



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$003: (13x-35)(x+1) \geq 0 \quad x+1 \neq 0$$

$$\text{VII} \quad a \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\downarrow$$

$$x \in \cancel{(-\infty; -1)} \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$\text{XIII} \quad a \cdot q^{12} = 5-x$$

$$\frac{\text{XV}}{\text{XIII}}: q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{13x-35}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$\text{XV} \quad a \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a \cdot q^{14} = a \cdot q^{12} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$x = -1 \text{ (X)} \quad \sqrt{|13x-35|} = \begin{cases} 5-x & |x \leq 5 \\ \end{cases}$$

$$|13x-35| = (5-x)^2$$

$$x \in (-\infty; -1): \quad x \in \left[\frac{35}{13}; 5\right]$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$13x - 35 = 25 - 10x + x^2$$

$$0 = x^2 + 3x - 10$$

$$0 = x^2 - 23x + 60$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$x = \{-5; 2\}$$

$$x = \{3; 20\}$$

$$x = -5$$

$$x = 3$$

$$x = 3:$$

$$q^2 = \sqrt{|3+1|} = 2$$

$$\text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{30-35}{4^3}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5-3 = 2$$

$$\text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(39-35)(4)} = 4$$

все работает,  $a_n = 2^{\frac{(n-11)}{2}}$

$$x = -5:$$

$$q^2 = \sqrt{|-5+1|} = 2$$

$$\text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{-65-35}{-4^3}} = \frac{10}{2^3}$$

$$\text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5 - (-5) = 10$$

$$\text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(-65-35)(-4)} = 10 \cdot 2$$

все работает,  $a_n = 10 \cdot 2^{\frac{(n-13)}{2}}$

Ответ:  $x = \{-5; 3\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

~~$\cos \varphi = \cos \varphi \cdot 1 + \sin \varphi \cdot 0$~~   
 ~~$\cos \varphi = \cos \varphi \cdot 1 + \sin \varphi \cdot 0$~~   
 ~~$\cos \varphi = \frac{1}{2}$~~

$$\cos(3x) + 3\cos(2x) + 6\cos x = p$$

~~$\cos(3x) = \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x$~~   
 ~~$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$~~   
 ~~$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$~~

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) + 3(2\cos^2(x) - 1) + 6\cos x = p \quad t = \cos(x); \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = y$$

Экстремумы:

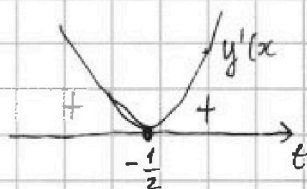
$$y'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

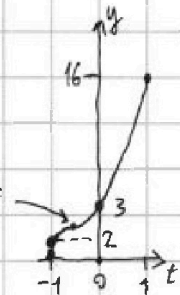
$$t = -\frac{1}{2}$$

(пересет)  $\Rightarrow y(t)$  — монотонная ф-я



$$\begin{aligned} y(-1)(\min) &= -4 + 6 - 3 + 3 = 2 \\ y(1)(\max) &= 4 + 6 + 3 + 3 = 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p \in [2; 16]$$



$$\begin{aligned} y(-\frac{1}{2}) &= -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} + 3 = \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

~~Производная симметрична~~  
относительно  $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)$  симметрична относительно точки  $(-\frac{1}{2}; 2,5)$ , то есть

$$\begin{aligned} 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 &= \\ &= (4t^3 + 4t^2 + t) + (2t^2 + 2t + \frac{1}{2}) + 2,5 = \\ &= t(2t+1)^2 + \frac{1}{2}(2t+1)^2 + 2,5 = \\ &= 4(t + \frac{1}{2})^3 + 2,5 \end{aligned}$$

~~$y(-1-t) = 2,5 - y(t) = 2,5$~~   
 ~~$y(-1-t) = 2,5 - y(t)$~~

$$y = 2,5 + 4(t + \frac{1}{2})^3$$

~~$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$~~

~~$4(-1-t)^3 + 6(-1-t)^2 + 3(-1-t) + 3 = p$~~

$$\frac{p - 2,5}{4} = (t + \frac{1}{2})^3$$

$$t = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

Ответ:  $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}) + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$



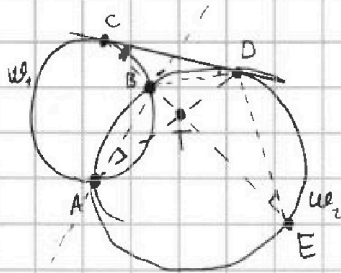
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$\frac{CT}{TE} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{CT}{CE} = \frac{3}{13}$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

~~DE/AB~~  
~~DE/CE~~  $\frac{DE}{CE} = \frac{BD}{CD}$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow BD^2 = CB \cdot DE$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{\sqrt{CB \cdot DE}}{CD}$$

$$\frac{DE \cdot CB}{CD^2} = \frac{\sqrt{CB \cdot DE}}{CD} = 1$$

~~a/b/c/d~~ ~~a/b/c/d~~  
~~b/d = b/c~~  
~~a/c/d^2~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

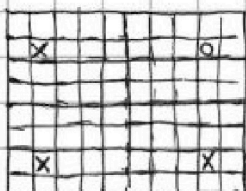


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5



Для каждой ~~клетки~~ <sup>клетки</sup> могут выставляться 1, 2 или 3 симм. Разобьём 8 наших клеток на группы взаимноисм., состоящие из 2, 3 или 4 клеток. Это можно сделать 4 способами:

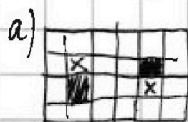
$$I \quad 8 = 2+2+2+2$$

$$II \quad 8 = 2+2+4$$

$$III \quad 8 = 4+4$$

$$IV \quad 8 = 3+3+2$$

1) Группа из двух задаётся одной клеткой и бывает двух типов:



a) имеет 2 симм. положения:  $\begin{matrix} x & & & \\ & x & & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & & x \\ & & x & \end{matrix}$

б) имеет 4 симм. положения:  $\begin{matrix} x & & & \\ & x & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & & x \\ & & x & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & & \\ & & x & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & x & \\ & & & \end{matrix}$

группе две симм. клетки вычёркиваются,

чтобы при добавлении следующей группы новая клетка не стала частью этой

2) Группа из 3 задаётся одной клеткой и бывает одного типа:



имеет 4 симм. положения:  $\begin{matrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & x & \\ & & x \\ & & & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & x \\ & & & x \\ & & & & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & & x \\ & & & & x \\ & & & & & x \end{matrix}$

3) Группа из 4 задаётся одной клеткой однозначно:



⇒ Для каждого способа группировки (I; II; III; IV) зададим каждую группу клеткой в правой верхней четверти.

$$I: N_I = C_{12500}^4 \cdot 6^4 \leftarrow \begin{matrix} \text{6 видов} \\ \text{группы по 2} \end{matrix}$$

↑ 4 группы по 2

$$II: N_{II} = C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 \cdot 1!$$

↑ 2 группы по 2    ↑ оставшаяся группа по 4

$$III: N_{III} = C_{12500}^2 \cdot 1^2$$

$$IV: N_{IV} = C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$$

$$\text{Ответ: } N = N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV} = C_{12500}^4 \cdot 6^4 + C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 + C_{12500}^2 + C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6:

I.  $a; b; c \in \mathbb{Z}$

II.  $a > b$

III.  $a - b \neq 3$

IV.  $(a - c)(b - c) = p^2$

V.  $a + b^2 = 560$

V.  $a + b^2 = 560$

+II  $b + b^2 \leq 560$

$b^2 + b - 560 \leq 0$

$\Delta = 1 + 4 \cdot 560 = 2241$

$b \in \left( \frac{-1 - \sqrt{2241}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2241}}{2} \right)$

$b \in [-24; 23]$

$a = 560 - b^2$

$a - b = 560 - b^2 - b$

$$\begin{array}{r} 560 \mid 2 \\ 2 \mid 280 \\ 140 \mid 2 \\ 70 \mid 2 \\ 35 \mid 5 \\ 7 \mid 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 4 \\ \hline 2240 \\ \hline 2241 \\ \hline 2241 \\ \hline 0 \\ \hline 2241 \\ \times 2 \\ \hline 4482 \\ \hline 2241 \\ \hline 2241 \\ \times 23 \\ \hline 46 \\ \hline 529 \\ \hline 24 \\ \hline 24 \\ \hline 48 \\ \hline 48 \\ \hline 576 \\ \hline a = -16 \end{array}$$

III	b	b <sup>2</sup>	b <sup>2</sup> (mod 3)	b(mod 3)	560(mod 3)	
	1	1	1	1	2	X
	2	4	1	2	2	✓
	3	9	0	0	2	✓
	4	16	1	1	2	X
	5	25	1	2	2	✓
			0	0	2	✓

$\Rightarrow b \not\equiv 1 \pmod{3}$

$b = \{ \dots -10 -9 -7 -6 -4 -3 -1 0 2 3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20 21 23 \}$

IV  $(a - c)(b - c) = p^2$

- $a - c = 1; b - c = p^2$
- $a - c = -1; b - c = -p^2$
- $b - c = 1; a - c = p^2$
- $b - c = -1; a - c = -p^2$

$b - a + 1 = p^2 \times a > b$   
 $b - a - 1 = -p^2$   
 $a - b + 1 = p^2$   
 $a - b - 1 = -p^2 \times a > b$

$a - b = p^2 - 1$

$\Rightarrow 560 - b^2 - b = p^2$

$560 - b^2 - b = 1$

$560 - b^2 - b = p^2 - 1$

$\Delta = 1 + 4(560 - p^2 + 1) = (\text{квадрат неч. числа}) \rightarrow \text{целое } b$

$1 + 4 \cdot 560 + 4 - 4p^2 = \text{неч}^2 \rightarrow \text{неч}^2 \pmod{4}$

$\frac{(2n-1)^2 - 1}{4} = \frac{4n^2 - 4n}{4} = n^2 - n$

$1 + 4 \cdot 561 - 4p^2 = 561 - p^2 = \frac{\text{неч}^2 - 1}{4}$

$561 - p^2 = n^2 - n = b^2 - b$

$p: 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots$

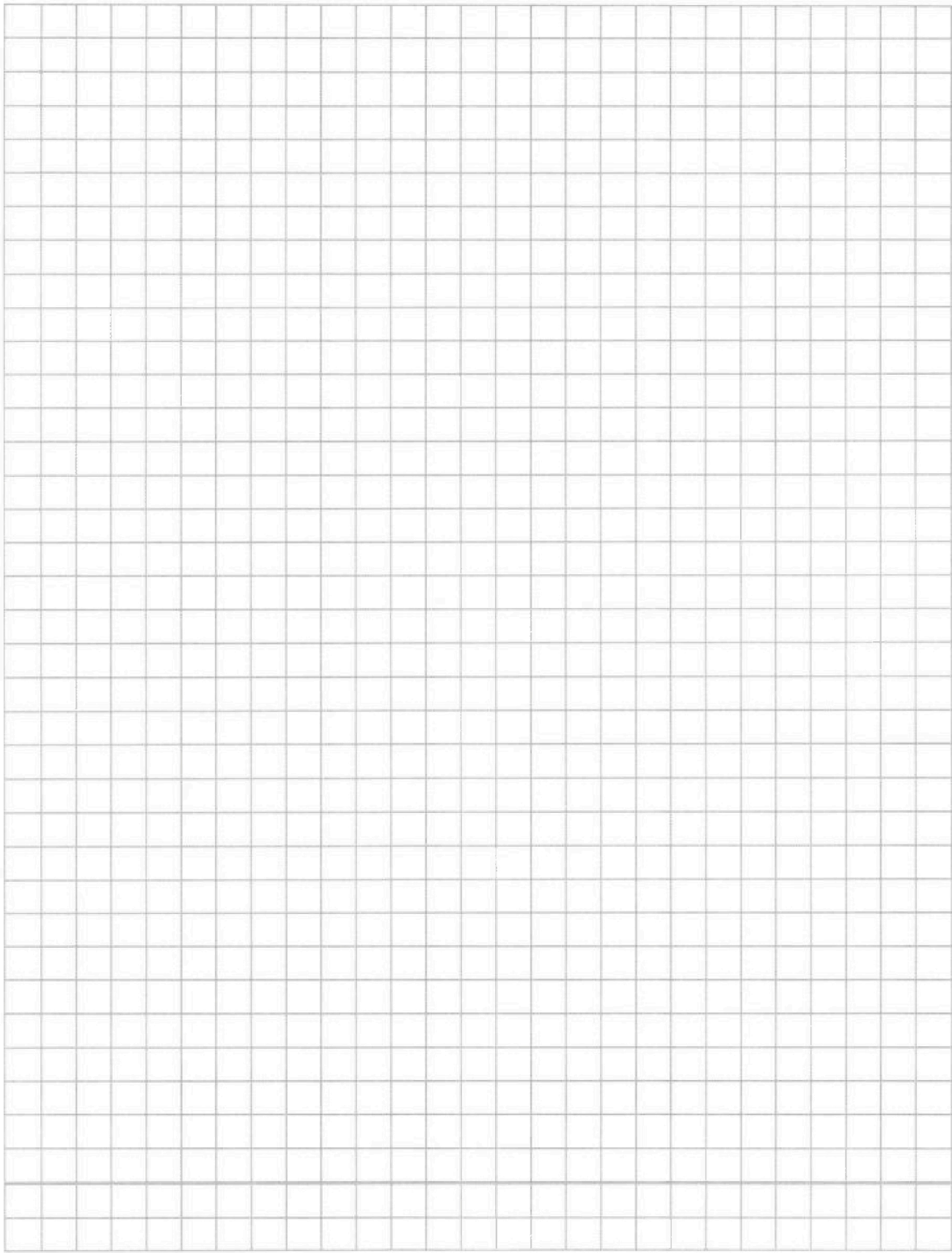


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1     2     3     4     5     6     7

СТРАНИЦА  
\_ \_ ИЗ \_ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





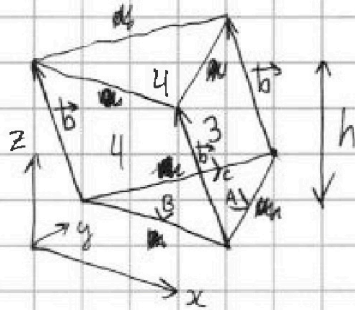
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Обозначим двугранные углы при основании за  $A$ ;  $B$  и  $C$ , тогда:

$$\frac{h}{\sin A} = 3$$

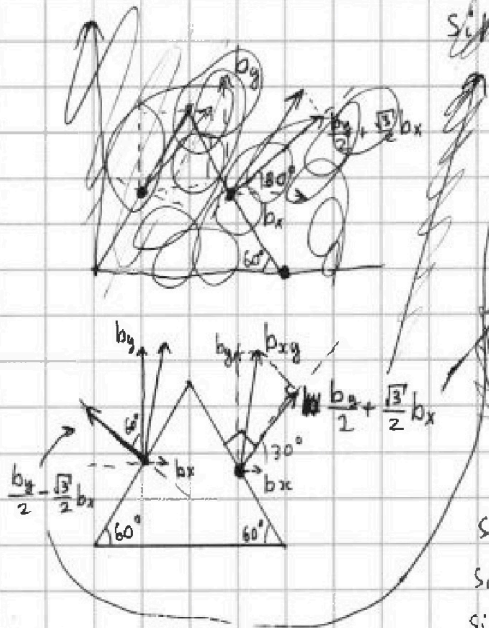
$$\frac{h}{\sin B} = 4$$

$$\frac{h}{\sin C} = 4$$

Пусть  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ , тогда

$$\sin B = \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{4} \Rightarrow \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = 4$$

$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{4} \Rightarrow \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = 4$$



$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2}} = \frac{h}{3}$$

$$\sin C = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2}} = \frac{h}{4}$$

$$\begin{cases} \sin B: & h^2 + b_y^2 = 16 \\ \sin A: & h^2 + (\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2 = 9 \\ \sin C: & h^2 + (\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{9 - h^2}$$

$$\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$b_y = \pm \sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2} = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$h^2 = 9$$

$$h = 3$$

$$b_y = \sqrt{7}$$

$$b_x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \quad b_z = 3$$

Ответ:  $h = 3$

$b_y^2 = 16 - h^2$   
 $\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{9 - h^2}$   
 $\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{16 - h^2}$   
 $b_y = \pm \sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2}$   
 $4 - h^2 = (\sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2})^2$   
 $h \in \mathbb{R}$   
 невозможна или



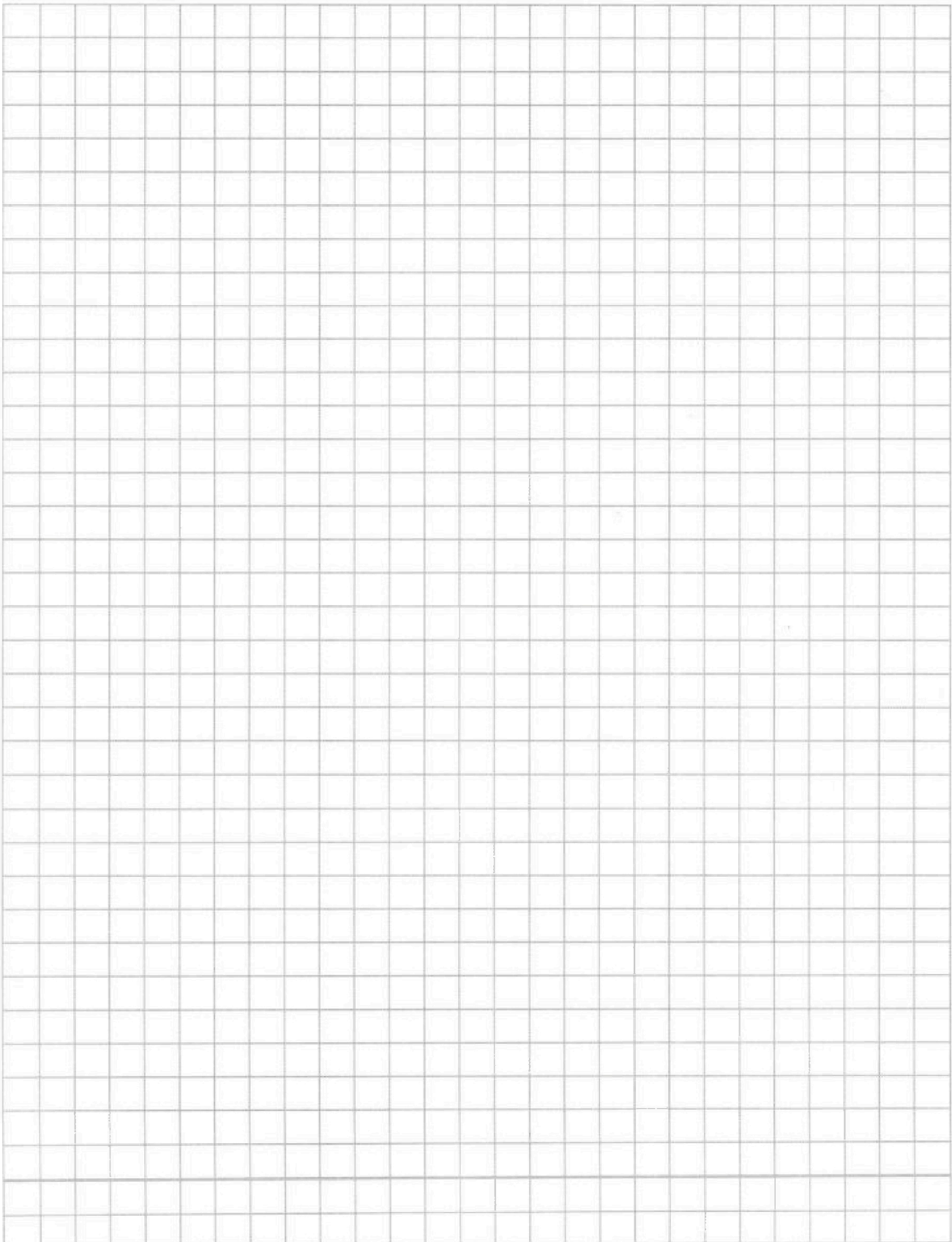


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



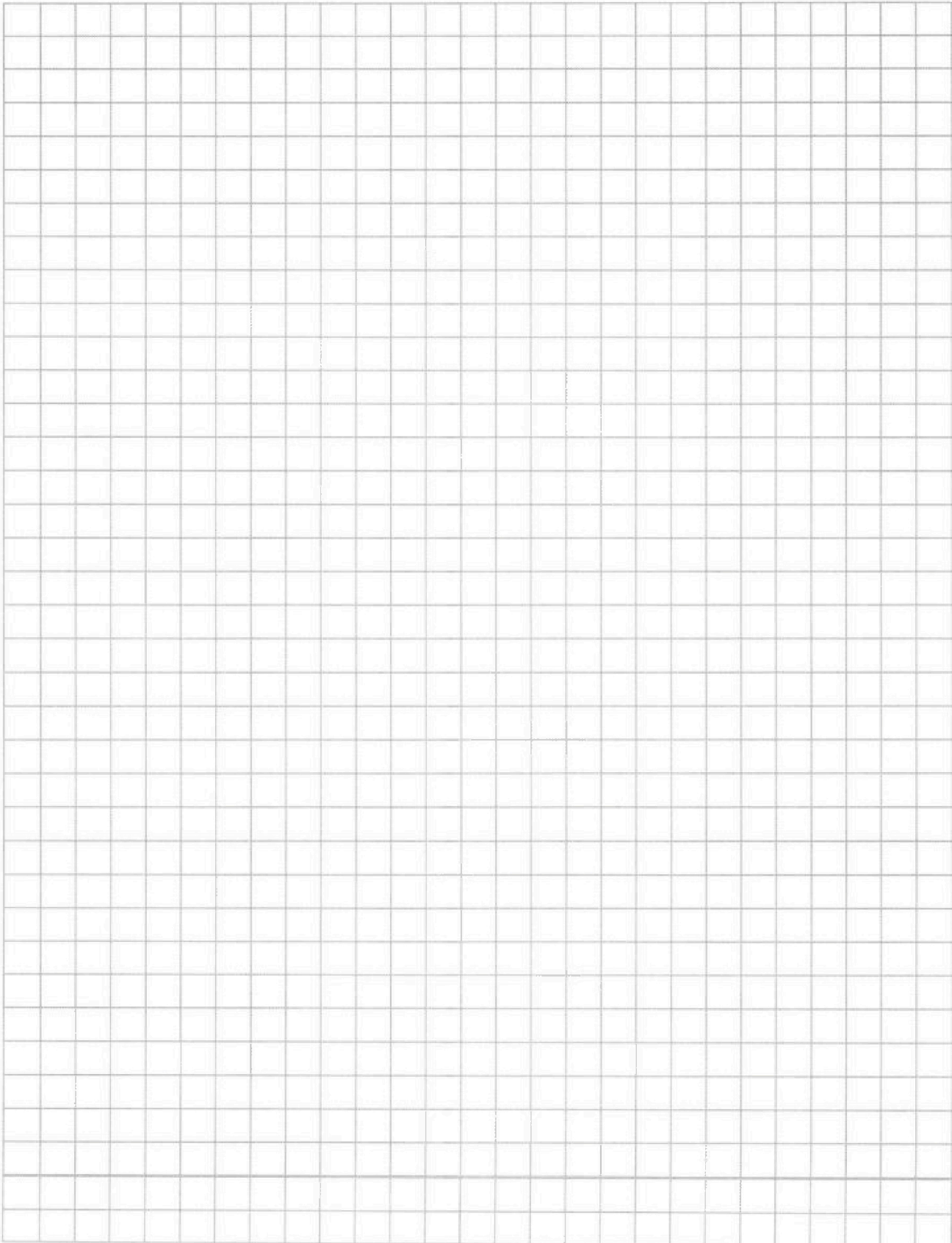


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

