



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad x \in \mathbb{R}, \quad b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \quad b_{13} = 5-x, \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^2 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}, \quad q - \text{знаменатель прогрессии}$$

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$$

$$1) \quad x+1 > 0 \quad (x > -1) :$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ x \leq 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ (x-20)(x-3) = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 5 \\ x = 20; 3 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{x=3} \quad \text{и} \quad 3 > -1$$

$$2) \quad x+1 < 0 \quad (x < -1)$$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 35-13x = 25-10x+x^2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 5 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \leq 5 \\ (x+5)(x-2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x = -5; 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5; 2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -5}$$

$$\text{Ответ: } x = -5; 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$4x^2 - 2x - 24 \quad D_1 = 1 + 96 = 97$$

①  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}}$

$$b_{13} = 5-x \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = \sqrt[4]{(x+1)^2}$$

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt[6]{(x+1)^2} = 5-x$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$x \in (-3; 4]$$

1) Если  $x+1 \geq 0$ : ( $x > -1$ )  $11-4x \geq 0$

$$4x \leq 11 \quad x \leq \frac{11}{4}$$

$$q^2 = \sqrt{|-5+1|} = 2 = \sqrt{4}$$

$$x \leq 2,75$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$(1): x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D_2 \sqrt{5-x} \geq 0$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$13x - 35 = 25 - 10x + x^2 \quad (1)$$

$$2x^2 - x - 12 = 0$$

$$D = 1 + 96 = 97 \Rightarrow x = 3$$

$$= 287$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{4}$$

$$= \frac{1+9}{4}; -\frac{6}{4}$$

$$+5; b_9 = \sqrt{\frac{-100}{(-4)^2}}$$

2)  $x+1 < 0$  |  $x < -1$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$x \leq 5$$

$$4(x - \frac{6}{4})(x+1)$$

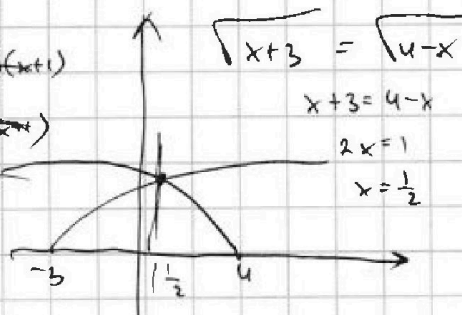
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$-5 \quad 2$$

$$(x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$(4x-6)(x+1)$$

$$(x-1)(x+6)$$



$$x+3 = 4-x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $-5$  и  $3$

$a > 0$

$b > 0$

$$a-b+5 = 2ab$$

$$\cancel{x+3} + 5a + 25 = 4a^2 + b^2$$

$$a^2 + 5a + 25 = 4a^2b^2 + 4ab^2 + b^2$$

$$x+3 + 5\sqrt{x+3} + 25 = 4(12+x-x^2) + 4(4-x)\sqrt{x+3} + 4-x$$

$$x+3 + 25 - 48 - 4x + 4x^2 - 4+x = \sqrt{x+3} (16-4x-5)$$

$$4x^2 - 2x - 24 = \sqrt{x+3} (11-4x)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



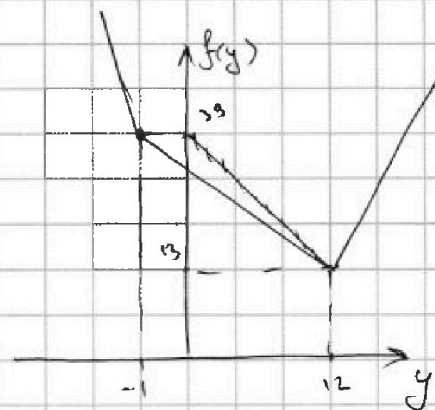
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{169-z^2} \in [-13; 13], \text{ а } |y+1| + 3|y-12| \geq$$



$\Rightarrow$  единственными возможными значениями - это  $y=12, z=0 \Rightarrow$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} (x \in [-3; 4])$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad (1) \quad a = (x+3)(4-x)$$

$$(1): \sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} : x+3 + 4-x - 2\sqrt{a} = 4a - 20\sqrt{a} + 25$$

$$4a - 20\sqrt{a} + 25 = 0 \Rightarrow 2a - 9\sqrt{a} + 9 = 0$$

$$\sqrt{a} = t \geq 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow D = 81 - 72 = 9 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4} = 3; 1,5$$

$$1) t = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow 12+x-x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$$

$$D = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

$$2) 12+x-x^2 = 2,25 \Rightarrow x^2 - x - 9,75 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0 \Rightarrow D_1 = 4 + 4 \cdot 39 = 160 = (4\sqrt{10})^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} \Rightarrow x+3 \geq 4-x \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{принимаем } \frac{1}{2} + \sqrt{10} \text{ и } \frac{1+\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ответ: } y=12, z=0, x = \frac{1}{2} + \sqrt{10}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

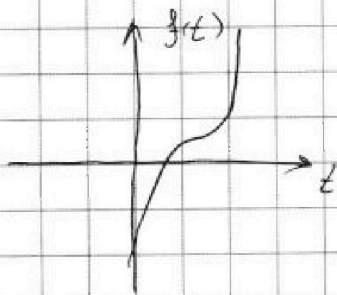
$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = p \quad (1)$$

$$(1): 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \rightarrow f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t + 1)^2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ и функция имеет вид:}$$



$\Rightarrow$  в каждом случае 1 корень есть <sup>и функция</sup>  $= 5$  максимумов

$$\Rightarrow f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$

Ответ:  $p \in [-4; 10]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4

Дано:  $\omega_1, \omega_2$

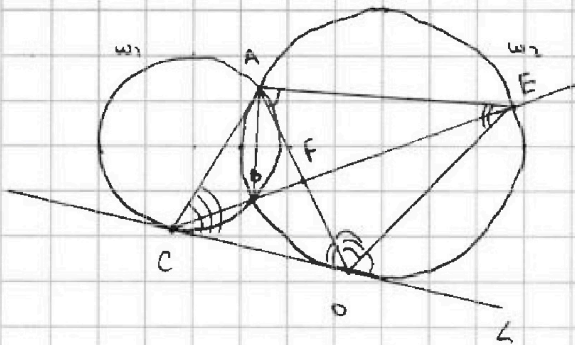
$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A; B\}$

CD - общая кас. к  $\omega_1, \omega_2$

$[CB] \cap \omega_2 = \{B; E\}$

$AD \cap CE = F; \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$

Найти:  $\frac{EO}{OB}$



Решение:

1. Т.к. CD - общая кас.  $\omega_1, \omega_2 \Rightarrow \angle AEO = \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOD$  (углы между кас. и хордой)  $= \frac{1}{2} \angle EOD$

$\angle EAO = \angle EDO = \beta$  (углы между кас. и хордой)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOE = 180^\circ - \angle ADC - \angle EDO = 180^\circ - 2\beta$  (как разб. углы)

2.  $\angle ABE = \angle ADE = 180^\circ - 2\beta$  (внеш. угол, опр. на одну хорду)  $\Rightarrow$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 2 + \beta$  (смежные)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 360^\circ - \angle ACB = 360^\circ - 2(2 + \beta) = 2(180^\circ - 2\beta)$

$\angle ACO = \frac{1}{2} \angle ABC = 180^\circ - 2\beta = \angle AOE$ .

3.  $\angle ACO = \angle AOE = 180^\circ - 2\beta$

$\angle AOC = \angle AEO = \beta$

$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle AEO$  (по двум углам)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAO = \angle OAE = \beta, \frac{EO}{CO} = \frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AO}$

$AO^2 = AC \cdot AE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Т.ч.  $\angle CAF = \angle FAE \Rightarrow AF$  - биссектриса  $\angle CAE \Rightarrow$  по т.т.т.  $\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$

Пусть  $AC = 3x$   $AE = 10x \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = x\sqrt{30}$

$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{30}x}{3x} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$

Ответ:  $\frac{ED}{CD} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

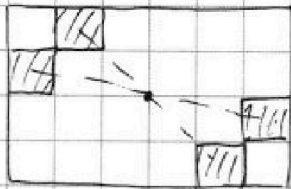
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Сколько помещений по угловым приближениям для разных симметрий.

1) Центральная симметрия. Помещение всех помещений определяется

$\left(\frac{8}{2}\right)$  4 помещения, расположенными в одной из половин  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{250-100}^4 = C_{25000}^4$$



Как показано на рисунке при расположении половин между двумя половинами уже определена симметрия.

2) Аналогичная ситуация при симметрии средней линии

4 клетки в половине определяют все рисунки  $\Rightarrow 2 \cdot C_{25000}^4$

3) Теперь найдем различные эти множества:

а) Если есть и центральная и 1-ой из средних линий

(симметрия), то есть и симметрия 2-ой средней линии

Доказуется тем, что центр симметрии - это приближение

2-ух симметрий средней линии  $\Rightarrow$  при наличии одной есть и другая

б) Аналогично, если есть симметрия 2-ух средней линии, то

есть и центральная.

Нужно это применить общей симметрии. Общая симметрия





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

определяется  $\binom{8}{4}$  2-мя множествами в четверти прямоугольника  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{12500}^2$$

По ф-ле для множеств  $A, B, C$   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$

$$2|A \cap B \cap C| \text{ получаем: } C_{25000}^4 + 2 C_{25000}^3 - C_{25000}^2 - C_{12500}^2 - C_{12500}^2 +$$

$$C_{12500}^2 = 3 \frac{25000!}{4!} - 2 \frac{25000!}{3!} - 2 \frac{12500!}{2!} + \frac{12500!}{2!}$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot \frac{25000!}{4!} - 2 \cdot \frac{25000!}{3!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2!} + \frac{12500!}{2!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \quad ; \quad a > b \quad ; \quad (a-b) \nmid 3 \quad ; \quad (a-c)(b-c) = p^2 \quad ; \quad a+b^2 = 560$$

Если  $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$  есть 6 вариантов:

$$1) \quad a-c = 1 \quad b-c = p^2 \Rightarrow a-b = 1-p^2 < 0 \quad , \quad a < b \quad - \text{противоречие}$$

$$2) \quad a-c = p \quad b-c = p \Rightarrow a-b = 0 \quad : 3 \quad - \text{противоречие}$$

$$3) \quad a-c = p^2 \quad b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Если  $p \neq 3$ , то  $p \equiv 1 \pmod{3}$  или  $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$  всегда  $(p-1)$  или  $(p+1) \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p=3 \Rightarrow a-c=9 \text{ и } b-c=1$$

$$a = 560 - b^2 \Rightarrow c = a - 9 = 551 - b^2 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b+24)(b-23) = 0 \Rightarrow b = -24; 23$$

$$a) \quad b=23 \Rightarrow c=22 \quad a = 560 - 23^2 = 560 - 529 = 31$$

$$31 > 23 \Rightarrow (31; 23; 22)$$

$$b) \quad b=-24 \Rightarrow c=-25 \quad a = 560 - 24^2 = 560 - 576 = -16$$

$$-16 > -24 \Rightarrow (-16; -24; -25)$$

$$4) \quad a-c = -p^2 \quad b-c = -1 \Rightarrow a-b = 1-p^2 < 0 \quad , \quad a < b \quad - \text{противоречие}$$

$$5) \quad a-c = -p \quad b-c = -p \Rightarrow a-b = 0 \quad : 3 \quad - \text{противоречие}$$

$$6) \quad a-c = -1 \quad b-c = -p^2 = -9 \Rightarrow c = a+1 = 561 - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 + b - 561 = -9 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0 \Rightarrow b = 23; -24$$

$$a) \quad b=23 \Rightarrow c=32 \quad a = c-1 = 31 \quad , \quad 31 > 23 \Rightarrow (31; 23; 32)$$

$$b) \quad b=-24 \Rightarrow c = b+9 = -15 \quad a = c-1 = -16 \quad , \quad -16 > -24 \Rightarrow (-16; -24; -15)$$

Ответ:  $(31; 23; 22) \quad (-16; -24; -25) \quad (31; 23; 32) \quad (-16; -24; -15)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



Оммы цммы

на 200-250 = 50000

1)  $C_{25.000}^4$

2)  $C_{50.000}^4 = \frac{50.000 \cdot 49.999 \cdot 49.998 \cdot 49.997}{24}$

2)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

a)  $|A \cup B \cup C| = A + B + C - AB - AC - BC + ABC$   
 $= A + B + C - 2 \cdot \text{пересек.}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

a)  $C_{25.000}^4$

b)  $C_{25.000}^4$

ответ:  $C_{115.000}^2$

$12 + x - x^2 = 9$

$x^2 + x - 3 = 0$

$x+3 + 4-x - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 25$

$4t^2 - 18t + 25 = 17$

$4t^2 - 18t + 18 = 0$

$576 + a = 56$   $2t^2 - 9t + 9 = 0$

$a = -16$   $a-b = 8$   $D = 81 - 72 = 9 = 3^2$

$b = -24$

$(-16-c)(-24-c) = p^2$   $c = \frac{p+3}{4}$

$(16+c)(24+c) = p^2 = \frac{p^2}{4}$

$= 3$

$15$

$t \rightarrow$

$ab - ac - bc + c^2 = p$

$ab - c(a+b) = p^2 - c^2$

$D = 1 + 2240 = 2241 = (47, \dots)^2$

$\frac{19}{49} (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

$(50-2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$

$\Rightarrow$

6)  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

1)  $a > b$

2)  $(a-b) \times 3$

3)  $(a-c)(b-c) = p^2$

$a + b^2 = 560$

$560 - b^2 > b$

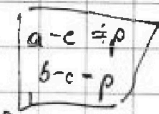
$b^2 + b - 560 < 0$

$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2240}}{2} =$

$= \frac{-1 \pm 47}{2} =$

$\Rightarrow b \in \{-24, \dots, 23\}$

|     |   |
|-----|---|
| 560 | 2 |
| 280 | 2 |
| 140 | 2 |
| 70  | 2 |
| 35  | 5 |
| 7   | 7 |
| 1   |   |







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

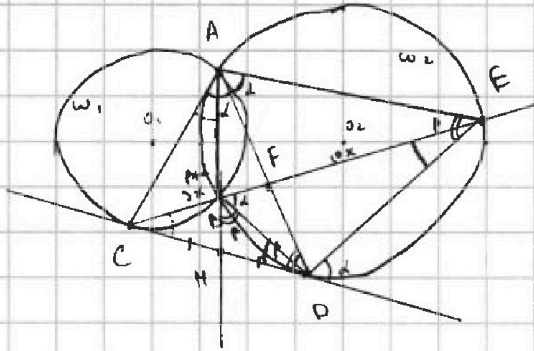
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4)  $\omega_1 \perp \omega_2 = \angle A, B, C, D$

Найти:  $\frac{ED}{CD}$ , если

$$\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10} \quad \frac{CF}{CE} = \frac{3}{13}$$



$$\angle ACE = \angle ADE - \angle AEB =$$

=

$$\angle AFE = \angle ADE + \angle BED$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$CD^2 = (CF - FB) \cdot CE$$

$$BF \cdot FE = AF \cdot FD$$

$$BF \cdot FE = AF \cdot FD$$

DF.

$$\frac{DF}{FA} \cdot \frac{AB}{BM} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$MB \cdot MA = CM^2$$

$$\frac{DF}{FA} \cdot \frac{AB}{BM} = 2$$

$$BM = \frac{CM^2}{MA}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{AF}{AD} = 1$$

$$\angle F E C D = 2 - 1$$

$$\angle ACM = \alpha + \beta \quad 180^\circ - 2 - \beta = \angle ADE$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ADE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AE = 10y$$

$$AC = 3y$$

$$AD^2 = AE \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{y\sqrt{30}}{3y} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$AD = y\sqrt{30}$$

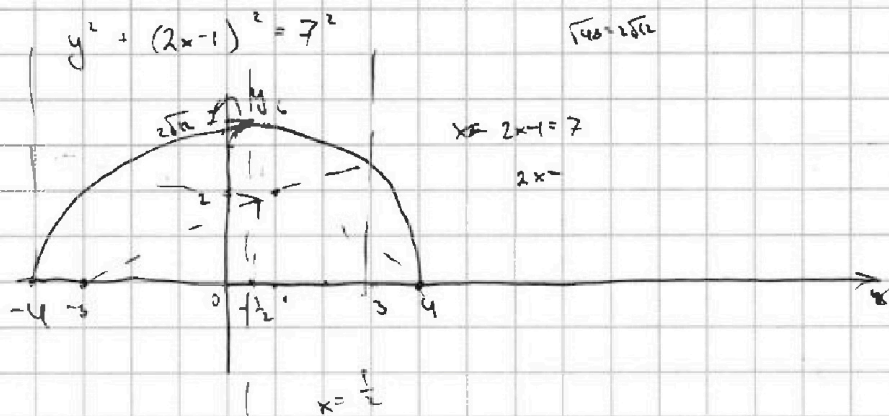


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + 12$  12,25  $\frac{3,5}{3,5}$

$-x^2 + x + 12 = 25$  (1) (2) 175

$x^2 - x + 13 = 0$  105

$\frac{12,25}{12,25}$  12,25

$2 - \sqrt{3} + 5 = 7 - \sqrt{3}$

$2 \sqrt{-1+1+12} = 4\sqrt{3}$

~~2\sqrt{3}~~  
 $\sqrt{5-2+5} = 2\sqrt{-4+2+12} = 2\sqrt{10}$

$\sqrt{6+4} = 2\sqrt{-8+3+12} = 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$  мл.

$2 - \sqrt{3} + 5 = 7 - \sqrt{3}$   $4\sqrt{3}$   $\sqrt{4,5} - \sqrt{3,5} + 5 =$

$7 - \sqrt{3} < 4\sqrt{3}$

$7 > 5\sqrt{3}$

$7 < 4\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x \quad (x+3)(121-88x+16x^2)$$

$$16x^4 + 4x^2 + 576 - 16x^3 - 132x^2 + 96 = 121x - 88x^2 + 16x^3 + 363 - 264x + 48x^2$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f(t) = 4(t^3 + 3t^2 + 3t - 3) + 6(t^2 + 2t) + 3(t + 0) - 3 =$$

$$= 4t^3 + 12t^2 + 6t^2 + 12t + 3t + 3t - 3 = p$$

$$dp = 12t^2 + 12t + 3$$

$$\frac{dp}{dt} = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

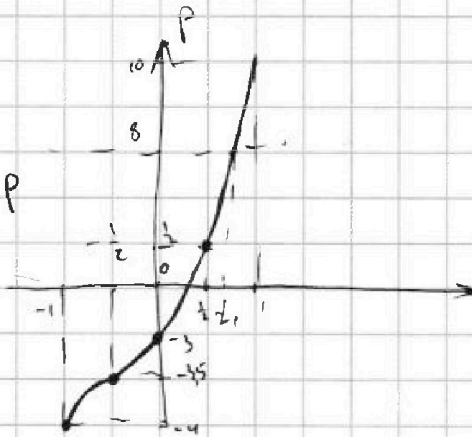
$$dp = dt = \frac{dp}{3(2t+1)^2}$$

$$t = \frac{p}{3(2t+1)^2}$$

$$3t(2t+1)^2 = p$$

| p   | t   |
|-----|-----|
| -3  | 0   |
| 0,5 | 1/2 |

$$p = 3,5$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$(t - t_1) \left( \dots - \frac{3-p}{t_1} \right) = 0$$

$$t = t_1$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p \quad | \quad t-x$$

$$4t^3 - 4t^3$$

$$-t^2(4x+6) + 3t$$

$$-t^2(4x+6) - t^2(4x+6)$$

$$-t(x(4x+6)+3) - 3 - p$$

$$\dots - x^2(x(4x+6)+3)$$

$$-3 - p + x(x(4x+6)+3) = 0$$

$$-3 - p = -x^2 \quad 3 + p = x^2(x(4x+6)+3)$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = p$$

$$\sqrt{p+1} = 1,5 \quad \text{or} \quad 4,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА      ИЗ     

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3)  $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$

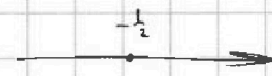
$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

$\cos x = t \in [-1; 1]$   
 $1 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + 3\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) + 6\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$   
 $4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$   
 $1 - 4,5x^2 + 3 - 6x^2 + 6 - 3x^2 = p \Rightarrow -\frac{1}{2}$   
 $10 - 13,5x^2 = p$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

1) при  $p = -3 \mid t = 0$



1)  $t(4t^2 + 6t + 3) = 0$

$\begin{matrix} p=10 \\ x=0 \end{matrix}$

$D_1 = 9 - 12 < 0 \Rightarrow t = 0$  единств. корень.

$t = 1: 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$p = 10 \Rightarrow$

уменьш  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  у увелич  
 будет

$$\begin{array}{r} 4t^3 + 6t^2 + 3t - 13 \mid t-1 \\ \underline{4t^3 - 4t^2} \\ 10t^2 + 3t \\ \underline{10t^2 - 10t} \\ 13t - 13 \end{array}$$

$\frac{4t^3 + 6t^2 + 3t - 13}{t-1} = 4t^2 + 10t + 13$

$$\begin{array}{r} 4t^3 + 6t^2 + 3t + 13 \mid t+1 \\ \underline{4t^3 + 4t^2} \\ 2t^2 + 3t + 13 \\ \underline{2t^2 + 2t} \\ t + 13 \end{array}$$

$\frac{4t^3 + 6t^2 + 3t + 13}{t+1} = 4t^2 + 2t + 1$

меньше 1 увелич

$\Rightarrow t = 1: -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$= -4$

$(t+1)(4t^2 + 2t + 1)$  корни есть при  $p \in [-4; 10]$

$(t-1)(4t^2 + 10t + 13) \Rightarrow t = 1$  един. корень

$D_1 = 25 - 20 > 0$

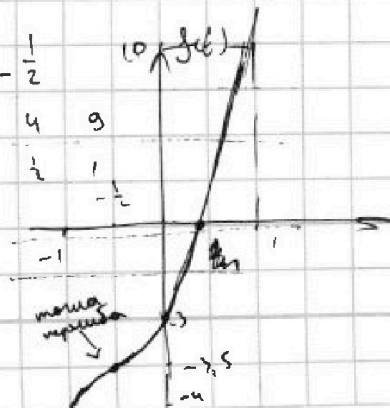
$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$

$\frac{4}{-8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 = -0,5 + 1,5 - 1,5 - 3 = -3,5$

$2t^2(2t+3) + 3t - 3 - p = 0$

$(t-t_1)d(t) = p \Rightarrow t-t_1 = \frac{p}{d(t)} \quad t_1 = t - \frac{p}{d(t)}$

минимум  $-1/2$



наиб. будет при  $t = 1$ .

$t = -1/2: \frac{4}{8} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} - 3 = 0,5 + 1,5 + 1,5 - 3 = 0,5 \quad p = 0,5$

$p = 10 \quad t = 1$

$p = -4 \quad t = -1$

$p = -3,5 \quad t = -1/2$

$p = -3 \quad t = 0$

$p = 0,5 \quad t = 1/2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②  $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$

$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} = \sqrt{(13-z)(13+z)}$

$x \geq -3$   
 $z \in [-13; 13]$   
 $4-x-z \geq 0$

$8ab - 4a + 4b = 10 = 0$   
 $(4a+z)(2b-1) + 10 = 0$   
 $(3a-15)(2b-1)$   
 $a-b+5 = 2ab$   
 $2ab - a + b - 5 = 0$   
 $6ab - 3a + 3b - 15 = 0$   
 $x \in [-3; 4]$   
 $4ab - 2a + 2b - 10 = 0$   
 $(2a+1)(2b-1) - 9 = 0$

$y = 12, z = 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$   $(2a+1)(2b-1) = 9$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$   $a-b+5 = 2ab$   $(6ab - 2a + 6b - 40 = 0)$

$x \geq -3$   
 $x \leq 4$   
 $-x^2+x+12 \geq 0$   
 $x^2-x-12 \leq 0$   
 $(x-4)(x+3)$   $2ab - a + b - 5 = 0$   $(2a+1)(2b-1) = 9$

$y = 2\sqrt{12+x-x^2}$   $(a-1)(b-5)$   
 $2ab - a + b - 5 = 0$

$(2xy - x + y - 5) = 0$   $y^2 = 48 + 4x - 4x^2$   $(2a)(b)$   
 $y^2 + (2x-1)^2 = 7^2$

$(ax+b)(cy+d) = acxy + bcy + dax + bd$

$bd = -5$   
 $ac = 2$   
 $bc = 1$   
 $da = -1$

$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(-x^2+x+12) + 25 - 20\sqrt{-x^2+x+12}$   
 $7 - 2\sqrt{f} = -4x^2 + 4x + 73 - 20\sqrt{f}$   
 $18\sqrt{f} = -4x^2 + 4x + 66$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$   $9\sqrt{f} = -2x^2 + 2x + 33$   $D = 424 - 1 + 33 = 34$

$\sqrt{3} - \sqrt{4} + 5 = 2\sqrt{2}$