



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_9 - a_3 = 6d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow 2d = x^2 - x - 1 \Rightarrow 4d = 2x^2 - 2x - 2$$

$$a_9 - a_5 = 4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Заметим, что  $x = -1$  удовл. уравнению  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$

У второй скобки есть корень  $x = -1 \Rightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = (x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2)$ . У ост. скобки корни

$x_1 = -1 + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow$  у уравнения 3 корня.

Проверка:

$$x = -1$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$a_3 = -3 + 3 = 0$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (1-2)^2 = 1$$

$$a_5 = 4$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 3 \Rightarrow d = 0,5 \quad a_9 = 12 - 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 - \sqrt{3} \cdot 3}{2}$$

$$a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:  $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[ \frac{x}{3} - 1; \frac{x}{3} + 1 \right] \\ y \in [3x - 1; 3x + 1] \end{cases}$$

$y$  найдётся, если  $y$  этих отрезков есть пересечение  $\Rightarrow$  либо левый конец первого отрезка лежит во втором, либо левый конец второго лежит в первом, или наоборот правые концы

$$1) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases}$$

Решим двойные неравенства и получим:

$$1) \begin{cases} x \in \left[ -\frac{3}{4}; 0 \right] \\ x \in \left[ 0; \frac{3}{4} \right] \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \in \left[ 0; \frac{3}{4} \right] \\ x \in \left[ -\frac{3}{4}; 0 \right] \end{cases}$$

Заметим, что в максимуме случается, чем больше  $x$ , тем больше  $y_{\max}$ , так как  $\frac{x}{3} \pm 1$  и  $3x \pm 1$  линейны с  $k > 0$

$$\Rightarrow 4y + 3x \rightarrow \max \text{ при } x \rightarrow \max \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 3x = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1) A = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 > 0$$

$$m+n > 0, \text{ м.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n > 9$$

И.к.  $A: 13$ , то один из множителей:  $13$

$$I. (m+n) : 13. \text{ В макс}$$

В формулу  $A = 13p^2$  является факторизация

$A$ . Рассмотрим, какими множителями  $A$  может быть

$m+n$

$$I. m+n \neq 1, \text{ м.к. } m, n \geq 1$$

$$II. m+n = 13$$

$$m+n=4 \Rightarrow p=2.$$

$$\text{Тогда } B = mn \cdot 10 = 75q^2 \Rightarrow 15q^2 = 2mn. \text{ Переберем}$$

все ~~возможные~~ ищущие решения  $(3; 10)$  и  $(10; 3)$

$$III. m+n = 13p \Rightarrow m+n-9 = p \Rightarrow 9 = 12p \Rightarrow \text{Крест}$$

Нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV.  $m+n=13p^2 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow m+n=10 \Rightarrow$  корней нет

V.  $m+n=p \Rightarrow m+n-3=13p \Rightarrow m+n-3 > m+n \Rightarrow$  корней нет

VI.  $m+n=p^2 \Rightarrow m+n-3=13 \Rightarrow p^2=22 \Rightarrow$  корней нет

2)  $B = 13p^2 = mn(m+n-3)$

Переберем все значения  $m$ , а потом  $n$

I.  $m=1$

1.  $n=13$

$m+n-3=11 \neq p^2 \Rightarrow$  корней нет

2.  $n \neq 1$ , м.к.  $m+n > 3$

3.  $n=p \Rightarrow m+n-3=13p=p-2 \Rightarrow$  корней нет

4.  $n=13p \Rightarrow m+n-3=p \Rightarrow 13p-2=p \Rightarrow$  корней нет

5.  $n=p^2 \Rightarrow m+n-3=13 \Rightarrow m+n=16 \Rightarrow A=16 \cdot 7 \neq 75p^2$

6.  $n=13p^2 \Rightarrow m+n=4 \Rightarrow A=4 \cdot (-5) < 0$

II.  $m=13$

1.  $n \neq 1$ , м.к. выражение симметрично  $\Rightarrow$  если  $m \neq 1$ , то  $n \neq 1$

2.  $n=p \Rightarrow m+n-3=p=n \Rightarrow$  противоречие, корней нет

3.  $n=p^2 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow n=-9$  противоречие

III.  $m=13p$

1.  $n=p \Rightarrow 13p+p-3=1 \Rightarrow$  корней нет

2.  $n \neq p$  в силу симметрии

IV.  $m=p$

1.  $n \neq p$  в силу симметрии; 2.  $n=p \Rightarrow 2p-3=13 \Rightarrow p=8$  - корни нет

3.  $n=13 \Rightarrow m+10=p^2=p+10 \Rightarrow$  корней нет

4.  $n=13p \Rightarrow 14p-3=1 \Rightarrow$  корней нет

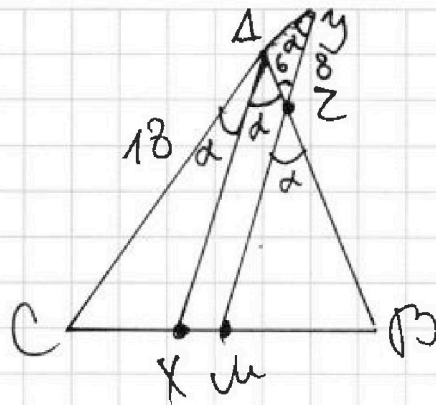


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle YAZ$  — внешний угол  $\angle A \Rightarrow \angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AZY = 480 - (180 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$  ( $\angle AZY = \angle CAZ$ ,  
 т.к. образуются при пересечении паралл. прямых)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AY = AZ = 6.$

т.к.  $AX$  — биссектриса  $\Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CX = BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}$

т.к.  $\angle CAZ = \angle CZM$  и  $\angle C$  — общий, то  $\triangle CAZ \sim \triangle CZM$   
 $k = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = k = \frac{BC \cdot \frac{AC}{AC+AB} - 2AC}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{36}{AC+AB} = \frac{36}{18+AB} \Rightarrow AB =$

$= 30.$  Заметим, что  $\triangle BZM \sim \triangle BAX$  по 2 углам  
 $k = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{ZM}{AX} = \frac{4}{5}$ . ВМП  $x = ZM, y = AX.$

т.к.  $\triangle CAZ \sim \triangle CZM$ , то  $\frac{YM}{AX} = \frac{8+x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \\ \frac{8+x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{y} = \frac{8}{15} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 12.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABC$  по т. косинусов

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$\triangle ZBM$

$$\begin{aligned} BM^2 &= 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \cos \alpha = \\ &= 144 + 24^2 \cdot \frac{1}{3} = 12^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{12 \cdot 12 \cdot 7}{3} = \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 7 \Rightarrow BM = 4\sqrt{21} \Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \end{aligned}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $x, y \geq 0$ , т.к.  $\sqrt{x}$  и  $\sqrt{y}$  определены.

Посмотрим на второе уравнение и преобразуем его

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

Есть решение  $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$ .

Посмотрим на вторую скобку

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

Заметим, что т.к.  $x, y \geq 0$ , то оба произведения

неотрицательны  $\Rightarrow$  второе слагаемое всегда больше 0  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$  - единственное решение. Теперь подставим

в первое уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5-x^2}$$

$$\sqrt{6+5-x^2} = \sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 + (x+1) + (6-x)$$

Введем  $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$

$$t + 5 = -t^2 + 7 \Rightarrow t_1 = 1 \quad t_2 = -2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$x+1 = 1+6-x + 2\sqrt{6-x}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6 - x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{решения } \left( \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right); \left( \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right);$$

$$\left( \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего 31 узел, значит без учета поворотов имеем  $C_{31}^2$  раскраски. Рассмотрим, какие раскраски мы считаем сколько раз.

$n=1$ , т.е. при любом повороте картинка не меняется, таких нет.

$n=2$ , ситуация, когда точка 1 переходит в точку 2 при повороте двукратно  $\Rightarrow$  осевая симметрия относительно ~~всех параллельных сторон~~ центра, таких  $C_{31}^1$

$n=3$ , такой ситуации не бывает, т.к. в таком случае мы либо переходим к симметрии, а значит  $n=2$ , либо перехода не было  $\Rightarrow$  таких пар нет

$n=4$ , все остальные, т.к. существует 3 поворота. итак  $C_{31}^2 = 2 C_{31}^1 + 4x$ , т.к. надо получить  $C_{31}^1 + x$ , то ответ  $\frac{C_{31}^2 + 2 C_{31}^1}{4}$

Ответ:  $\frac{C_{31}^2 + 4 C_{31}^1}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$3x+3=a_3$        $a_1+2d=3x+3$        $3\sqrt{3} \Rightarrow 4 \Rightarrow 12-6\sqrt{3}$   
 $(x^2+2x)^2=a_5$        $a_1+4d=x^4+4x^3+4x^2=x^2(x^2+4x+4)$        $d=\frac{4-3\sqrt{3}}{2}$   
 $3x^2=a_9$        $a_1+8d=3x^2$        $x^2(x+2)^2$   
 $3(-1+\sqrt{3})+3=$        $2d=1$        $4d=8-6\sqrt{3}$   
 $=-3+3\sqrt{3}+3=3\sqrt{3}$        $d=0,5$        $4d=3x^2-x^2(x^2+4x+4)-$   
 $a_3+a_9=a_6$        $d=0,5$        $=x^2(3-x^2-4x-4)=$   
 $a_5=(4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2)^2=0=a_3$        $=x^2(3-x^2-4x-4)=$   
 $(1+\sqrt{3})^2=a_9-a_3=6d$        $1=a_5=x^2(-x^2-4x-1)$   
 $=4-2\sqrt{3}$        $3x^2-3x-3=6d$        $3=a_9$        $3x^2-x^4-4x^3-4x^2=$   
 $x^2-x-1=2d$        $x_1=-1$        $=-x^4-4x^3-x^2$   
 $2x^2-2x-2=$        $x_2=-1+\sqrt{3}$   
 $2x^2-2x-2=9d$        $x_3=-1-\sqrt{3}$        $x^3+3x^2-2 \mid x+1$   
 $3x^2=3 \cdot (4-2\sqrt{3})=$        $x=-1$        $\frac{a_9-a_5}{0,5} = 4 \frac{x^3+x^2}{-6+3x^2-2}$   
 $=12-6\sqrt{3}$        $2x^2-2x-2=x^2(-x^2-4x-1)$        $\frac{2x^2+2x}{-2x-2}$   
 $2x^2-2x-2=-x^4-4x^3-x^2$   
 $X^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$        $x^2+2x-2$   
 $1-4+3+2-2=0$        $a_9=12+6\sqrt{3}$   
 $3x^2$        $x^3+3x^2-2$   
 $x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} x=-1$        $-8+12-2$        $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$   
 $x_2 = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$        $-1+3-2$        $4+2\sqrt{3}$   
 $x^4+4x^3+3x^2-2x-2 \mid x+1$   
 $x^4+x^3$        $x^3+3x^2-2$   
 $-3x^3+3x^2-2x-2$        $(4+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3})^2$   
 $3x^3+3x^2$        $=4$   
 $-2x-2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$1) A = 13p^2$$

$$B = 75q^2$$

$$A = 13p^2 : 13 \Rightarrow (m+n) : 13 \text{ или } (m+n-9) : 13$$

$$I. m \equiv -n \pmod{13} \Rightarrow (m+n-9) \equiv 4 \pmod{13} \quad mn(m+n-3) = 13p^2$$

$$13k+4 \equiv p \pmod{13}$$

$$k=1$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$1) \begin{matrix} m+n = 13 & 1 \\ m+n-9 = p^2 = 4 & 13 \end{matrix}$$

$$2) \begin{matrix} m+n = 13p & p \\ m+n-9 = p & 13p \\ & p^2 \\ & 13p^2 \end{matrix}$$

$$9 = 12p$$

нет корней

$$3) \begin{matrix} m+n = p & \wedge \\ m+n-9 = 13p & \vee \end{matrix}$$

прямое противоречие  
 $m+n = 22 \neq p^2$

$$4) \begin{matrix} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{matrix}$$

$$m+n > 9 \quad A = 16 \cdot 7 \cdot 75q^2$$

никогда

$$13p^2 \geq 52$$

$$75q^2 \geq 300$$

$$3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$\begin{matrix} m+n-3 = 13 \\ m+n = 16 \end{matrix}$$

$$m = 13$$

$$n = 1$$

$$m-2 = p^2 = 11x$$

$$\begin{matrix} n = p \\ m+n-3 = p \end{matrix}$$

$$10 mn = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$m+n = 13$$

$$m = 3$$

$$n = 10$$

$$(3, 10)$$

$$13 \cdot 4$$

$$3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$V. m = p^2$$

$$1. n = 1 \Rightarrow m + n - 3 = 13 = p^2 - 2 \Rightarrow p^2 = 15 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$2. n = 13 \Rightarrow m + n - 3 = 1 \Rightarrow p^2 + 10 = 1 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$VI. m = 13p^2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

Итого получили решения  $(3; 10)$ ;  $(10; 3)$

Ответ:  $(3; 10)$ ;  $(10; 3)$

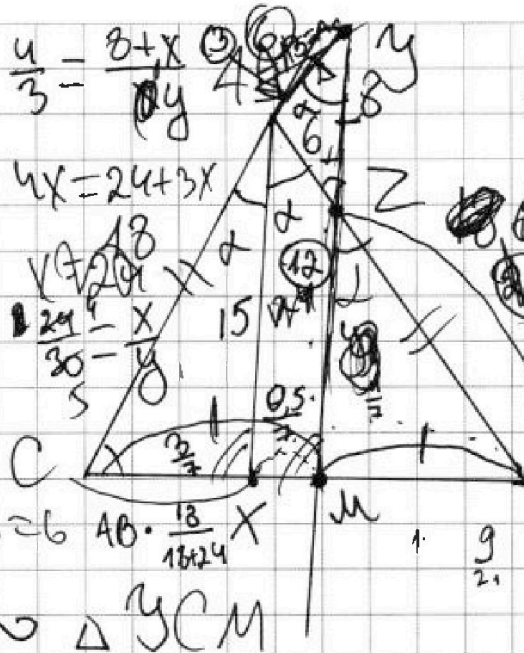


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{24}{18} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4c}{4c+AB}}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{AC+AB}{2AC}$$

$\triangle ACX \sim \triangle BCM$

$$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{18}$$

$$\frac{18+x}{18} = \frac{CX}{CM}$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{AC}{AC+AB} = \frac{2AC}{AC+AB}$$

$$AB = 6$$

$$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{36} \Rightarrow AB = 30$$

$$\frac{AC+x}{AC} = \frac{2AC}{AC+AB}$$

$$\frac{21}{18} = \frac{1}{3} \quad \frac{4}{5} = \frac{x}{y}$$

$$AC+x = AB-3$$

$$18 + \frac{AB-18}{2} = AB-3$$

$$\frac{AC+x}{AC} = \frac{AC+AB}{2AC}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

$$18 - 9 + \frac{AB}{2} = AB - 3$$

$$2AC + 2x = AC + AB$$

$$\sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} - \frac{8}{15}$$

$$\frac{AB}{2} = 12$$

$$24^2 = 400 + 160 + 16 = 576$$

$$x = \frac{AB-AC}{2}$$

$$AB = 24$$

$$2AC + 2x = AC + AB$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8}{y} \Rightarrow y = 15$$

$$\frac{CX}{AB} = \frac{AC}{AC+AB}$$

$$2AB - 6 = AC + AB$$

$$\sqrt{AB^2} = 144 + 576 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 = 720 - 384 = 336$$

$$\frac{6+2B}{2B} = \frac{2AB}{AC+AB}$$

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{AB-6}{AB} = \frac{AC}{AC+AB}$$

$$\frac{64-96}{2A} = \frac{AC}{AC+AB}$$

$$p = \frac{6+6+6}{2} = 10$$

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left( (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 \right) = 0$$

$x \geq 0$   
 $x = y$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$> 0 \Rightarrow x = y$  — единственное решение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{-x^2+5x+6} = \sqrt{(6-x)(x+1)} \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 + \checkmark$$

$$x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 + 6\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} - (\sqrt{6-x})$$

$$\sqrt{(6-x)(x+2)} + \sqrt{(5-x)(x+1)} - 5 = 0$$

$$(6-x)(x+2) = 25 + (5-x)(x+1) - 10\sqrt{(5-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{6-x} - \sqrt{x+1})^2 + x+1+6-x$$

$$t + 5 = -t^2 + 7 \quad t^2 + t - 2 = 0 \quad t = -1 \quad t = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & [3x-1; 3x+1] \\ & \left[ \frac{x}{3}-1; \frac{x}{3}+1 \right] \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+1} \sqrt{6-x} = \sqrt{6x}$$

$$\frac{x}{3}-1 \leq 3x-1 \leq \frac{x}{3}+1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\left[ \frac{5}{4}; \frac{13}{4} \right]$$

$$x-3 \leq 9x-3 \leq x+3$$

$$\left[ -\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right]$$

$$\begin{aligned} x-3 & \leq 9x-3 \\ x & \leq 9x \Rightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x-3 & \leq x+3 \\ 9x & \leq x+6 \end{aligned}$$

81 yzld

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2) + 5(x-y)(x+y) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} 3x & \leq 6 \\ x & \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x \in \left[ 0; 3 \frac{3}{4} \right]$$

$$4 \left( \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{5}{4} \right) = 6 + 5 = 11$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 3x+1$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$9x-3 \leq x-3 \leq 9x+3$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$\begin{aligned} 8x & \leq 0 \\ x & \leq 0 \end{aligned}$$

$$x-3 \leq 9x+3 \quad \beta = \max_{mn} (m+n-3)$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) \geq \frac{3}{4}$$

Всего

C<sub>2</sub>

$$x, y \geq 0$$

~~81~~

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \leq 3x+1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \cdot 3$$

$$\frac{x}{3}+1 \leq 3x+1$$

$$x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$x \cdot x \leq 9x \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} 8x & \leq 6 \\ x & \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6 - x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad x+1 = 1+6-x+2\sqrt{6-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \in [-1, 1] \quad |3x| > \left| \frac{x}{3} \right|$$

$$x: y \geq \frac{3x-1}{3x-1} \quad x-3y \geq -3 \quad 1-3y \geq -3$$

$$4(2x + \dots) \Rightarrow \max \Rightarrow y + 2x \Rightarrow \max \quad y \leq \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -4+3 \leq 3x-x-y+3y \leq -2 \text{ верно} \\ 2 \leq 2x+2y \leq -2 \end{matrix}$$

$$|3x| > |x| \quad -4 \leq 4x-4y \leq 4 \quad 3x-y \leq 3 \quad 1 \leq \dots \quad 1-3y \leq 3$$

$$-1 \leq x-y \leq 1 \quad y \leq \dots \quad |x+y| \leq 2$$

$$y=3 \quad |x-y| \leq 1 \quad 3 \geq 3y-x > -3 \quad x \in [-1, 1] \quad |2x+y| \leq 3$$

$$y=1 \quad |3x-y| \leq 1 \quad 1 \geq x-y > -1 \quad \downarrow$$

$$1-3 \quad 1 \geq y-3x \geq -1 \quad \begin{cases} y \in [-2, 2] \\ y \in \dots \end{cases}$$

$$3x-y \geq 1 \quad 1 \geq x-y \geq -1$$

$$3x+1 \geq y \quad 2 \geq -2x \geq -2 \quad y \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

$$1 \geq x \geq -1 \quad v=1 \quad 1-3y \geq -3$$

$$x=1 \quad -4 \leq 2x+2y \leq 4 \quad y=2 \quad -3y \geq -2$$

$$y = \frac{4}{3} \quad (1-2) \leq 3 \quad x \leq \frac{4}{3} \quad x-3y \leq 3$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \quad 3-y \geq -1 \quad y \geq -\frac{4}{3} \quad x-3y \leq 3$$

$$x(3-\frac{1}{3}) \leq 2 \quad \frac{5}{3} \leq 1 \quad 2 \leq y \quad x-3 \leq 3y$$

$$-3 \leq 3y-x \leq 4 \quad y \leq 4 \quad 1 \quad y \geq \dots \quad \frac{x}{3}-1 \leq y$$

$$\frac{2}{3}x \leq 2 \quad -1 \leq 3x-y \leq 1 \quad 3-y \leq 1 \quad y \geq \dots \quad x-3y \geq -3$$

$$4(2x + [3x-1; 3x+1]) \quad x+y \geq 3 \quad \frac{x}{3}+y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

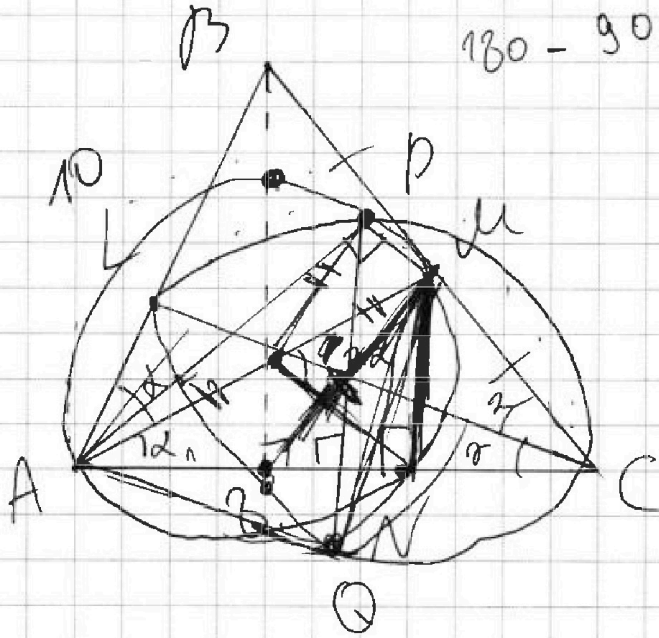
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 90 + \alpha_1 - 90 + 2\beta =$$

$$= \alpha_1 + 2\beta$$

$$\beta + \alpha_2 +$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{BM}{MN} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

