



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1
x-?

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} - \text{седьмой член прогрессии,}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} - \text{пятнадцатый член прогрессии}$$

$$5-x - \text{пятнадцатый член прогрессии}$$

b - первый член прогрессии, q - её знаменатель.

~~Ограничения:~~

$$b \neq 0$$

$$q > 0$$

$$q \neq 1$$

$$q \neq 0$$

$$(13x-35)(x+1) > 0$$

$$x \neq -1$$

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \\ b q^{12} = 5-x \end{cases}$$

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2$$

$$x \neq \frac{35}{13} \text{ (м.к. иначе } b q^6 = 0, \text{ но } b \neq 0, q \neq 0)$$

$$1) \quad q^4 = (x+1) \quad (x \neq -1)$$

$$q^2 = \sqrt{x+1}, \text{ м.к. } q^2 \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{x+1})$$

$$\rightarrow b \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x+1) = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b(x+1) = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = 5-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$\begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \Rightarrow \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ (подходит по } \text{ограничениям})$$

$$\begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \leq 5 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad q^4 = -x-1 \quad \geq 0 \quad x \leq -1$$

$$-b(x+1)^3 = 5-x$$

$$b(x+1)^3 = x-5$$

$$q^2 = \sqrt{-x-1} \quad \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{-x-1})$$

$$b(\sqrt{-x-1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) \cdot \sqrt{-x-1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) = \sqrt{\frac{35-13x}{(x+1)^4}}$$

$$-b = \frac{\sqrt{35-13x}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x}^2 = (5-x)^2$$

$$x \leq 5$$

$$35-13x = 25-10x+x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x \leq 5 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -5$$

(подходит под определение)

Ответ:
-5; 3

~~при x = 3!~~

при $x = 3!$

$$b q^6 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = 2$$

$$b q^{12} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{32}$$

$$b q^{14} = 4$$

при $x = -5$

$$b q^6 = \frac{5}{4}$$

$$b q^{14} = 20 \Rightarrow b = \frac{5}{32}$$

$$b q^{12} = 10$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q^6 = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1 + 3(y-12)| = \sqrt{169-z^2} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$x+z \leq 4$$

$$\Rightarrow x^2 \leq x+y+z \leq 4+y$$

$$\Rightarrow y \geq x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x+y-x^2+z \geq x+z-4$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{x+y+z-x^2} + \sqrt{4-(x+z)}$$

$$(2) \quad 1. \quad y+1 + 3y - 36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$4y - 35 = \sqrt{169-z^2}$$

$$y \geq \frac{35}{4}$$

ODЗ:

$$z^2 \leq 169$$

$$z \geq -3$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+y+z \geq x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$p = ?$

} ≥ 1 решение

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

Рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3, t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$$

$$f'(t) = 3(2t + 1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow f(t)$ ~~монотонно~~ ~~возрастает~~ монотонно возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{2})$ и монотонно возрастает на $(-\frac{1}{2}; +\infty)$

$t \in [-1; 1] \Rightarrow$ свое минимальное значение ^{на $[-1; 1]$} она принимает в $t = -1$: $f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

т.к. $f(t)$ - монотонно возрастающая функция, то свое максимальное значение ^{на $[-1; 1]$} она принимает в $t = 1$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow f(t) \in [-4; 10] \Rightarrow \forall y \in [-4; 10] \exists t \in [-1; 1] : f(t) = y$$

\Rightarrow для каждого значения из $[-4; 10]$ \exists единственный $\cos x \Rightarrow$ ~~одно~~ $\exists \geq 1$ решение относительно x , т.к. $\cos x \in [-1; 1]$ и принимает все свои значения на данном промежутке $p = f(t) \in [-4; 10]$

при $p = -4$ $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

при $p = 10$ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
43 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (продолжение)

при $p \in (-4; 10)$ $\cos x \in (-1; 1)$ и $\cos x$ удовлетворяет уравнению $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$

$\cos x = a \in (-1; 1)$ и a удовлетворяет уравнению $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$
 $x = \pm \arccos(a) + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$

\uparrow $p \in (-4; 10)$
 a - корень, м.к
 $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$ - уравнение

при $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ решений нет, $\cos x$

м.к при данных p $\cos x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Ответы: $(p = -4, x = \pi + 2\pi n)$; $(p = 10, x = 2\pi k)$;

$(p \in (-4; 10); x = \pm \arccos(a) + 2\pi m)$, где a - корень уравнения $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$



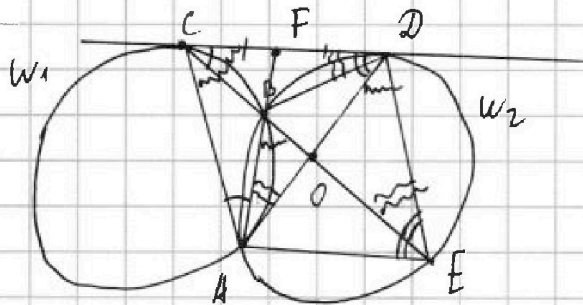
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$AD \perp CE = 0$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

Решим:

Пусть $AB \cap CD = F$. AB - радикальная ось W_1 и

W_2 , т.к. проходит через 2 точки пересечения окружностей. $F \in AB \Rightarrow F \in$ рад. оси W_1 и

$$W_2 \Rightarrow \text{pow}_F(W_1) = \text{pow}_F(W_2)$$

$$\Rightarrow CF^2 = FD^2 \Rightarrow CF = FD \quad (CF > 0, FD > 0)$$

$$\angle CAB = \angle DCB \quad (\text{углы к/у касательной к окруж. } W_1)$$

$$\angle CFA = \angle AFD \quad (\text{углы к/у касательной } CD \text{ и хорды } AD)$$

$$\angle ADE = \angle ABE \quad (\text{внешние}) \Rightarrow \angle ACE = 180^\circ - \angle CAB - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE - \angle CAB = \angle ADE - \angle CAB$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADE - 2\angle CAB + \angle CAB = \angle ADE$$

$$\Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle EDA \quad (\angle AED = \angle CFA, \angle DCA = \angle ADE)$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{ED} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{EA}, \quad \frac{CO}{\sin \angle CDA} = \frac{CD}{\sin \angle COD} \quad (\text{т.к. углы } \angle COD \text{ и } \angle CDA)$$

$$\frac{OE}{\sin \angle ODE} = \frac{DE}{\sin \angle ODE} = \frac{DE}{\sin \angle COD} \Rightarrow \frac{CO \cdot \sin \angle ODE}{OE \cdot \sin \angle CAD} = \frac{CD}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sin \angle ODE}{\sin \angle CAD}, \quad \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{AD}{\sin \angle AEA} = \frac{AD}{\sin \angle CDA}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DA} = \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle CDA} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
11 ИЗ 11

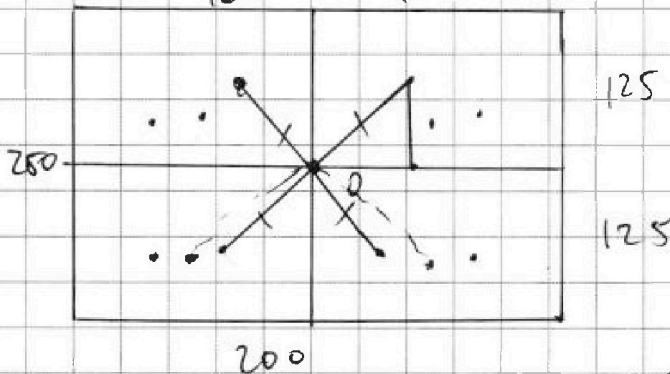
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим симметрии, когда выполняется симметрия относительно средней линии:

$$\frac{C_{25000}^4 + C_{25000}^4}{2} = C_{25000}^4 = \frac{25000!}{24996! \cdot 4!}$$

(т.к. 2 раза посчитали попарный симметрии)

2) Симметрия относительно центра (относительно диагоналей)



Пусть выбранная какая-то одна точка (вертикаль правая или левая), тогда рассмотрим сколько точек симметрии (или точек квадрата) её можно выбрать от центра: $r(0, A) = x^2 + y^2$

0 - центр и начало координат, A - точка.

Заметим, что каждая раскраска относительно средней линии подходит под раскраску относительно центра

=> Если подходит какое-то другое решение относительно центра, то она же подходит под раскраску



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N_6
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $(a, b, c) - ?$
 $a > b$
 $(a-b) \nmid 3$

$(a-c)(b-e) = p^2$, p -простое
 $a + b^2 = 560$

1) $(a-c) = 1 \rightarrow a = 1 + c$
 $(b-c) = p^2 \rightarrow b = c + p^2$
 $\Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 + b = 559 + p^2$
 $(b + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 559 + p^2$
 $(2b+1)^2 = 4p^2 + 2237$
 $a > b \Rightarrow c+1 > c+p^2$
 $\Rightarrow p^2 < 1$, но p -простое
 $p \geq 2$
 $\Rightarrow p^2 \geq 4$

2) $(a-c) = p$
 $(b-e) = p$
 $\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$, но $a > b$

3) $(a-c) = -p \Rightarrow a = b$, но $a > b$
 $(b-e) = -p$

4) $(a-c) = p^2 \Rightarrow c = a - p^2$
 $(b-e) = 1$

5) $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$
 $\Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases} \begin{cases} a > b \\ \Rightarrow -p^2 > -1 \\ \Rightarrow p^2 < 1 \\ \text{но } p \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \\ (a-b) \nmid 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

① $p^2 \nmid 3 \Rightarrow p = 3$ (p -простое)

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + b = 552 \\ b^2 + b - 552 = 0 \end{cases}$

$b(b+1) = 8 \cdot 3 \cdot 23 \quad D = 1 + 2758 = 2759$

$b = 23$ Если $b < 23 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{23} \Rightarrow \frac{8 \cdot 3 \cdot 23}{b} > 24$

$a = 31$ $\Rightarrow \boxed{b \geq 23} \mid N \Rightarrow \begin{cases} b+1 \geq 24 \\ b < 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+1 \geq 24 \\ b+1 < 24 \end{cases}$

\Rightarrow из данного случая выводит $\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \end{cases} \mid \begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$

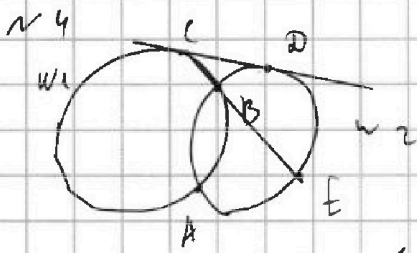


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{NO}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} = 2$$

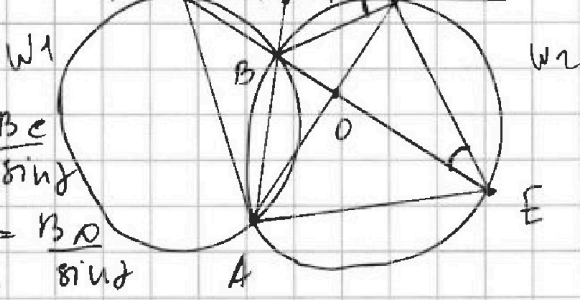
$$\frac{1}{R_0} = \cos\left(\frac{13}{3} - \frac{1}{R_0^2}\right)$$

$$\frac{2}{R_0} + \frac{CO - BO}{R_0^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{1}{R_0} + \frac{CO}{R_0^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{NF}{FC} \cdot \frac{CB}{BO} = \frac{AO}{AO} = 1$$



$$\frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{BE}{\sin \beta}$$

$$\frac{BF}{\sin \beta} = \frac{BO}{\sin \alpha}$$

$$BO = CO - BO$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{BO}$$

$$CB \cdot CE = CO^2$$

$$NB \cdot NA = \frac{CO^2}{4}$$

$$NB \cdot NA = \frac{CB \cdot CE}{4}$$

$$\frac{NA}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{AB + BN}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} \left(1 + \frac{BC}{2BO}\right) = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} + \frac{BC}{2BO^2} = \frac{BCO}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{BO} + \frac{BC}{BO^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{OD}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} \cdot \frac{NC}{CO} = 1$$

$$\frac{OD}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{ON} = \frac{AB}{BN} \cdot \frac{1}{2} = \frac{BO}{CB}$$

$$\frac{1}{NB} = \frac{2BO \cdot AB}{CB}$$

$$\frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{OE}{\sin \beta} = \frac{CB}{AB \cdot 2BO}$$

$$\frac{CO}{\sin \beta} = \frac{CO}{BO} = \frac{BO}{CB} \Rightarrow CO + OE = CO + \frac{10}{3} CO = \frac{13}{3} CO$$

$\triangle CDB \sim \triangle CED$

$CO^2 = CB \cdot CE$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим

$$4) \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

$$p^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Если $p \equiv 1 \pmod{3}$, то

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

\Rightarrow не подходит

Если $p \equiv 2 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ не имеет}$$

$$6) \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$a - b \not\equiv 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b \equiv 1 \pmod{3} \\ a - b \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 2 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Если $p \not\equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \\ p^2 \equiv 1 \end{cases}$$

\Rightarrow невозможно $p^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (p-простое)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = p^2 = 9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 + b = 561 - p^2 = 561 - 9 = 552$$

$$b(b+1) = 552 = 24 \cdot 23$$

Если $b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$

\Rightarrow

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23. \text{ Если } b < -24, b+1 < -23 \Rightarrow -42 \leq b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{Если } 0 < b < 23 \Rightarrow b+1 < 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) < 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b < 23$$

$$\text{Если } b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \leq 23$$

$$\Rightarrow b = 23 \quad (\text{Если } b > 0)$$

$$b(b+1) = 24 \cdot 23$$

$$\text{Если } \cancel{24} < b < 0 \Rightarrow -24 < b+1 < -1$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$(b \neq 0)$$

$$\Rightarrow b \leq -24$$

$$\text{Если } b < -24 \Rightarrow b+1 < -23$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \geq -24$$

$$\Rightarrow -24 \leq b \leq -24 \Rightarrow b = -24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 32 \\ b = -24 \\ a = -16 \\ c = -15 \end{cases}$$

\Rightarrow Всего 4 случая

$$(31; 23; 22); (-16; -24; -25)$$

$$(31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$

$$\text{Ответ: } (31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
9 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

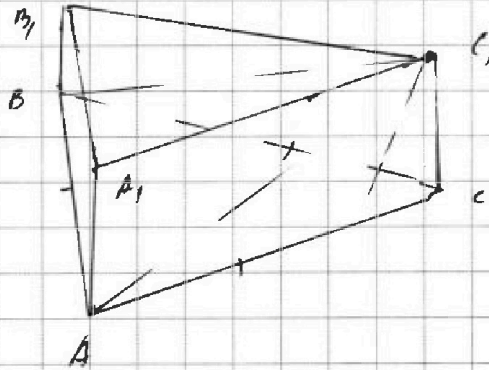
$$AB = BC = AC = 1$$

$$S_{\triangle A_1 C_1 C} = 4$$

$$S_{\triangle B B_1 A_1} = 4$$

$$S_{\triangle B_1 C_1 B_1} = 3$$

h-?





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+11 + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$x+y-x^2+z \geq 0$$

$$x^2 - 3$$

$$x+z \leq 4$$

N 3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

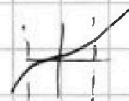
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = f(t) = p$$

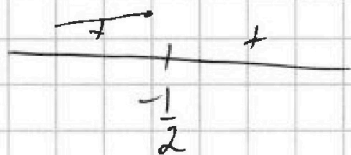
$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$t \in [-1, 1]$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$



$$f'(t) = 0 \quad x \neq 4 \quad f'(t) = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t+1)^2$$



$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$



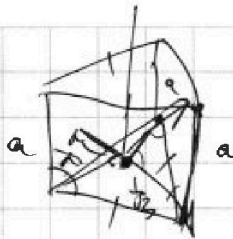
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7



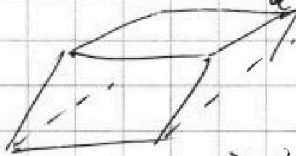
$$a \cdot \sin \alpha = 4$$

$$a \cdot \sin \beta = 4$$

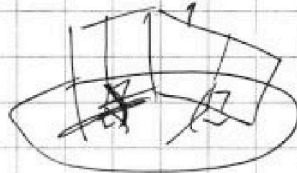
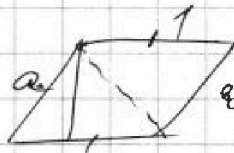
$$a \cdot \sin \gamma = 3$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta = \frac{4}{a}$$

$$\sin \gamma = \frac{3}{a}$$



$$\Rightarrow h_1, h_2 \approx \frac{4}{a}$$



$$ah_1 = 4$$

$$ah_2 = 4$$

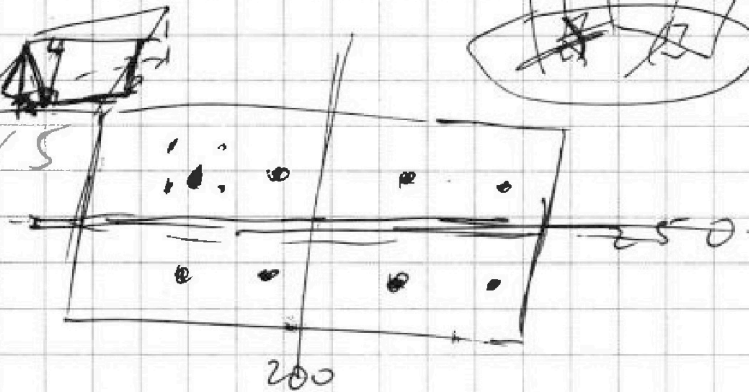
$$ah_3 = 3$$

N 2

$$\sqrt{x^2 + 3^2 + 5^2}$$

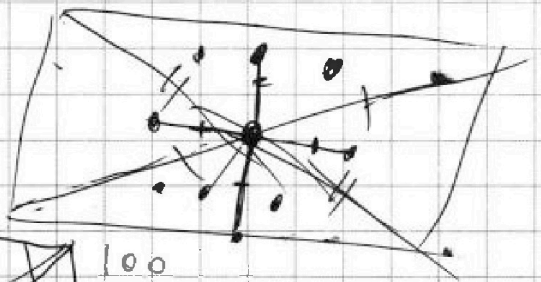
$$\sqrt{x^2 + 2^2 + 2^2}$$

N 5

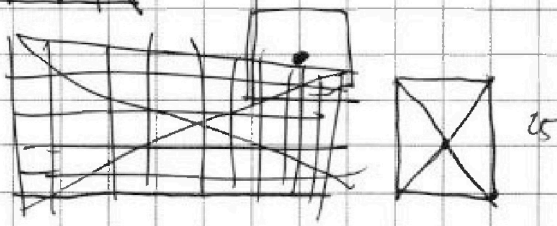
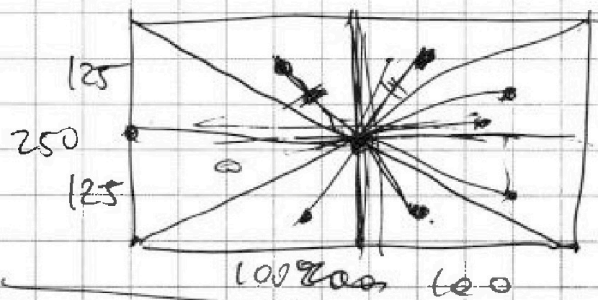
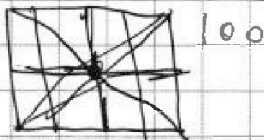


$$250 \cdot 100$$

$$C_4^{25000} + C_4^{25000}$$



$$2 \cdot C_4^{25000}$$



$$5000 \cdot 4$$

$$+ 49998 \cdot 4$$

$$+ 49996 \cdot 4$$

$$+ 49994 \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b q^{12} = 5-x \\ b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$\frac{1}{2} = -5 \Rightarrow b q^6 = \frac{5}{4}$
 $q^2 = 10 \Rightarrow q^6 = 1000$
 $q^8 = (x+1)$
 $13^2 = (20+3)^2 = 400 + 120 + 9 = 529$
 $529 - 240 = 289 = 17^2$

$$q^6 = \frac{5-x \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}} = (5-x)(x+1) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{13x-35}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{(x+1)^2}{(5-x)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{x+1}} = \frac{(x+1) \cdot \sqrt{13x-35}}{5-x \sqrt{x+1}}$$

a > b
a - b > 3

$$(x+1)^2 = \frac{(x+1)^8 \cdot (13x-35)}{(5-x)^3} \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{x+1}$$

$$\Rightarrow (5-x)^3 = (13x-35) \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{x+1}$$

1) a = e + 1
b = e + p
a - b = e - p
p^2 = b + b^2 - p^2 = 561
e - p = 24
e + p = 560
2e = 584
e = 292
p = 24

$$(5-x) \cdot q^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} \cdot q^6 = 5-x$$

$$q^8 = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1) \cdot (x+1)^3} = (x+1)^2$$

$$\begin{cases} a^4 = x+1 \\ a^4 = -x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \sqrt{x+1} & (1) \\ q^2 = \sqrt{-x-1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) b \cdot (\sqrt{x+1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$