



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x_2 = -1 + \sqrt{3}:$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = 6\sqrt{3} - 4$$

$$a_3 + 2d = 3\sqrt{3} + 4 - 3\sqrt{3} = 4 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 4 + 8 - 6\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} = a_9$$

$$x = -1 + \sqrt{3} \text{ подходит}$$

$$3) x_3 = -1 - \sqrt{3}:$$

$$a_2 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} - 4$$

$$a_3 + 2d = -3\sqrt{3} + 4 + 3\sqrt{3} = 4 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 4 + 8 + 6\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3} = a_9$$

$$x = -1 - \sqrt{3} \text{ подходит}$$

Ответ:  $x_1 = -1$

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_3 &= 3x+3 = a_1 + 2d \\ a_5 &= (x^2+2x)^2 = a_1 + 4d \\ a_9 &= 3x^2 = a_1 + 8d \end{aligned}$$

Здесь  $a_i$  -  $i$ -ый член арифметической прогрессии.  
 $d$  - разность прогрессии.

$x$  - ?

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+3 = a_1 + 2d & (1) \\ (x^2+2x)^2 = a_1 + 4d & (2) \\ 3x^2 = a_1 + 8d & (3) \end{cases} \quad 2d = (x^2+2x)^2 - 3x - 3 \leftarrow (2) - (1)$$

$$\text{Из (1): } a_1 = 3x+3 - 2d = 3x+3 - (x^2+2x)^2 + 3x+3 = 6x+6 - (x^2+2x)^2$$

Подставим в (3):

$$3x^2 = 6x+6 - (x^2+2x)^2 + 4(x^2+2x)^2 - 12x - 12$$

$$3x^2 = 3(x^2+2x)^2 - 6x - 6$$

$$x^2 = (x^2+2x)^2 - 2x - 2$$

$$x^2+2x = (x^2+2x)^2 - 2$$

$$x^2+2x = t$$

$$t = t^2 - 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 2$$

$$x^2+2x = -1$$

$$x^2+2x+1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x^2+2x = 2$$

$$x^2+2x-2 = 0$$

$$D/4 = 1+2 = 3$$

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Проверка:

$$1) x_1 = -1:$$

$$a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = -1$$

$x = -1$  подходит

$$a_3 + 2d = 0 + 1 = 1 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 1 + 2 = 3 = a_9$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4y + 8x = ?$  наибольшее значение

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих системе.

Ниже будет описано построение, график ищите на следующей странице решения.

I.  $|x - 3y| \leq 3$



$$\begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq +1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

II.  $|3x - y| \leq 1$



$$\begin{cases} 3x \leq y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq 1 + 3x \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x > y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq -1 + 3x \end{cases}$$

Из графика мы видим, что фигурой, удовлетворяющей системе, является параллелограмм (т.е. прямые  $y = -1 + \frac{x}{3}$ ,  $y = \frac{x}{3}$ ,  $y = +1 + \frac{x}{3}$  параллельны друг другу и прямые  $y = -1 + 3x$ ,  $y = 3x$ ,  $y = +1 + 3x$  параллельны друг другу параллельными переносом).



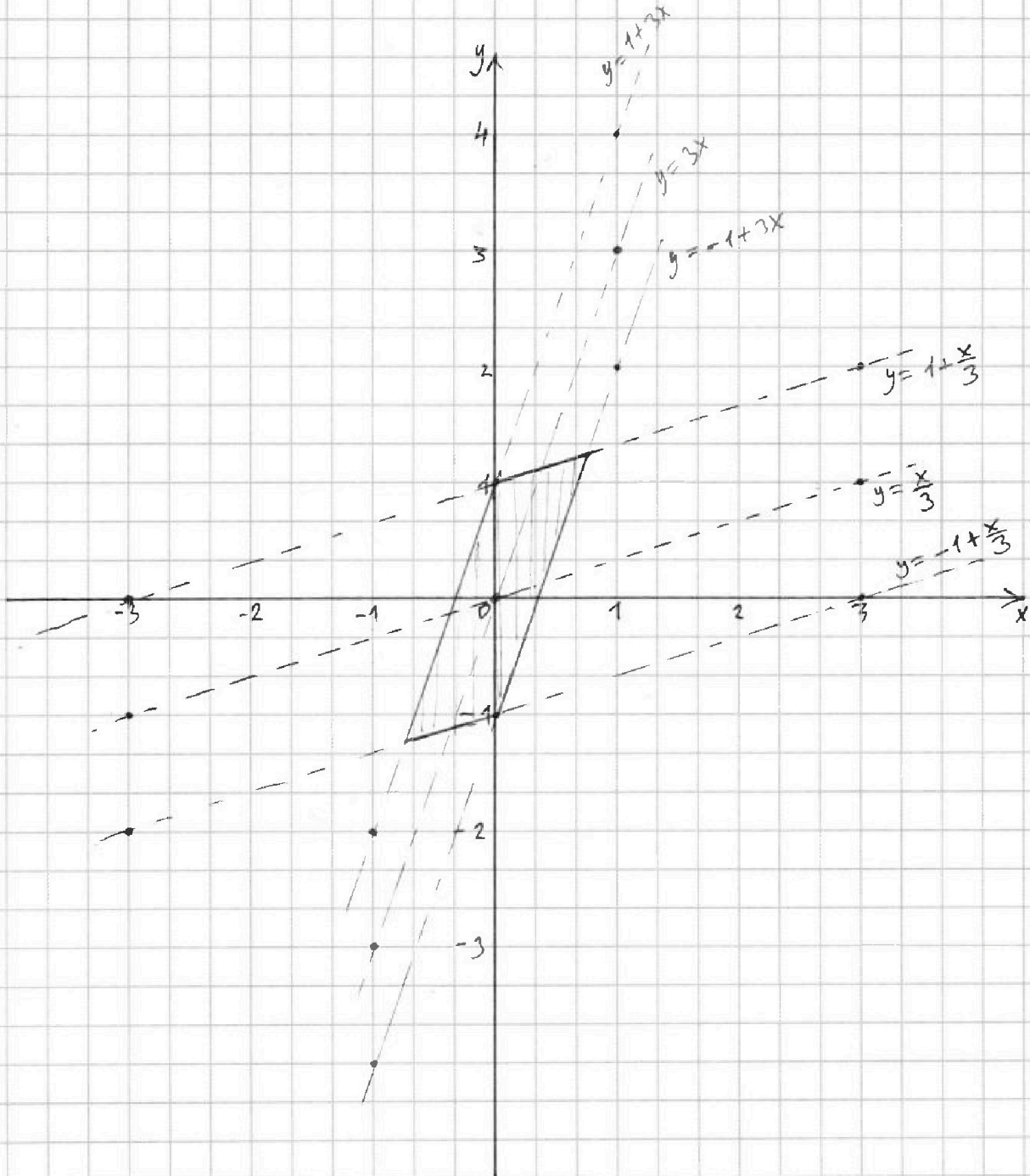


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем координату правой верхней вершины параллелограмма.

$$y = -1 + 3x = 1 + \frac{x}{3}$$

$$-3 + 9x = 3 + x$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Это  $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ . Симметричная ей относительно начала координат вершина будет иметь координату  $(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$ .

Пусть  $4y + 8x = a$ . Нам нужно найти наибольшее значение  $a$ . Преобразуем выражение.

$$y = -2x + \frac{a}{4}$$

Наибольшее значение  $a$  достигается тогда, когда из прямых, параллельных  $y = -2x$  мы выберем ту, которая пересекает заштрихованную область в точке с самой большой ординатой.

Значит,  $y = -2x + \frac{a}{4}$  проходит через точку  $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ . У нее как раз самая большая ордината из всех точек параллелограмма.

Подставим координаты в уравнение:  $\frac{5}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{a}{4}$

$$\Rightarrow a = 11.$$

Сделаем проверку:  $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$

$$|x - 3y| = 3 \leq 3 \quad 4y + 8x = 5 + 6 = 11$$

$$|3x - y| = 1 \leq 1$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $m+n=k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Из (2) получим уравнение на  $k$ :

$$(k-9)k = 75q^2$$

$$k^2 - 9k - 75q^2 = 0$$

$$D = 9^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5^2 q^2$$

Чтобы  $k$  было натуральным, дискриминант должен быть полным квадратом.

$$D = 3(27 + 4 \cdot 5^2 \cdot q^2)$$

Чтобы дискриминант был полным квадратом, необходимо  $27 + 4 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3$

$$4 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3 \Rightarrow q=3, \text{ т.к. } q\text{-простое}$$

Тогда получим уравнение  $k^2 - 9k - 75 \cdot 9 = 0$

$$D = 81 + 4 \cdot 9 \cdot 75 = 9(9 + 300) = 9 \cdot 309 = 9 \cdot 3 \cdot 103$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{103}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Противоречие. Этот случай также невозможен. Других случаев нет. Значит, таких пар  $(m, n)$  не существует.

Ответ: таких нет.





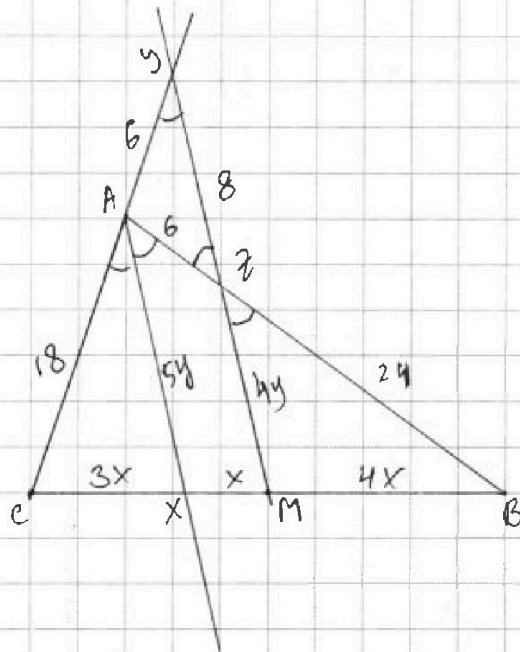


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AC &= 18 \\ AZ &= 6 \\ YZ &= 8 \end{aligned}$$

$$BC = ?$$

1) Т.к.  $AX$  — бис-са  $\angle CAB$ , то  $\angle CAH = \angle BAH = \alpha$ . Т.к.  $ZM \parallel AX$ ,  $\angle BZM = \angle BAH = \alpha$  как соответственные.  $\angle YZA = \angle BZM = \alpha$  как вертикальные.  $\angle AYZ = \angle CAB - \angle AZY = 2\alpha - \alpha = \alpha$  по св-ву внешнего угла  $\Delta$ . Тогда  $\Delta AYZ$  — р/б (равнобедренный) по признаку.  $\Rightarrow AY = AZ = 6$ .

2) Пусть  $CX = 3x, x > 0$ . Запишем Тл о пропорциональных отрезках для угла  $\angle C$  и прямых  $AX$  и  $ZM$ :

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM}$$

$$3 = \frac{18}{6} = \frac{3x}{xM} \Rightarrow xM = x$$

3)  $M$  — середина  $BC$ , поэтому  $CM = MB = CX + XM = 3x + x = 4x$ .

4) Запишем Тл о пропорциональных отрезках для  $\angle B$  и прямых  $ZM$  и  $AX$ :

$$\frac{BZ}{6} = \frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{MX} = \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow BZ = 24$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Пусть  $ZM = 4y, y > 0$ .  $\triangle ZBM \sim \triangle ABX$  по двум углам ( $\angle B$  - общий,  $\angle BZM = \angle BAX = \alpha$ ).

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{ZM}{AX} = \frac{24}{24+6} = \frac{4}{5} = \frac{4y}{AX} \Rightarrow AX = 5y$$

~~6) Запишем  $T_h$  косинусов  $\triangle CAH$ :~~

~~$$9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$$~~

6)  $\triangle ACX \sim \triangle YCM$  по двум углам ( $\angle A$  - общий,  $\angle CAH = \angle CYM = \alpha$ ).

$$\Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{AX}{YM} = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4} = \frac{5y}{4y+8}$$

$$\Leftrightarrow y > 0$$

$$12y + 24 = 20y$$

$$8y = 24$$

$$y = 3 \Rightarrow AX = 15, ZM = 12$$

7) Запишем  $T_h$  косинусов:

$$\triangle CAH: 9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$$

$$x^2 = 36 + 25 - 60 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle BZM: 16x^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cos \alpha$$

$$x^2 = 36 + 9 - 36 \cos \alpha \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим:  $9 - 36 \cos \alpha = 25 - 60 \cos \alpha$

$$24 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 45 - 36 \cdot \frac{2}{3} = 45 - 24 = 21, x = \sqrt{21}, \text{ т.к. } x > 0$$

$$BC = 8x = 8\sqrt{21}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$ .







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5x^2 - 5y^2 = 5(x-y)(x+y) = 5(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-x}(2\sqrt{x+1} + 1)$$

$$x+26+10\sqrt{x+1} = (6-x)(4(x+1)+1+4\sqrt{x+1})$$

$$x+26+10\sqrt{x+1} = (6-x)(4(x+1)+1) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$$

$$t^2 + 25 + 10t = (6-t^2+1)(4t+1) + 4(6-t^2+1)t$$

~~XXXXXXXXXX~~



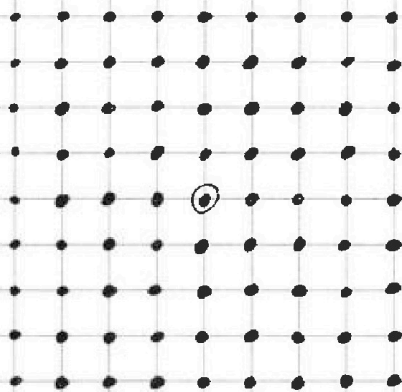


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов  $9 \cdot 9 = 81$ .

Квадрат нужно поворачивать на  $90^\circ$ , тогда он переходит сам в себя. При этом сама в себя из узлов переходит только центральный узел (отмечен  $\odot$  на рисунке). Значит, для каждой раскраски есть еще 3, которые

переводятся в неё поворотом на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  или  $270^\circ$ .  
Общее кол-во способов покрасить 2 клетки в белый равно

$$C_{81}^2$$

Однако разных раскрасок будет в 4 раза меньше, т.е.

$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{80 \cdot 81}{2 \cdot 4} = 810.$$

Ответ: 810.



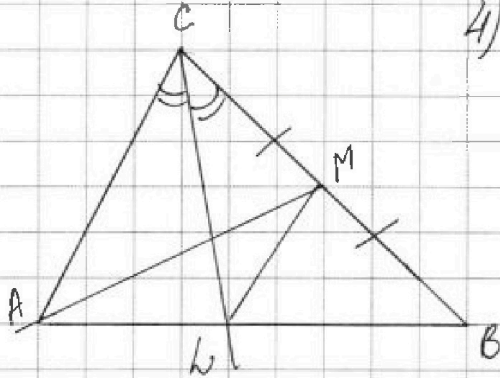


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

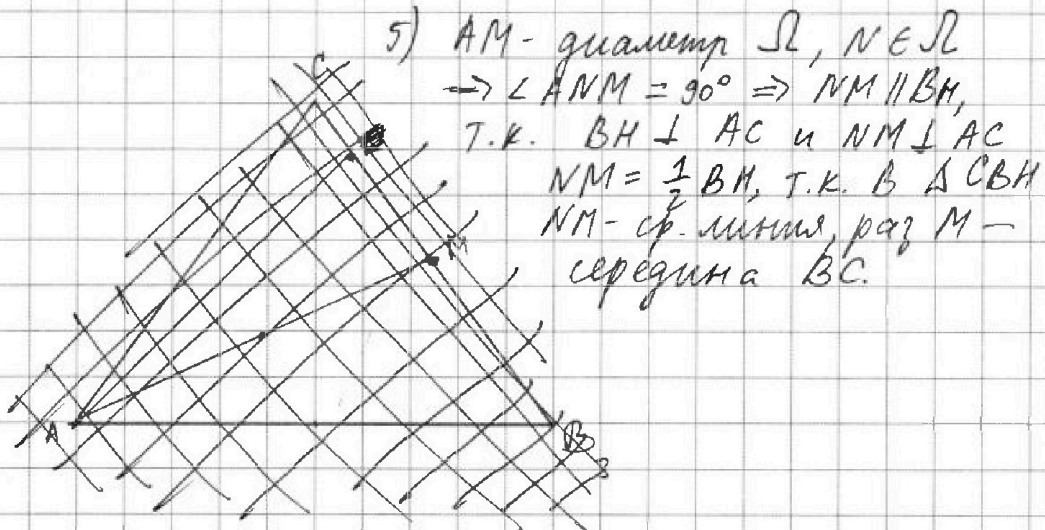
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

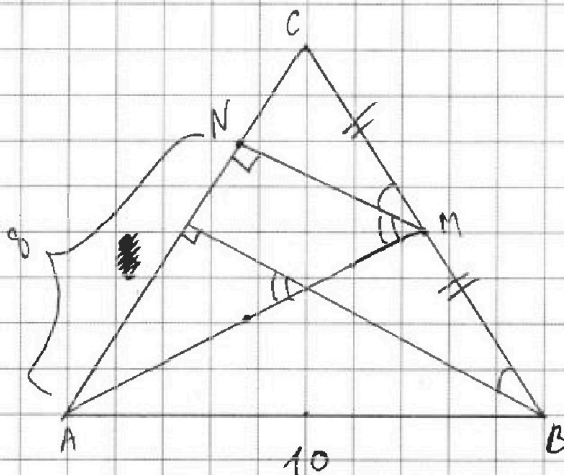
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4) Тогда  $LM$  - ср. линия  $\triangle ABC$ ,  
т.к.  $LM \parallel AC$  и  $M$  - середина  
 $BC$ . Значит,  $L$  - середина  
 $AB$ .  $CL$  - биссектриса и  
медиана  $\Rightarrow \triangle ABC$  - р/б  
 $\Rightarrow AC = BC$ .



5)  $AM$  - диаметр  $\Omega$ ,  $N \in \Omega$   
 $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow NM \parallel BN$ ,  
т.к.  $BN \perp AC$  и  $NM \perp AC$   
 $NM = \frac{1}{2} BN$ , т.к.  $N$  - середина  
 $AC$ ,  $M$  - середина  $BC$ .



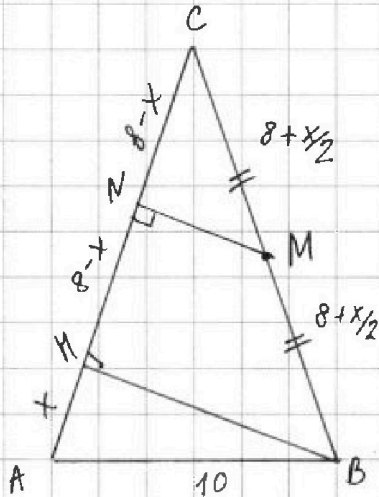


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6) Пусть  $AN = x, x > 0$ ,  
Тогда  $NC = AC - AN = 8 - x$ .

$NC = NC = 8 - x$ , т.к.  $N$  - середина  $AC$ .

~~AC = CB = 16 + x~~  
 $AC = CB = 16 + x \Rightarrow CM = MB = 8 + \frac{x}{2}$ .

7)  $BH = \sqrt{100 - x^2}$  по Тл Пифагора.

$NM = \sqrt{\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2}$  по Тл Пифагора.

$BH = 2NM$ , т.к.  $NM$  - ср. линия  $\triangle ABC$ .  
Получим уравнение:

$$\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2}$$



$$100 - x^2 = 4\left(\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2\right) =$$

$$= 4\left(16 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}x = \left(16 - \frac{x}{2}\right) \cdot 6x = 96x - 3x^2$$

$$100 - x^2 = 96x - 3x^2$$

$$2x^2 - 96x + 100 = 0$$

$$x^2 - 48x + 50 = 0$$

$$D/4 = 24^2 - 50 = 526 = 2 \cdot 263$$

$$x_{1,2} = 24 \pm \sqrt{526}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

~~Второй корень  $x_2 = 24 + \sqrt{526}$  не подходит, так как  $x < 8$ .~~

~~Проверка:  $AN = x = 24 - \sqrt{526} \approx 24 - 22.9 = 1.1$ ,  $NC = 8 - 1.1 = 6.9$ ,  $CM = MB = 8 + 0.55 = 8.55$ .  $NM = 5$ .  $BH = \sqrt{100 - 1.21} \approx 9.94$ .  $2NM = 10$ .  $9.94 \approx 10$ .~~

~~Ответ:  $x = 24 - \sqrt{526}$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $x < 10$ , т.к.  $AN$  — катет в  $\text{пр/уг } \triangle ANB$ .  
Тогда из двух значений  $x$  мы выбираем  
 $x = 24 - \sqrt{526}$ .

$$AC = CB = 16 + x = 40 - \sqrt{526}.$$

Ответ:  $40 - \sqrt{526} = AC = BC$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

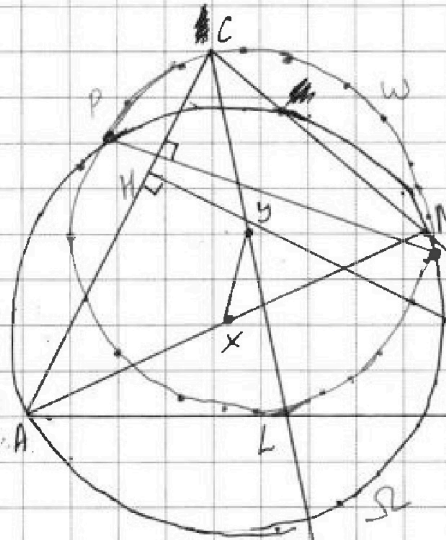
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $H$  - основание перпендикуляра из  $B$  на  $AC$ .

$$AB = 10, AM = 8$$

$$AC = ?$$

$$BC = ?$$

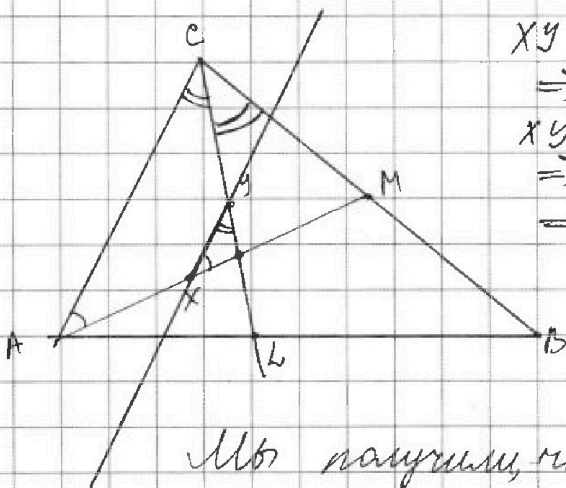


$$1) PQ \parallel BH \Rightarrow PQ \perp AC$$

2)  $PQ$  - общая хорда  $\Omega$  и  $\Omega'$ , она  $\perp$  линии центров. Пусть  $X$  - середина  $AM$ ,  $Y$  - середина  $CM$ .

Тогда  $XY$  - линия центров.  $\Rightarrow AC \parallel XY$ .

3) Изобразим отдельно  $\triangle ABC$  без  $\Omega$  и  $\Omega'$ .



$XY \parallel AC$ ,  $Y$  - середина  $CM$

$\Rightarrow XY$  - ср. линия  $\triangle ABL$

$XY \parallel AC$ ,  $X$  - середина  $AM$

$\Rightarrow XY$  - ср. линия  $\triangle ACM$

$\Rightarrow XY$  пересекает  $CM$  и  $AH$  в их серединах.

$\Rightarrow XY$  - ср. линия  $\triangle LCM$  и  $\triangle LAM \Rightarrow AC \parallel XY \parallel LM$ .

Мы получили, что в  $\triangle ABC$   $AC \parallel LM$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$4 + 25 - 4 \cdot 15 \cos \alpha = X^2$~~

$$4 + 25 - 4 \cdot 15 \cos \alpha = X^2$$

~~$36 + 9 - 36 \cos \alpha = X^2$~~

$$29 - 60 \cos \alpha = 45 - 36 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 29 - 45 =$$

$$24^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$$12^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$36 + 25 - 60 \cos \alpha = X^2$$

$$36 + 9 - 36 \cos \alpha = X^2$$

$$25 - 60 \cos \alpha = 9 - 36 \cos \alpha$$

$$16 = 24 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$X^2 = 36 + 9 - 36 \cdot \frac{2}{3} = 45 - 24 = 21$$

$$BC = 8X = 8\sqrt{21}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1}(1 - \sqrt{6-x}) + \sqrt{6-x}(-1 - \sqrt{x+1}) = -5$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

$C_8^2$   
4.



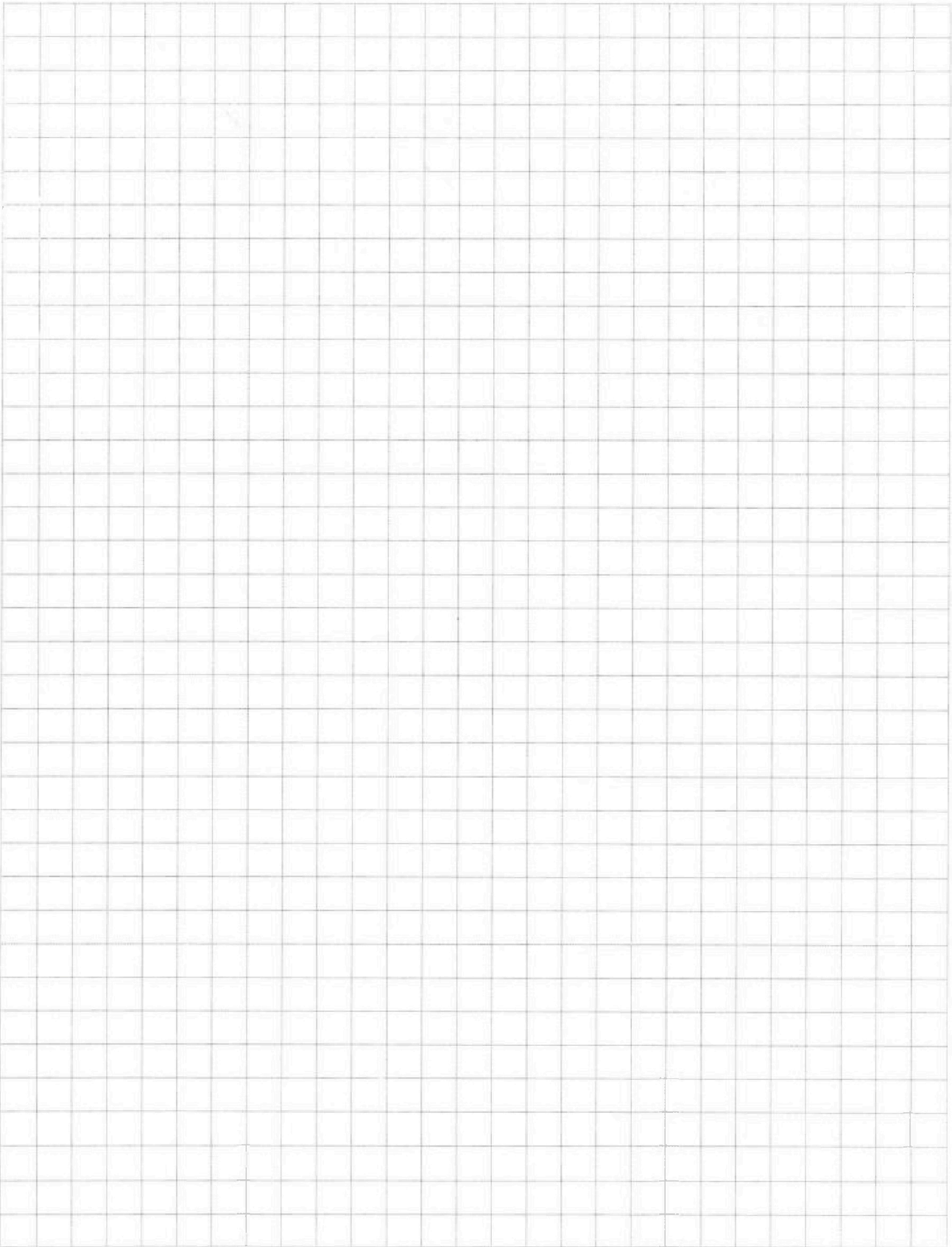


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x+1 + 6-x + 25 + 10\sqrt{x+1} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - 10\sqrt{6-x} =$$

$$= 2(6+5x-x^2)$$

$$32 + 10\sqrt{x+1} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - 10\sqrt{6-x} = 2(6+5x-x^2)$$

$$x = -1: \quad 0 - \sqrt{7} + 5 = 0$$

$$x = 6: \quad \sqrt{7} - 0 + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 25 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + 6-x + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

$$4(6-x)\sqrt{x+1}$$

~~$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + 6-x + 4(6-x)\sqrt{x+1}$~~

$$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + (6-x) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

$$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6-x)(x+1) + (6-x) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$



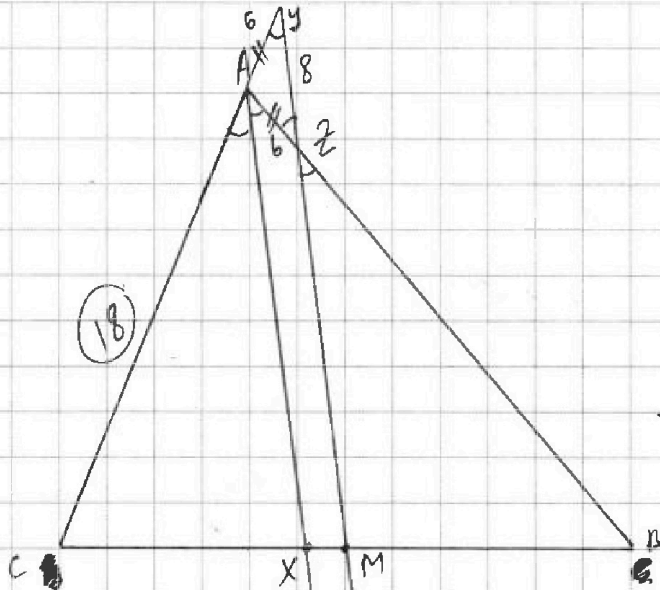


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

$$BC = ?$$

$$526 = 2 \cdot 263$$

$$\begin{array}{r} 263 \overline{) 17} \\ \underline{17} \phantom{0} \\ 93 \end{array}$$

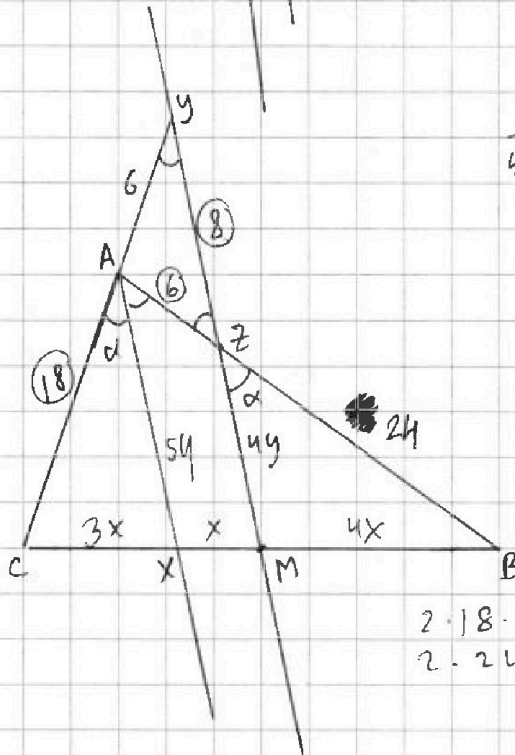
$$\begin{array}{r} 263 \overline{) 19} \\ \underline{19} \phantom{0} \\ 73 \end{array}$$

$$263 \overline{) 23}$$

$$263 \overline{) 27}$$

$$263 \overline{) 29}$$

$$29 \cdot 7 =$$



$$\frac{5y}{4y+8} = \frac{3}{4}$$

$$12y + 24 = 20y$$

$$8y = 24$$

$$y = 3$$

$$\begin{cases} 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha = 9x^2 \\ 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cos \alpha = 16x^2 \end{cases}$$

$$2 \cdot 18 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 24 \cdot 12 = 2^6 \cdot 3^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} mn(m+n-3) = 13p^2 \\ (m+n-9)(m+n) = 75q^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} m+n-3 &= \frac{13p^2}{mn} \\ m+n-9 &= \frac{75q^2}{m+n} \end{aligned}$$

$$\frac{13p^2}{mn} - 6 = \frac{75q^2}{m+n}$$

$k = m+n$        $p = 3$

$$(k-9)k = 75q^2$$

$$k^2 - 9k - 75q^2 = 0 \quad \frac{13 \cdot 9}{mn} - 6 = \frac{75q^2}{m+n}$$

$$300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 75q^2 = \frac{13 \cdot 3}{mn} - 2 = \frac{25q^2}{m+n}$$

$$= 81 + 300q^2 =$$

$\downarrow$

$$= 3(27 + 100q^2)$$

$$75q^2 = 75 \cdot 9$$

$\downarrow$   $q = 3$

~~etc~~

$$k^2 - 9k - 75 \cdot 9 = 0$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 75 \cdot 9 = 9(9 + 300) = 9 \cdot 309$$

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$m = n = 1$$

$$2 \cdot (-7) = -14$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$m = n = 2$$

$$4 \cdot (-5) = -20$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(-1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} = 2$$

$$2 - 3\sqrt{3}$$

$$2d = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3} - 2$$

$$6\sqrt{3} - 4$$

3

$$(-1 - \sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} = 2$$

$$12 + 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3+4+5+5+4+4+6} = 31$$

$$2d = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$0,8 \cdot 31 = 24,8 \rightarrow 25$$

$$-6\sqrt{3} - 4$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$1) \begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x \leq 3 \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 1 + \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$1) \begin{cases} 3x \leq y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq 1 + 3x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x \geq y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m, n) \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$13p^2$$

~~$$75q^2$$~~

$$m+n \geq 2$$

$p, q$  простые

$$\begin{cases} (m+n-9)(m+n) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

$$m+n-9 = \frac{13p^2}{m+n}$$

~~$$m+n-3 = \frac{75q^2}{mn}$$~~

$$\frac{13p^2}{m+n} + 6 = \frac{75q^2}{mn}$$

~~$$\frac{13p^2}{m+n} : 3$$~~

$$p = 3$$

$$13 \cdot 9 = 117$$

$$m+n = k$$

$$\frac{117}{m+n} = m+n-9$$

$$\frac{117}{k} = k-9$$

$$117 \cdot 4 = 400 + 40 + 28 = 468$$

$$117 = k^2 - 9k$$

$$k^2 - 9k - 117 = 0$$

~~$$D = 81 + 4 \cdot 13 \cdot 9 = 81 + 468 = 549$$~~

$$9(9+52) = 9 \cdot 61$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{61}}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) X_2 = -1 + \sqrt{3} :$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 2$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$d = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

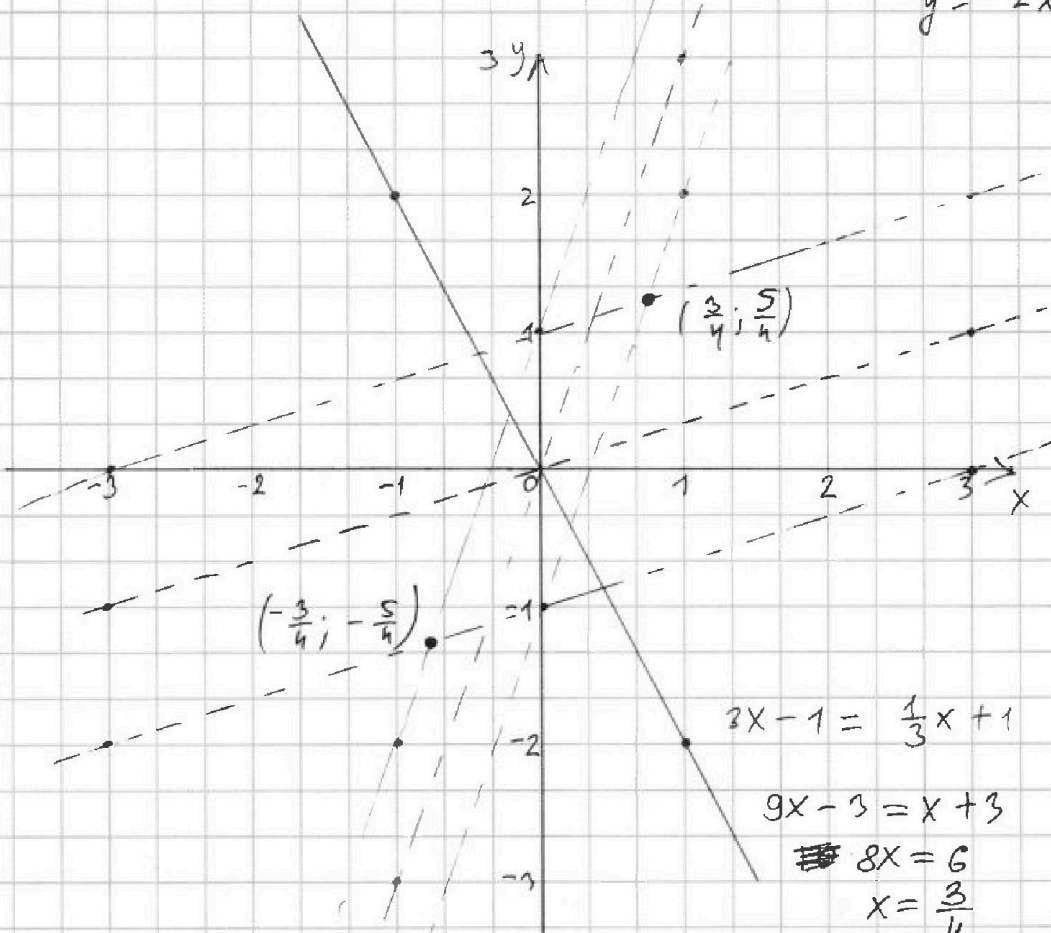
$$a_1 = 6\sqrt{3} - 2$$

$$a_3 + 2d = 3\sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3} = 2 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 2 + 4 - 6\sqrt{3} =$$

$$4y + 8x = a$$

$$y = -2x + \frac{a}{4}$$



$$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$9x - 3 = x + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\frac{5}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{a}{4}$$

$$a = 11$$

$$x - 3y = \frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$3x - y = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$