



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть $b-1$ член прогрессии, q - ее знаменатель. тогда из условия:
 $bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ $x \neq 5, x \neq 35, x \neq -1$, т.к. или иначе система
 не имеет, или это геом. прогрессия (2 члена
 $bq^{12} = \sqrt{5-x}$ 0 , а третий - нет). $b, q \neq 0$ однозначно.

$$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{bq^{14}}{bq^6} = q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Leftrightarrow q^4 = |x+1| \Leftrightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

1сл.) $x < -1$. тогда $q^2 = \sqrt{-(x+1)}$, а $bq^{12} = bq^{14} : q^2 =$
 тогда $13x-35 < 0$.

$$= \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{-(x+1)}} = \sqrt{35-13x} = 5-x \quad (2) \quad \begin{cases} 35-13x \geq 25-4x+x^2 \\ x < 5 \end{cases} \quad (3)$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 20 \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x \geq -5 \text{ из того, что } x < -1, \\ x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$$

2сл.) $x > 13/35$ (т.к. одна корня отриц.) тогда $5-x = bq^{12} = \frac{bq^{14}}{q^2} =$
 $q^2 = \sqrt{x+1}$

$$= \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{x+1}} \quad (2) \quad \begin{cases} 25-4x+x^2 = 13x-35 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x^2 - 23x + 60 \geq 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x \geq 20 \\ x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

Ответ: $\{3; -5\}$

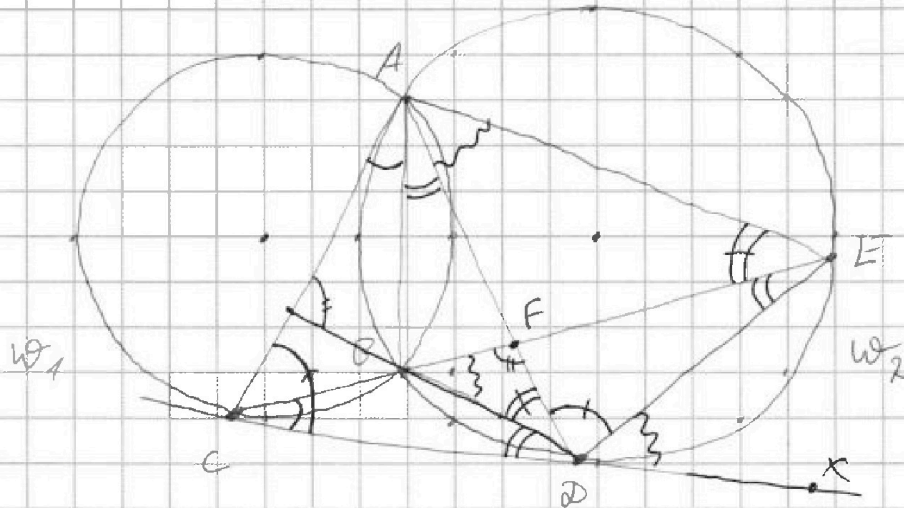


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) $F = AD \cap CE \Rightarrow$ по условию, $\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$.
- 2) $\angle BCD = \angle CAB$ как угол между хордой и кас-ой. аналог, $\angle BAD = \angle BDC$.
- 3) $\angle FBD = \angle BCD + \angle BDC$ как внешний.
- 4) $\angle FBD = \angle EDX = \angle DAE$ как угол между хордой и кас-ой.
- 5) ~~$\angle C$~~ $\angle CAB + \angle BAD = \angle BCD + \angle CDB = \angle FBD = \angle DAE \Rightarrow \angle CAD + \angle BAD = \angle CAD = \angle FAE \Rightarrow AD$ - диаметр $\triangle CAE$ по оп-ию $\Rightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$.
- 6) $\angle ACD + \angle CAD = \angle ADX = \angle ADE + \angle EDX = \angle ADF + \angle FE$
 $\angle CAD \Rightarrow \angle ACD = \angle ADE$. тогда $\triangle ACD \sim \triangle DAE$ по I оп-ию \Rightarrow
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ если $AC = 3y$, то $AE = 10y$ (из п. 5), и тогда $AD = y\sqrt{30}$.
 тогда $\frac{AC}{AD} = \frac{3y}{y\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ из подобия, $\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - простое, то есть несколько вариантов, как представить $(a-c)$ и $(b-c)$ через p и \pm (как множители квадрата)

$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$ и, так как $a > b$, то возникает 2 случая:

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

1сл.) $a = c+p^2$ тогда $a-b = p^2-1$ и не кратно 3
 $b = c+1$

так как квадраты делятся на 3 тогда можно рассмотреть случаи 0 или ± 1 (нулю число $n = 3k+2$,

где $0 \leq 2 < 3$ тогда $n^2 = 9k^2 + 6k + 2^2$, тогда $n^2 \equiv 2^2$, если $2=0$, то $n^2 \equiv 0$, $2=1$ или 2 , то $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$), то p^2 делится на 3, следовательно

меньше, $p^2 \geq 9 \Rightarrow p \geq 3$ поэтому будем это b

$$a+b^2 = 560; \quad c+p^2+c^2+c+1 = 560 \Leftrightarrow c^2+3c = 550 \Leftrightarrow (c+25)(c-22) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -25, \text{ в таком случае: } c = -25, b = -24, a = -16 \\ c = 22, \quad c = 22, b = 23, a = 31. \end{cases}$$

2сл.) $a = c-1$ аналогично, $p \geq 3$, тогда $c-1+c^2-2cp^2+p^4 = 560$

$$b = c-p^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 17c = 490 \Leftrightarrow (c-32)(c+15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 32 \\ c = -15 \end{cases}$$

6 таких случаев, $c = 32, b = 23, a = 31$

$$c = -15, b = -24, a = -16$$

Ответ: $\{(-16; -24; -25), (31; 23; 22), (31; 23; 32), (-16; -24; -15)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c_1 c^2 - c_1^2 + c_0^2 - 2c_1 c_0 \cdot c_0 \cdot \cos \angle (C_1 O; C_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{76}{3} = 9 + \frac{7}{3} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \angle (C_1 O; C_0) \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \angle (C_1 O; C_0) = -14.$$

~~$\frac{9 + \frac{76}{3} - \frac{7}{3}}{2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$~~ $\frac{7}{3}$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{3}$ Тогда $\angle C_1 O C_0$ не существует
ит. т.е. изначальное предположение неверно. Тогда условие не корректно.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-p \\ b = c-p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+p \\ b = c+p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+p^2 \\ b = c+1 \end{cases} \oplus$$

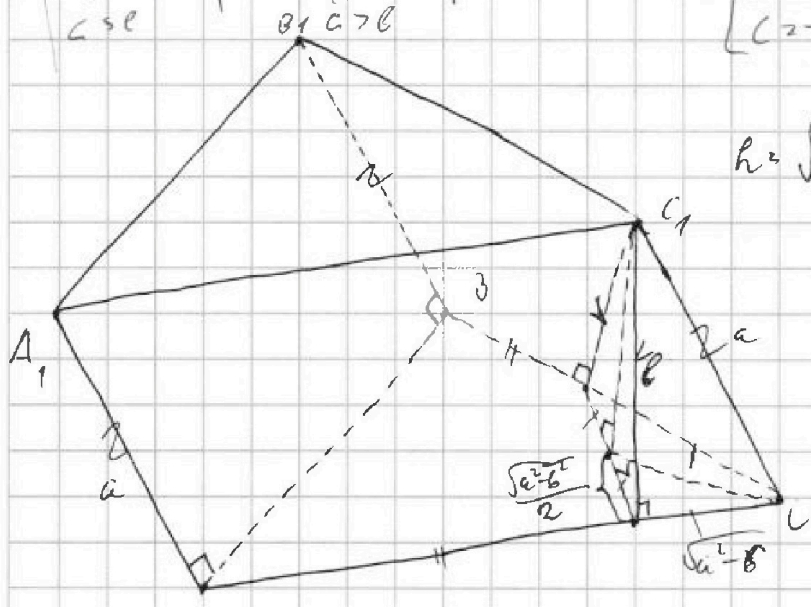
$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-p^2 \\ b = c-1 \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases} \oplus$$

1а) $a = c+p^2, b = c+1, p^2 \neq 1, 3$
 $c+p^2 + c^2+2c+1 = 560, p^2 \neq 1$
 Но $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ или $p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3$
 $c+3c = 550, 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5$
 $c = 25 \Rightarrow \begin{cases} a: 24, b: 24, c: 25 \\ c: 22 \Rightarrow \begin{cases} a: 31, b: 23, c: 22 \end{cases} \end{cases}$

2а) $a = c-1, b = c-p^2$ аналогично, $p=3$
 $c-1 + c^2 - 2p^2c + p^4 = 560$
 $c^2 - 14c + 81 = 560$
 $c^2 - 14c + 480 = 4 \cdot 120 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$
 $\begin{cases} c = 35 \Rightarrow a: 34, b: 26, c: 35 \\ c = 15 \Rightarrow a: 14, b: 24, c: 15 \end{cases}$



$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 - b^2}{4}} = \sqrt{\frac{5b^2 - a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{x+3}, \quad a^2 + b^2 = 7 + z$$

$$b = \sqrt{4-x-z}$$

$$ab = \sqrt{(x+3)(4-x-z)} =$$

$$= \sqrt{4x+12 - x^2 - 3x - z - 3z} =$$

$$= \sqrt{x - x^2 - z - 3z}$$

лучше одной сим-ти: уделить на 4, закрывав в одном, закрывав в другом симметричные позиции, тогда для закрываем

$$3 \left(4 \cdot C_{625}^1 \cdot 4 \cdot C_{624}^1 \cdot 4 \cdot C_{623}^1 \cdot 4 \cdot C_{622}^1 \right) = 384 \cdot 625 \cdot 624 \cdot 623 \cdot 622$$

или 2 симметрии, но закрывав 1, мы точно закрывав еще 2, значит, еще 1-автоматически, тогда необходимо к клетке

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot C_{625}^1 \cdot C_{624}^1, \quad 2 = 384 \cdot 625 \cdot 624 \cdot 623 \cdot 622 + 4 \cdot 625 \cdot 624 =$$

$$= 625 \cdot 624 (96 \cdot 623 \cdot 622 + 1)$$

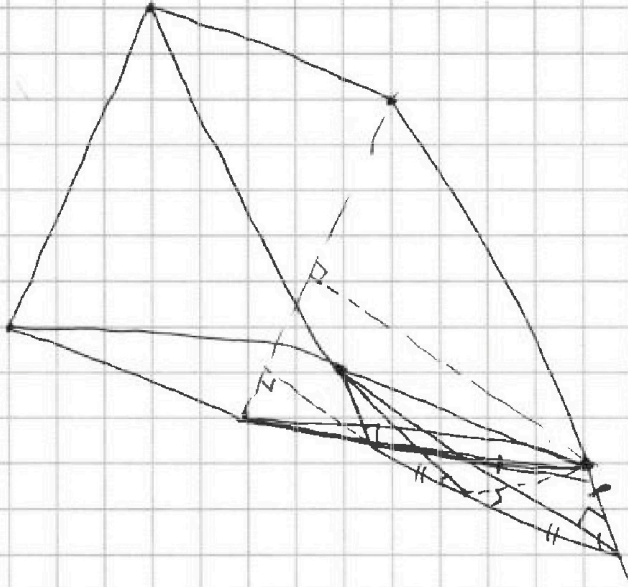


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11

$$b, q \begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b \cdot q^{12} = 5-x \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \neq -1 \\ q^6 &= (x+1)^2 \Rightarrow q^7 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow q^2 = \sqrt{1(x+1)} \\ b \cdot q^7 &= \frac{1}{2}(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1a.) \quad x < -1. \quad q^2 &= \sqrt{-(x+1)} \quad b \cdot q^{14} = b \cdot q^6 \cdot q^4 \cdot q^2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ &\quad q^4 = -(x+1) \\ \sqrt{-(x+1)} \cdot -(x+1) &\Rightarrow \sqrt{13x-35 \cdot (-1)} = \sqrt{35-13x} = 5-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35 - 26 \cdot 35x + 169(35-13x)^2 &= 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \oplus \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a.) \quad x \geq \frac{35}{13} \quad q^7 &= x+1 \quad \begin{cases} \sqrt{13x-35} = (5-x) \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 13x-35 = 25-10x \\ \Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \oplus \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 3, -5

12

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$q(y+1) + 3(y-2) = \sqrt{169-2^2}$$

$$1y \geq 2. \quad y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 12y + 36 = 21y + 432 + 6y^2 - 6y - 72 = 169 - 2^2$$

$$\begin{aligned} 16y^2 - 4y - 35 &= 169 - 2^2 \Leftrightarrow 16y^2 - 16 \cdot 35y + 35^2 = 169 - 2^2 \\ \Leftrightarrow a = 4y, \quad (a - 35)^2 + 2^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

13

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$f = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 \quad (2 \cos x + 1)^2 = 0$$

$$\geq 0 \Rightarrow f \text{ не убывает} \Leftrightarrow \cos x = -1/2 \text{ - минимальное значение}$$

$$\text{максимум: либо } x \text{ либо } -1 \quad 4+6+3-3=p \Rightarrow p=10, \quad f(-1)=4 \Rightarrow p \in [4; 10]$$

$$-4/8 \quad 3/2 \quad 6/x \quad 3 = \frac{4-12+12}{8} - 3 = \frac{-4+6-3-3}{8} \Rightarrow p=4, \quad f(1)=20$$

2 - 3, 5



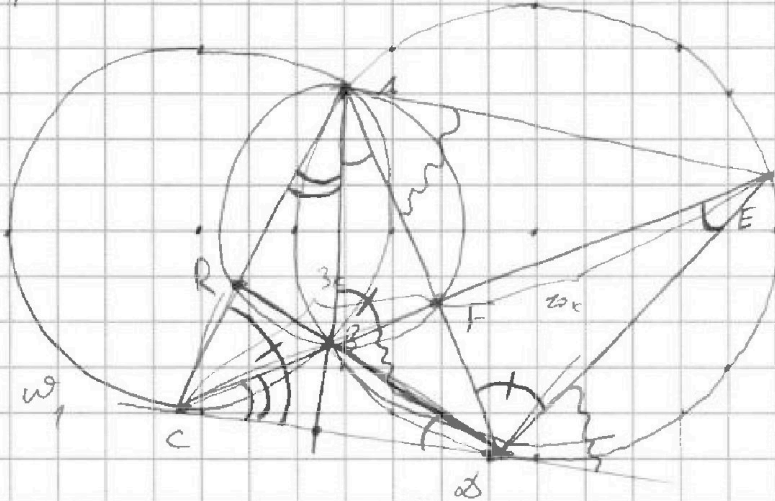
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$\frac{FE}{DR} = \frac{DE}{CP}$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\omega_2 \frac{AC}{AE} = \frac{3}{20}$$

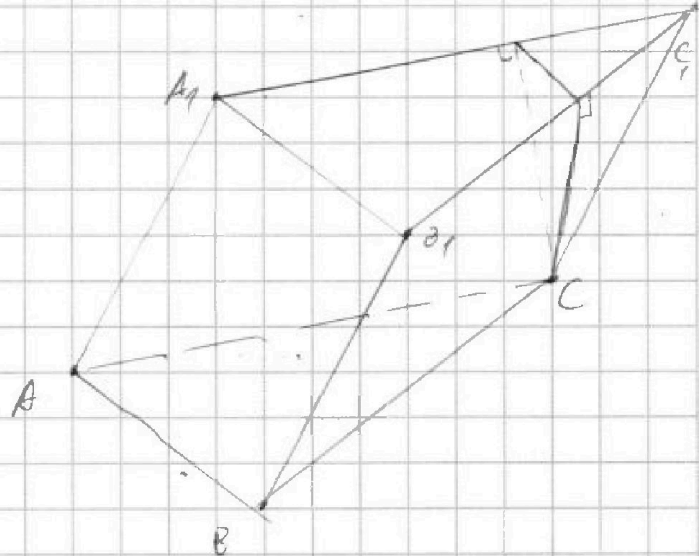
15



относительно "средней линии" - $C_{\text{ср}}^4$
 разделим на 4 прямоугольника ($50 \cdot 125$)
 углы по соседней стороне. Тогда в сумме
 ω - не определена по условию суммы

сумма упрощается, тогда $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = C_4^4 \cdot C_4^1$

17



$$\begin{aligned}
 & b = c + 1 \quad a = c + 1 \quad \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases} \\
 & \sqrt{a-c} = p \quad \sqrt{b-c} = p \\
 & 3) \quad a = c + p^2 \quad b = c + p^2 \quad \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + p^2 \end{cases} \\
 & a = c + p^2 \quad c + p^2 > c + 1 \\
 & b = c + 1 \quad p^2 > 1 \oplus \\
 & a = c + 1 \quad 17 p^2 \oplus \\
 & b = c + p^2
 \end{aligned}$$