



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть α и β — целые положительные числа, значения α , тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \alpha^3 &= \sqrt{\frac{15\alpha + 6}{(\alpha - 3)^3}} \\ \beta \alpha^9 &= \alpha + 4 \\ \beta \alpha^{11} &= \sqrt{(5\alpha + 6)(\alpha - 3)} \end{aligned} \right.$$

или β не зависит

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \sqrt{\alpha - 3} \\ \alpha^2 &= \frac{\sqrt{(15\alpha + 6)(\alpha - 3)}}{\alpha + 4} \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \alpha \leq -\frac{6}{15} \\ \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\alpha = 5$ — решение
ОДЗ:

Ответ $\alpha = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x - 6 \cos^2 x + 3 + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x - 6 \cos^2 x + 6 \cos x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

свернем по формуле

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x\right)^3 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cos^2 x \cdot \left(-2^{-\frac{1}{3}}\right) + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cos x \cdot \left(-2^{-\frac{2}{3}}\right) - 2 + 2 + 3 = p$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = p - 5$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-2^{\frac{2}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x \leq 2^{\frac{2}{3}}$$

$$-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \leq p - 5 \leq \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$p \in \left[\left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5, \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5 \right] \text{ если } p$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑ решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

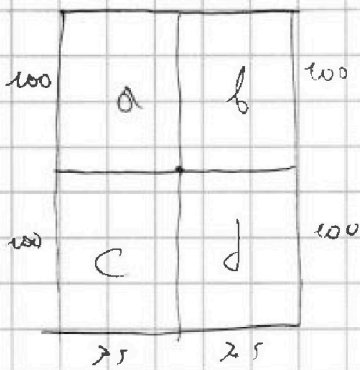
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача: В прямоугольнике со сторонами 100 и 75...

будем рассуждать так: 1 чертитель



Введем 1 точку, тогда состав. элементов меньше, тогда можно считать варианты 1 из 3 способов размещения:

- 1) точка у центра
- 2) ср. лев. тор.
- 3) ср. лев. верх.
- 4) ~~во углу~~

Далее мы найдем сумму способов размещения

1) Два случая: точка в центре и точка на лев. тор.

уже определили размещение

из всех ~~25~~ 30000 ч.м. можно выбрать C_{30000}^4

Возможности: а) в четв. a. 4 точки, тогда всего вариантов $C_{7500}^4 \cdot 3$ — число способов выбора 4 точек

б) в четв. a. 3 точки, в четв. b. 1 точка:

2. $C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$ (в четв. a. 3 точки, в четв. b. 1 точка) — число способов размещения 4 точек

в) в четв. a. 3 точки, в четв. c. 1 точка:

$C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$

2 в a, 2 в b:

$C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2 = C_{7500}^2$

1 вариант

Итого: $3 \cdot C_{7500}^4 + 4 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 + 56242499 \cdot C_{7500}^2$

число вариантов размещения точек, когда от центра размещены совмещены с центром



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

p - простое число

a, b, c - целые.

но у с.л.

$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \rightarrow a=b \text{ (оно же } a>b)$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \rightarrow a-b=1-p^2, \quad 1-p^2 < 0, \text{ т.к. } p \geq 2$$

(строгие усл.)
 $a < b$ (строгие усл.)

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

1) $p^2 = 3m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow p=3$

$$\begin{cases} a-b=p^2-1 \\ a-b=3k+1 \\ a-b=3k+2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) $p^2 = 3k+2$ минимум p не суж.
 $p^2 - 2 = 3k$

1) $\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$

$$b^2 + b = 812$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$b = \frac{56}{2} =$$

$$\begin{cases} b=28, & a=36, & c=27 \\ b=29, & a=-21, & c=-30 \end{cases}$$

Answers: $(36; 28; 27)$

$(-21; -29; -30)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$S_{AA_1M} = S_{AA_1N} = S_{AA_1M} = S_{AA_1N} = 5$
 $S_{AA_1M} = 5 \Rightarrow AN = 2,5$
 $S_{AA_1M} = 4$

$\triangle AMN \cong \triangle NMA_1$
 по гипотенузе и катету $\Rightarrow MN = NM$
 $AM \perp AC$
 $AN \perp AC$
 $AC \perp \text{плоскости } AMN$

$AM \perp AC$
 $AN \perp AC$
 $AM \perp AN$

$AM = AN$ (в $\triangle AMN$ и $\triangle ANM$ по 2-м катетам)

$AA_1QP \perp ABC$ (т.к. $AA_1 \perp ABC$ по условию)

P, Q - середины BC и B_1C_1

$AK \perp BC$ - высота, $AK \perp BC$ и медианой $\triangle ABC$

$BP \perp AP, \Rightarrow BP \perp AA_1QP$ (по св. $BP \perp AA_1$ и $BP \perp AP$)

$BP \perp PQ$ (по свойству медианы $\triangle ABC$)

$\angle APB = 90^\circ$ в $\triangle APB$ $\Rightarrow \triangle APB$ - прямоугольный

$QB_1 = PB$
 $QB_1 \parallel PB \Rightarrow \triangle PBQ$ - $\triangle PBQ$

$S_{PBQ} = 4 = \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot PB \Rightarrow BQ = 2$

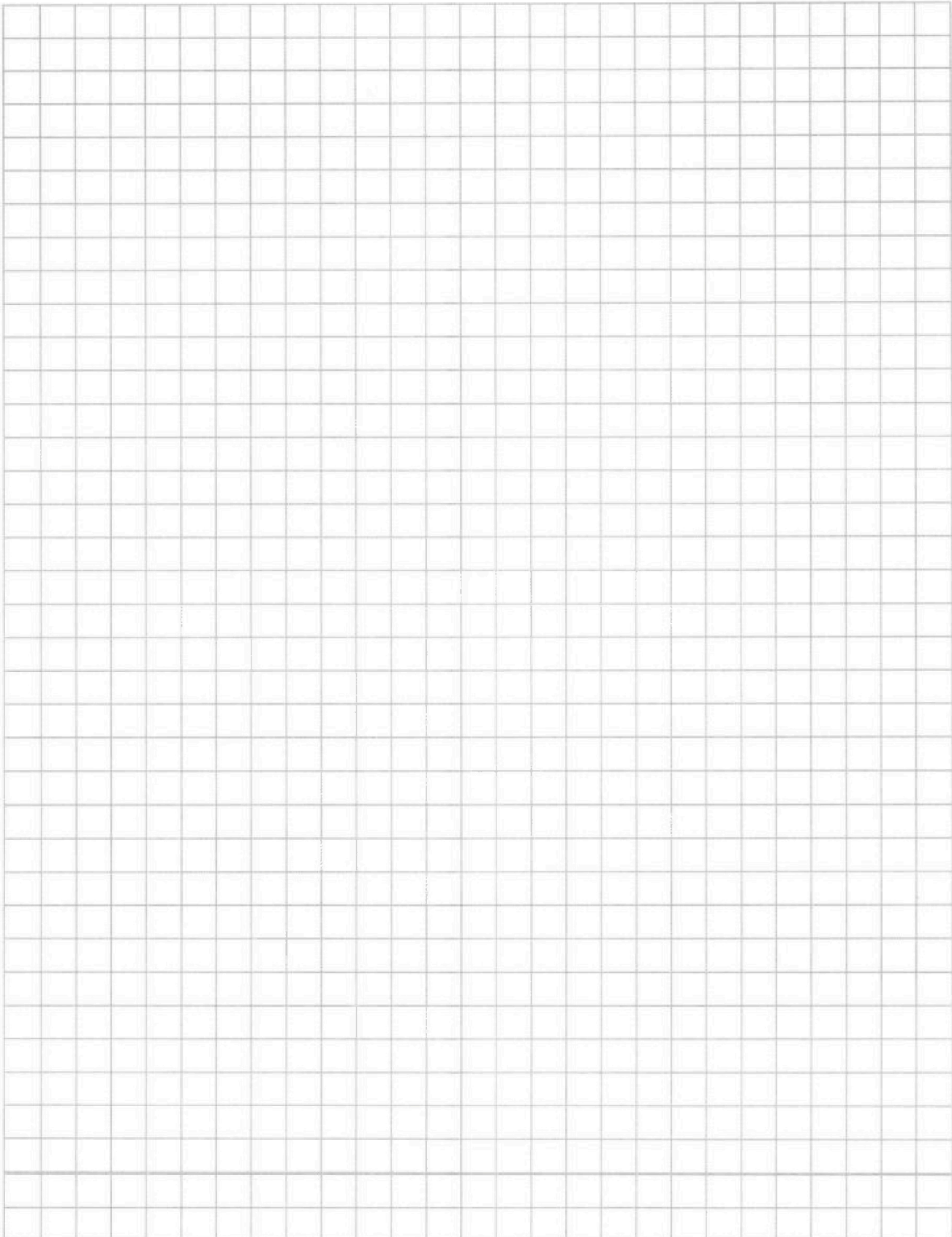


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos^3 x - 6 \cos^2 x - \cos x + 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x = p$$

$$2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$2 \cos^2 x (\cos x - 2) + 3 \cos (\cos x - 2) = p - 9$$

$$(2 \cos^2 x + 3) (\cos x - 2) = p - 9$$

$$a - b = 3k + 1$$

1) пусть $a - c = 1$ $b - c = p^2$

2) пусть $b - c = 1$ $a - c = p^2$

$$a - c = b - c$$

$$a - b = 0$$

1) $1 - p^2 = 3k + 1$ невозм.

2) $p^2 - 1 = 3k + 1$

$$a - b = 79$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 57 \\ \hline 114 \\ 399 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ \times 4 \\ \hline 848 \end{array}$$

$$203$$

$$97$$

$$3248$$

$$100 \cdot 3249$$

$$p^2 = 3k + 1$$

$$p = 3$$

$$p^2 = 3k + 2 = 3m - 1$$

$$a - c = 3k + 2$$

$$a - b = 3k - 1$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b - c = 1$$

$$\begin{array}{r} 3^8 \\ \hline 7500 \end{array}$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 5 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$(2 \cos^3 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -7$$

$$-15 \leq z \leq 19$$

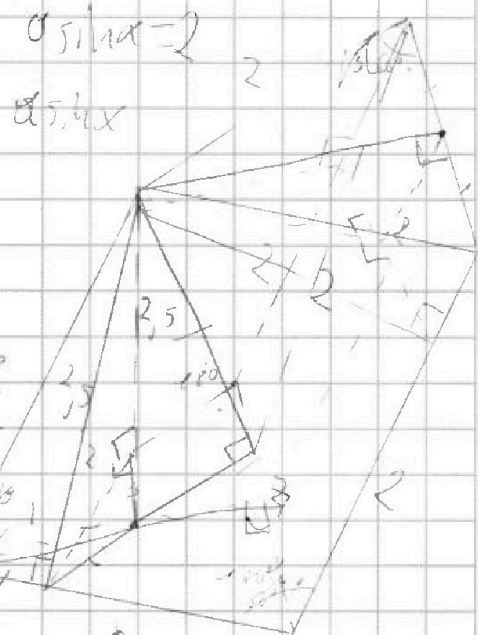
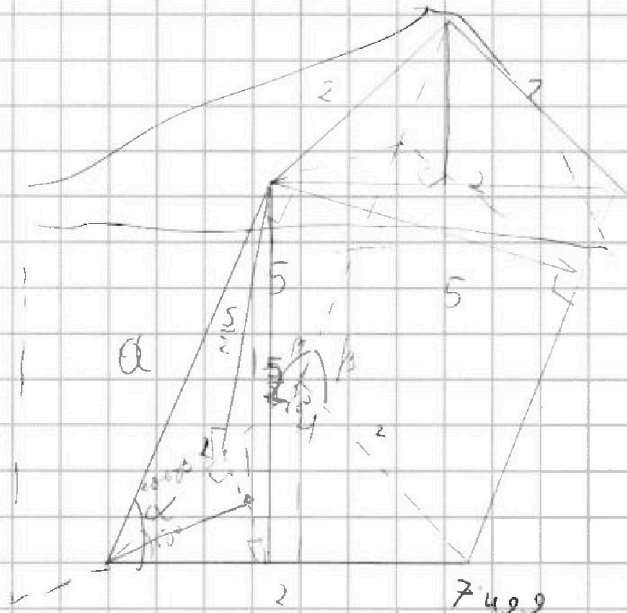
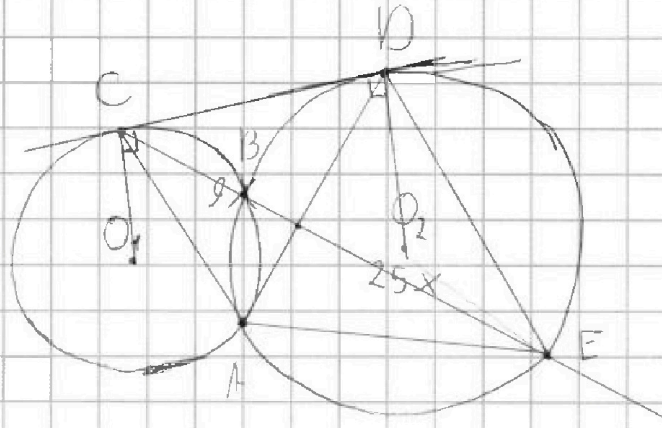


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

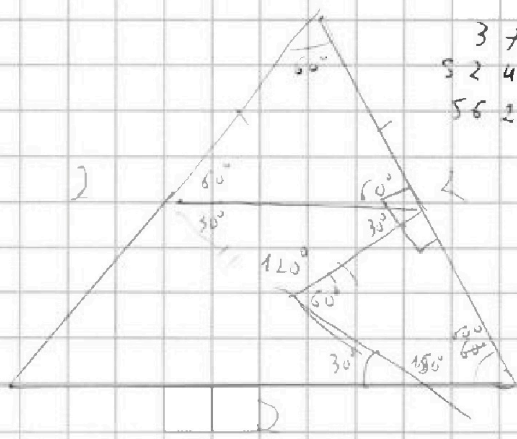
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



7499
 2500
 37495
 52493
 56242500



$\frac{2500!}{7499!} = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 \varphi^3 &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ b_1 \varphi^9 &= x+4 \\ b_1 \varphi^{11} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi^8 &= \sqrt{\frac{(15x+6) \cdot (x-3)^4}{(15x+6)}} \\ &= (x-3)^2 \\ \varphi &= \pm (x-3)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \pm b_1 \cdot (x-3)^{\frac{3}{4}} &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{\frac{1}{4}} \\ b_1 &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\varphi^2 = \frac{\sqrt{15x+6}(x-3)}{x+4} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} 15x+6 &= (x+4)^2 \\ 15x+6 &= x^2+8x+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ x &= 5 \text{ или } x = 2 \end{aligned}$$

Объем 5.

~~x = 2~~ *ошибка*

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 x - 2 \cos x + 2 \cos x + 6 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 1 &= p \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 &= p \\ (4 \cos^3 x) + (3 \cdot 1 \cos^2 x + 2) + 3 \left(2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cos x + 1 \right) &= p \\ \left(2 \frac{2}{3} \cos x - 2 \frac{1}{3} \right) + 5 &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \cdot \cos x &\leq 1 \\ -2 \frac{2}{3} &\leq 2 \frac{2}{3} \cos x - 2 \frac{1}{3} \leq 2 \frac{2}{3} \\ -2 \frac{2}{3} + 2 \frac{1}{3} &\leq \cos x \leq 2 \frac{2}{3} + 2 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\cos(2x) \cos x - \sin 2x \sin x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - (2 \sin x \cos x) + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p$$

$$\begin{aligned} (2 \cos^2 x - 1) \cdot (\cos x - 3) - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) + 6 \cos x &= p \\ -2 \cos x (-2 - \cos^2 x) &= p \end{aligned}$$