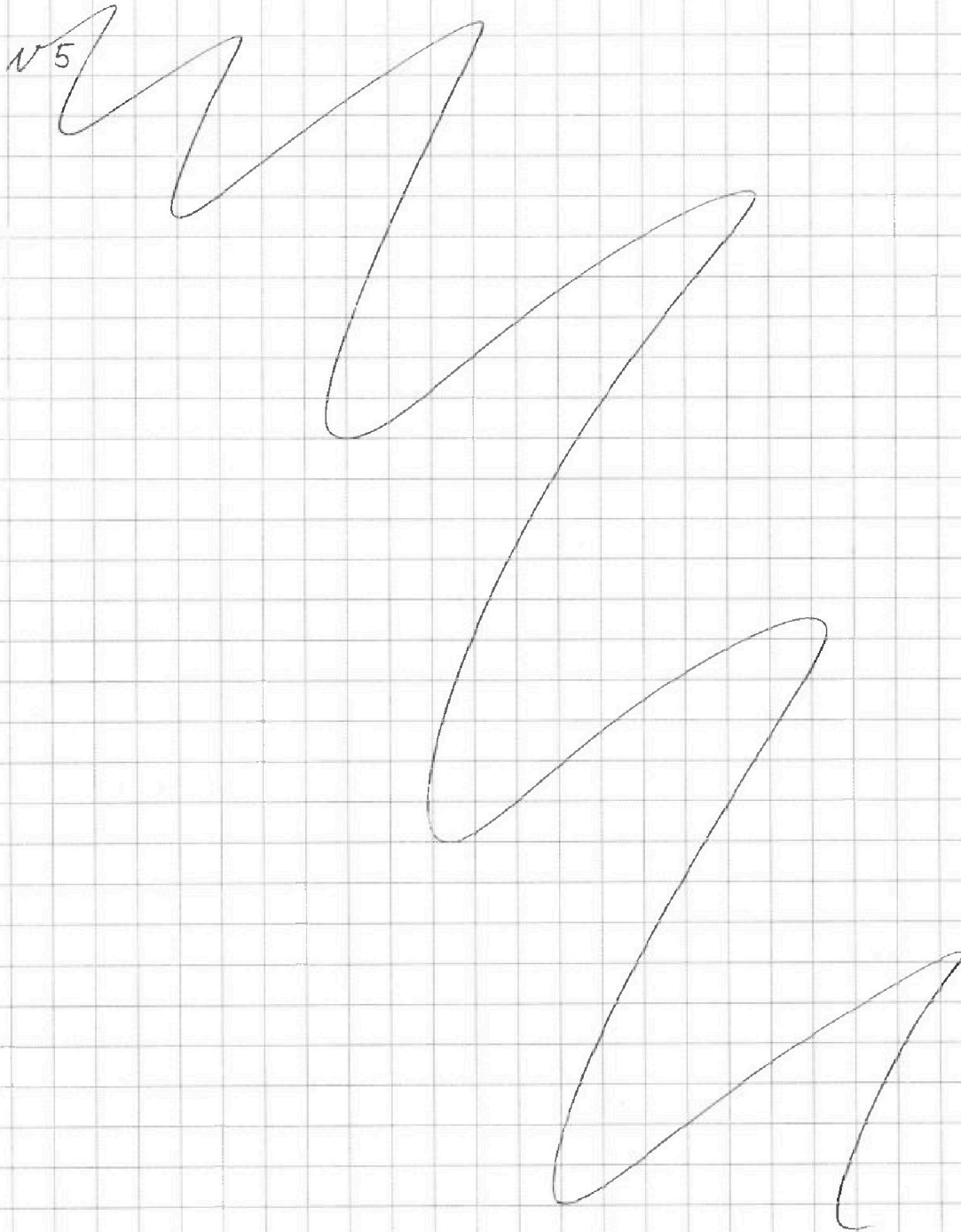
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ   

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







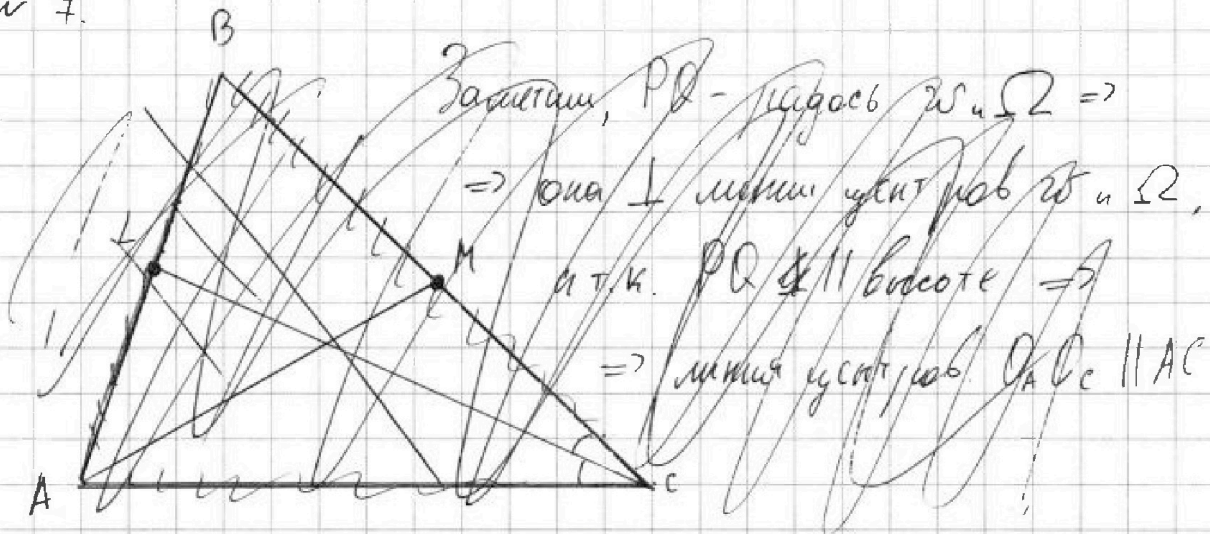
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.



$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

Заметим  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

Если  $m=1 \Rightarrow B = n(2n+10) = 2n(n+5)$ . Заметим, что  $11 \nmid 2$ ,  $75 \nmid 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  если  $B = 11p^2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow 2n(n+5) = 44 \Rightarrow n(n+5) = 22 \Rightarrow n = \emptyset$ , или  $n \in \mathbb{N}$

~~9~~ если  $B = 75q^2 \Rightarrow q=2 \Rightarrow 2n(n+5) = 75 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow n(n+5) = 75 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 5n - 150 = 0 \Rightarrow (n+15)(n-10) = 0$ , т.к.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 21 \cdot 14 \neq 11p^2$ , т.к.  $A \nmid 11$

Если  $n=1 \Rightarrow A = (m+2)(m-5)$   $(m+2)$  и  $(m-5)$  взаимно просты  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  если  $A = 11p^2 \Rightarrow A:2 \Rightarrow 11p^2:2 \Rightarrow p:2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow (m+2)(m-5) = 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow m=9, m=-6$ , но  $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m=9 \Rightarrow B = 9 \cdot 1 \cdot 20 = 180 \neq 75q^2$ , т.к.  $B \nmid 25$

если  $A=B = m(m+11) \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 4m - 4n = (m+2n)^2 - 4(m+2n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$B = m^2n + 2mn + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\text{если } B = 11p^2 \Rightarrow mn(m+2n+9) = 11p^2 \Rightarrow$$

возможны 3 случая  $m=n=p$ ;  $m=p, n=11$ ;  $m=11, p=n$ ;

$$1) m=n=p \Rightarrow m+2n+9=11 \Rightarrow 3p+9=11 \Rightarrow p=\frac{2}{3}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m, n) = \emptyset$$

$$2) m=p, n=11 \Rightarrow m+2n+9=p \Rightarrow p+31=p \Rightarrow \overset{31}{\cancel{p}} = 0 \Rightarrow (m, n) = \emptyset$$

$$3) n=p, m=11 \Rightarrow m+2n+9=p \Rightarrow 11+2p+9=p \Rightarrow p=-10, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m, n) = \emptyset$$

$$B \neq 11p^2 \Rightarrow A = 11p^2 \Rightarrow (m+2n)(m+2n-4) = 11p^2$$

$$\text{делаем замену } X = m+2n-2 \Rightarrow X(X+2) = 11p^2 \Rightarrow$$

если

$$(2n+1)(2n+3) =$$

$$m=1 \Rightarrow B = 4(2n+10) = 2n(n+5) \text{ если } B = 11p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=2 \Rightarrow n=2 \Rightarrow B = 28 \neq 44 = 11 \cdot 2^2$$

если  $p=$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





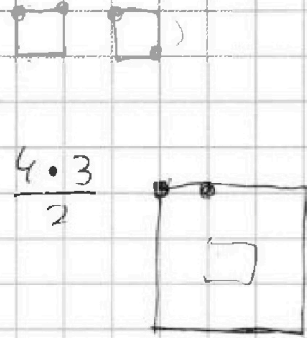
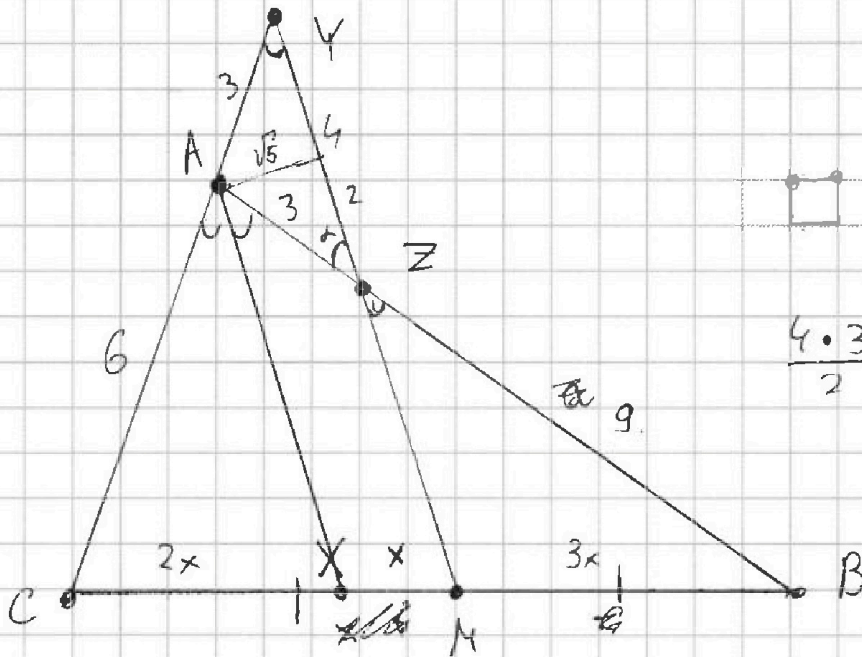
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1



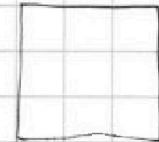
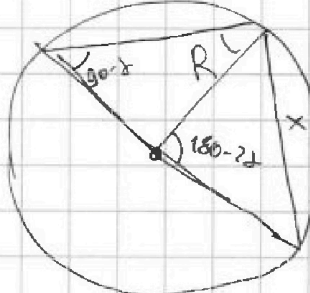
$$\frac{4 \cdot 3}{2}$$

~~$$\frac{cx}{x+b} = \frac{3}{3+a}$$~~

~~$$\frac{c/b}{c+b} = \frac{6}{6+3}$$~~

$$x = 2R \sin 90^\circ - d$$

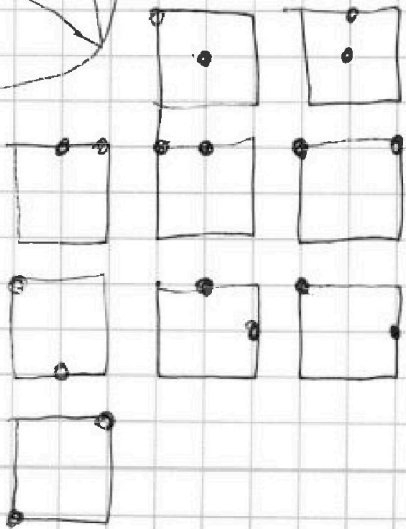
~~$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$~~



$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

~~sin x~~

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$



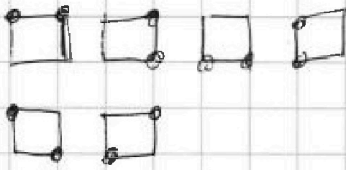


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{k^2 \cdot (k^2 - 1)}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4}$$

$$\frac{100 \cdot 99}{2} - 100 + \frac{100}{2}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} - 4$$

~~$$\frac{4 \cdot 3}{2} - 4 + \frac{4}{2}$$~~

~~$$\frac{(2k)^2 \cdot ((2k)^2 - 1)}{2} + (2k)^2$$~~

$$\frac{(2k)^2 \cdot ((2k)^2 - 1) + 2 \cdot ((2k)^2)}{8} =$$

~~$$\frac{8 \cdot 16}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = 32$$~~

$$= \frac{(2k)^2 \cdot (k^2 + 1)}{8}$$

$$\frac{2^2 \cdot (2^2 + 1)}{8}$$

$$\frac{k^2(k^2 - 1)}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4} =$$

$$= \frac{k^2(k^2 - 1) - k^2}{8} + \frac{2k^2}{8} =$$

$$= \frac{k^2(k^2 - 1) + k^2}{8} = \frac{k^4}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

~~$$x_{10} - 2a_4 + a_6 = 3a_6$$~~

~~$$a_{10} - 2a_4 + a_6 = 3a_6$$~~

~~$$9x^2 + 12 - 18x = 3(x^2 - 2x)^2 \Rightarrow$$~~

$$\Rightarrow 3x^2 + 4 - 6x = x^2(x^2 - 4x + 4)$$

~~считаем~~

~~$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0$$~~

~~используем~~

~~$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$~~

~~$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$~~

$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ - x^4 - x^3 \\ \hline -3x^3 + x^2 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 + 6x \\ -2x^2 + 2x \\ \hline 4x - 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} (x-1) \\ \overline{x^3 - 3x^2 - 2x + 4} \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline -2x + 4 \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -4x + 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$
--	---

$$x^2 - 2x - 1 =$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

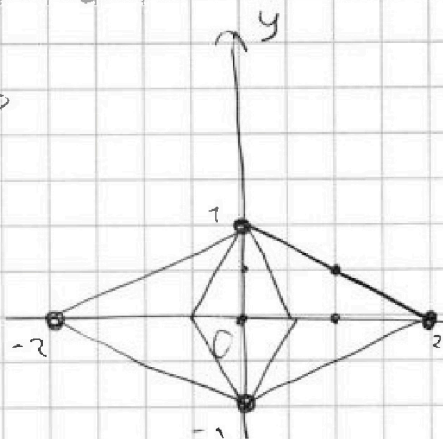
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

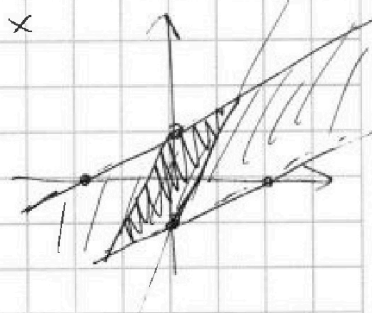
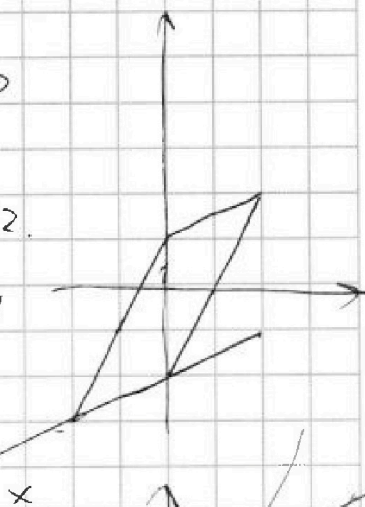
$$\begin{cases} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ -2 \leq 4x-2y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$



$$|x-2y| \leq 2$$

$$|2x-y| \leq 1$$



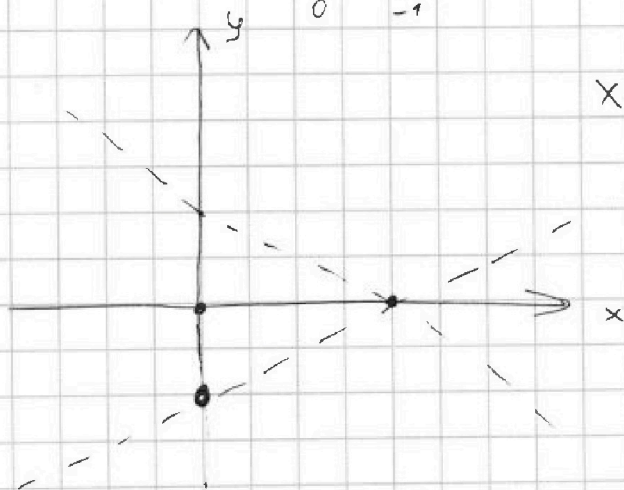
1-

$$3y + 6x - a = 0$$

$$|x-2y| = 2 \Rightarrow x-2y \leq 2$$

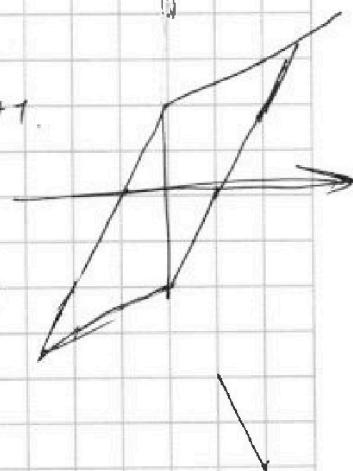
$$x-2y = -2$$

$$y = \frac{x}{2} + 1$$



$$x-2y > 2$$

$$y > \frac{x}{2} + 1$$



$$y \geq 2x - 1$$

$$y \leq 2x - 1$$

$$3y + 6x = a$$

$$y + 2x = \frac{a}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1) =$$

$$= x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 4 \quad | \quad (x-1) \\ x^4 - x^3 \\ \hline -3x^3 + x^2 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 + 6x \\ -2x^2 + 2x \\ \hline 4x - 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2 \pm \sqrt{\frac{4 + 16}{2}}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \quad | \quad x-1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 - 2x \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -4x + 4 \end{array}$$

$$(1 \pm \sqrt{5})^2 = 6 \pm 2\sqrt{5}$$

27-8

$$a_{10} = 54 \pm 18\sqrt{5}$$

$$\frac{a_{10} - a_0}{2} = 19$$

$$a_6 = (6 \pm 2\sqrt{5} - 2 \pm 2\sqrt{5})^2 = 16$$

$$a_4 = 6 - 9 \mp 9\sqrt{5} = -3 \mp 9\sqrt{5}$$