



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5 - x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{array} \right.$$

Рассмотрим 2-е ур-е:  $\sqrt{169-z^2} \leq 13$ , так при всех  $z$ .

$$\sqrt{169-z^2} \leq 169 \Rightarrow z^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

Значит правая часть всегда меньше 13.  
Рассмотрим левую часть.

$$1) \ y < -1 \Rightarrow$$

$$-y-1-3y+36 = 37-4y > 41, \text{ не подходит, так как правая часть } < 13$$

$$2) \ y \in (-1; 12]$$

$$y+1-3y+36 = 37-2y \in (13; 39) - \text{прикидываем}$$

значит 13, при этом только при  $y=12$ .

$$3) \ y \in (12; +\infty)$$

$$4y-35 > 13, \text{ так как } 4 \cdot 12 - 35 > 13$$

Итак из этих 3 ур-ий мы получили, что левая часть всегда  $\geq 13$ , равна при  $y=12$ , а правая часть  $\leq 13$ . Решением будет только когда левая и правая часть равны 13.  $\Rightarrow$   
 $y=12, z=0$

$$y=12:$$

$$13+0 = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow z=0 \text{ подставим в верхнее.}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5 \quad (\text{после проверки сделаем так как } (-x)^2 = x^2)$$

$$x+3+4-x - 2\sqrt{12+x-x^2} = (2\sqrt{12+x-x^2} - 5)^2 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > -3 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$7 - 2\sqrt{12+x-x^2} = (2\sqrt{12+x-x^2} - 5)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{12+x-x^2} = t$$

$$7-2t = (2t-5)^2$$

~~$$4t^2 - 20t + 25 + 2t - 7 = 0$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$t_1 = 3$$~~

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$D_4 = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{9+3}{4} = 3$$

$$t_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$1) \sqrt{12+x-x^2} = 3$$

$$12+x-x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} > 3; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < -3$$

$$2) \sqrt{12+x-x^2} = \frac{3}{2}$$

$$12+x-x^2 = \frac{9}{4}$$

$$48+4x-4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$D = 4 + 156 = 160 = 4\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4\sqrt{10}}{4} > 3; \quad x_2 = \frac{2 - 4\sqrt{10}}{4} < -3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:

$$x = \frac{1+\sqrt{10}}{2} \quad \textcircled{V}$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2} + 3} - \sqrt{4 - \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)} = 2.3 - 5 = 1$$

$$\sqrt{\frac{7+\sqrt{10}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{10}}{2}} = 1 > 0$$

$$x = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{7-\sqrt{10}}{2}} - \sqrt{4 - \left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{10}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{7-\sqrt{10}}{2}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{10}}{2}} < 0 \text{ правая часть } > 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2} \text{ не подходит.}$$

$$x = \frac{2+4\sqrt{10}}{4}$$

$$\sqrt{\frac{2+4\sqrt{10}}{4} + 3} - \sqrt{4 - \left(\frac{2+4\sqrt{10}}{4}\right)} = 3 - 5 < 0$$

$$\sqrt{\frac{14+4\sqrt{10}}{4}} - \sqrt{\frac{14-4\sqrt{10}}{4}} > 0 \Rightarrow \frac{2+4\sqrt{10}}{4} \text{ не подходит.}$$

$$\sqrt{\frac{2-4\sqrt{10}}{4} + 3} - \sqrt{4 - \left(\frac{2-4\sqrt{10}}{4}\right)} < 0 - \text{подходит. } \frac{2-4\sqrt{10}}{4} \quad \textcircled{V}$$

Ответ:  $(x, y, z) = \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$   
 $\left(\frac{2-4\sqrt{10}}{4}; 12; 0\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

1)  $\cos x = t, t \in [-1; 1]$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{функция}$$

возрастает  $\Rightarrow$  минимум макс при  $t=1 \Rightarrow$   
мин при  $t=-1 \Rightarrow$

$$f(1) \geq f(t) \geq f(-1) \Rightarrow 10 \geq f(t) \geq -4 \Rightarrow$$

чтобы были решения,  $p$  должен принадлежать области опред. функции  $\Rightarrow p \in [-4; 10]$ ,

Ответ:  $p \in [-4; 10]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a \cdot b^2 = 560$$

$$p^2 - 1 = 3k + 1 \Rightarrow p^2 = 3k + 2$$

$$p^2 - 1 = 3k + 2 \Rightarrow p^2 = 3k + 5$$

$$p^2 = 3(k+1) + 2$$

$$1) p^2 - 1 = 3k + 1$$

$$(p^2 = 3k + 2)$$

$$\begin{array}{r} \times 561 \\ 4 \\ \hline 2244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 245 \\ 4 \\ \hline 1856 \\ - 2245 \\ \hline 1156 \\ 7049 \\ \hline \times 29 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$801 = 3 \cdot 267 = 3 \cdot 3 \cdot 89 = 9 \cdot 89 = \lambda$$

$$1089 = 9 \cdot 121 = 9 \cdot 11^2$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 86 \\ \hline 576 \end{array}$$

1) Пусть  $a - c = p \Rightarrow b - c = p$

$$(a-c) - (b-c) = p - p = 0$$

$$a - c = b - c \Rightarrow a = b$$

$$a = b \Rightarrow a - b = 0 \neq 3$$

2)  $a - c = p^2 \Rightarrow b - c = 1$

$$a - b = p^2 - 1 \Rightarrow a = b^2 + p^2 - 1$$

$$p^2 - 1 + b + b^2 = 560$$

$$p^2 + b^2 + b = 561$$

$$3k + 2 + b + b^2 = 561$$

$$3k + b + b^2 = 559$$

$$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 561 - 4p^2 \geq 0, \text{ целое}$$

$$2245 \geq 4p^2 \Rightarrow 2245 \geq p^2$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$2245 - 2116 = 129 \times 13$$

$$144 \quad p = 13$$

$$2245 - 4 \cdot 361 = 801 \times 361$$

$$2245 - 4 \cdot 249 = 1089 = (33)^2$$

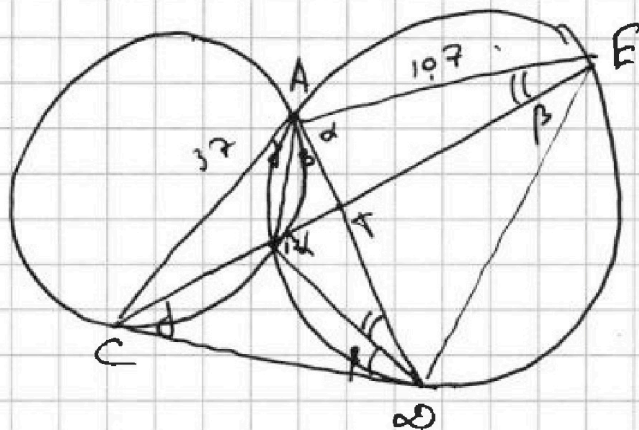


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано  
 $\frac{CE}{TE} = \frac{3}{10}$   
 $\frac{ED}{CE} = ?$

Пусть  $\angle TAE = \alpha \Rightarrow$   
 $\angle DBE = \alpha$  (на одну дугу)  $\Rightarrow$   
 $\angle CBD = 180 - \alpha$  (прям.)

Пусть  $\angle BCD = \gamma \Rightarrow$   
 $\angle CAB = \gamma$  (углы между касательной (CA) и хордой (CB))  
 $\angle CAB = \gamma$ .

Аналогично, пусть  $\angle BDC = \beta \Rightarrow$   
 $\angle BAD = \beta$ .

в  $\triangle CBD$  ( $\angle CBD = 180 - \alpha$ ,  
 $\angle BCD = \gamma$ ,  $\angle BDC = \beta$ )  $\Rightarrow$

$$180 = \gamma + \beta + 180 - \alpha \Rightarrow \alpha = \gamma + \beta.$$

Но  $\alpha + \beta = \angle CAD \Rightarrow$   
 $\angle CAD = \alpha$

AT - биссектриса

т.к.  $\angle CAD = \angle DAE = \alpha$   
 по свойству биссектр.  $\frac{CA}{AE} = \frac{CT}{TE} = \frac{3}{10}$

$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAD = \angle BED \text{ (опираются на } BD) \\ \angle ADB = \angle AEB \text{ (опираются на } AB) \end{array} \right.$  , равны  $\Rightarrow$

$\triangle ACD \sim \triangle AED$  по 2 углам ( $\angle CAD = \angle DAE$ ),

$\angle CDA = \angle AED$   
 $\frac{CD}{AE} = \frac{ED}{AD} = \frac{AE}{AC}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} = AD^2 = AE \cdot AC = 30 \cdot 7^2 \Rightarrow AD = 7\sqrt{30}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{10 \cdot 7}{30 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{10 \cdot \sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ответ:  $\frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{30}}{3}$





- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

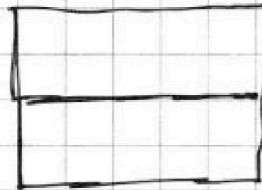
## Задача 5

1) относительно центра прямоугольника

2) относительно сред. линии 1)

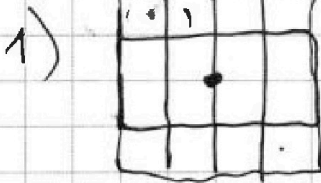
3) относительно сред. линии 2)

Наметим со 2 пункта.



2) В данном случае мы на одной половине точку отмечаем, а на другой тогда она выбирается автоматически  $\Rightarrow$  выбрать такое множество можно  $C_{15000}^4$ .

3) Аналогично со случаями 2,  $C_{15000}^4$ , причем множество из 2) и из 3) никогда не будут совпадать.



— мы выбираем абсолютно любую клетку и ставим симметричную ей  $\Rightarrow$  способов  $C_{25000}^4$ , — при этом среди этих способов обязательно будут 1) и 2)  $\Rightarrow$

е. всего  $C_{50000}^4 - C_{25000}^2 - C_{15000}^2$

Ответ  $C_{50000}^4 - 2C_{25000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6

$a > b$

1)  $a - b \not\equiv 3$

2)  $(a-c)(b-c) - \text{квадрат} = p^2$

3)  $a + b^2 = 560$

Или 2 получаем 2 вар:  
либо  $a-c=p$   
 $b-c=p$   $\Rightarrow a-b=0$   $\times$   
т.к.  $a > b$ .

2)  $a-c=p^2$   
 $b-c=p^2-1$   $\Rightarrow a-b=p^2-1$   
 $a = b + p^2 - 1$  (V)

$a-b = p^2 - 1$ , т.к.  
 $p^2 - 1 \not\equiv 3$

$p \neq 2$

$p \neq 5$

$p \neq 7$

$p \neq 11$

$p \neq 17$

$p \neq 19$

$p \neq 23$

Подставим в 3:  $p^2$

(\*)

$b^2 + b + p^2 - 1 = 560$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$\Delta = 1 + 561 \cdot 4 - 4p^2 \geq 0$ ,  $\Delta$  - целый.

$2245 - 4p^2 \geq 0 \Rightarrow p \leq 23$

1 шаг в (\*)

нам из всех простых чисел до 23 подходит только число 3, т.к.  $3^2 - 1 \not\equiv 3$ , но нужно проверить

его в (\*)

$2245 - 4 \cdot 9 = 2209 = 47^2$  (V)

$b_1 = \frac{-1 + 47}{2} = 23 \Rightarrow c = 22, a = 31$

$b_2 = \frac{-1 - 47}{2} = -24 \Rightarrow c = -25, a = -16$

Проверим  $a, b$  на все пункты:

$(31; 23; 22)$

$(-16; -24; -25)$

1)  $a > b$

2)  $31 - 23 \not\equiv 3$

3)  $(31 - 22)(23 - 22) = 9 = 3^2$

4)  $31 + 23^2 = 560$

1)  $-16 > -24$

2)  $-16 + 24 \not\equiv 3$

3)  $(-16 + 25)(-24 + 25) = 9 = 3^2$

4)  $-16 + 24^2 = 560$

Ответ:  $(31; 23; 22) \cup (-16; -24; -25)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} - 5$$

$$\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y-2} = \sqrt{68-2z}$$

$$z \in (-13; 13)$$

$$x \geq -3$$

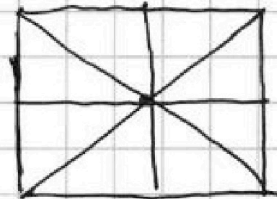
1)  $y = -1$

$$-y-1 + 3y+1 = \sqrt{68-z}$$

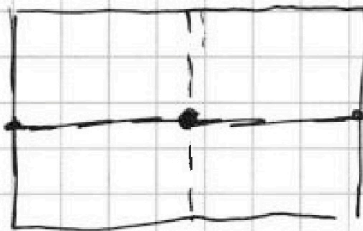
$$-4y+1 = \sqrt{68-z}$$

$$16y^2 - 44y + 12 = 68-z$$

$$16y^2 - 44y + z - 48 = 0$$



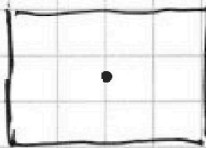
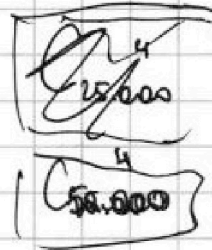
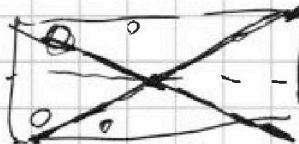
$$z \geq 4 \Rightarrow x$$



1)

$$\frac{200 \cdot 150}{2} = 100 \cdot 150 = 15000$$

$$2C_{15000}^4 + C$$



~~$$x+3 - 2\sqrt{x+3} \sqrt{4-x-z} + 4-x-z = 4y+4x-4x^2+4z - 20\sqrt{y+x-x^2+z} + 25$$

$$7-z + 2\sqrt{(x+3)(4-x-z)}$$~~

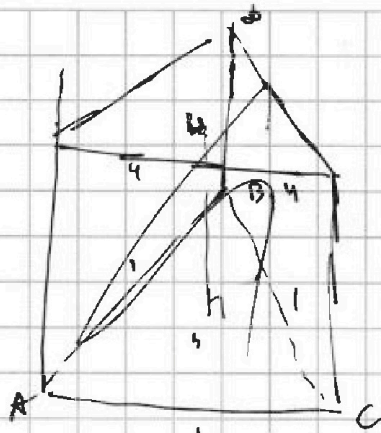


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4y - 11 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$16y^2 - 88y + 121 = 169 - z^2$$

$$16y^2 - 88y - 48 + z^2 = 0$$

$$D = 44^2 + 48 \cdot 16 - 16z^2 = 16(11^2 + 48 - z^2) = 16(169 - z^2)$$

$$y_1 = 44 + 4 \cdot \sqrt{169 - z^2}$$

$$1) z = 13 \Rightarrow z = -13 \Rightarrow$$

$$y = \frac{11}{4}$$

$$b = \sqrt{-t^2 + 7t + 7} = 2y$$

$$(x+3)(4-x-7) = 4x + 4x - x^2 + 7x + 12 - 8x - 37 = x^2 - 7x - 37 + 12$$

$$y + 11 = 36 - y \Rightarrow y = 35 =$$

$$x + y - x^2 + 7 \geq 0 \Rightarrow 4 + y - x^2 \geq 0$$

$$x \geq -3 \Rightarrow 4 + y \geq x^2$$

$$x + 7 \leq 4 \Rightarrow (4-x)(x+3) =$$

$$7 - 2t = (2t - 5)^2 \quad 4x + 12 - x^2 - 3x = -x^2 + x + 12$$

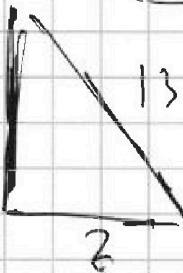
$$7 - 2t = (2t - 5)^2$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$D = 81 - 72$$

$$|y_1| + |y_2| = 21$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+2}$$

$$2) |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow z \in [-13; 13]$$

~~$$x+3 + 4-x-2 = 2\sqrt{4+x-x^2+2}$$~~

$$1) -1 \quad 12$$

~~$$-y-1-3y+36 = 169-z^2$$~~

$$-4y+35 = \sqrt{169-z^2}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x$$

3sin x

$$= \cos 3x + 3\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

=

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \text{ при } |p| > 10 \text{ решений нет.}$$

$$t^2 + 12t + 3 = 0$$

~~$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144-12}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{132}}{2}$$~~

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{132}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{33}}{2} = -6 \pm \sqrt{33}$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$p = -4 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$p = 10 \Rightarrow x = 2\pi n$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

тогда были решены

$$p \in [-4; 10]$$

$$4\cos^2 x + 6 \quad 4t^2 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$2245 - 36 = 2209$$

$$\frac{2-4\sqrt{10}}{4} > -3$$

$$2-4\sqrt{10} > -12$$

$$\frac{14}{4} > \frac{4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$$

$$\frac{2+4\sqrt{10}}{4} < 9$$

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 43 \\ + 129 \\ \hline 1729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 42 \\ + 329 \\ \hline 108 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$4\sqrt{10} < 14$$

$$2\sqrt{10} < 7$$

$$40 < 40$$

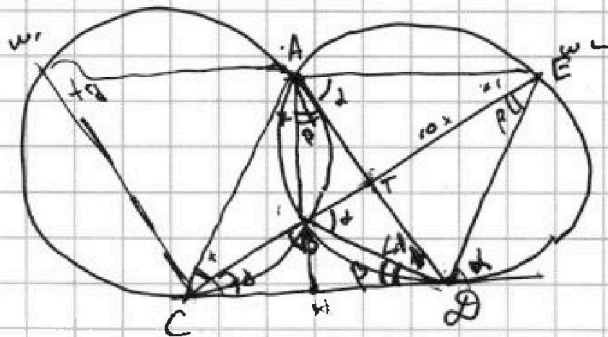
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



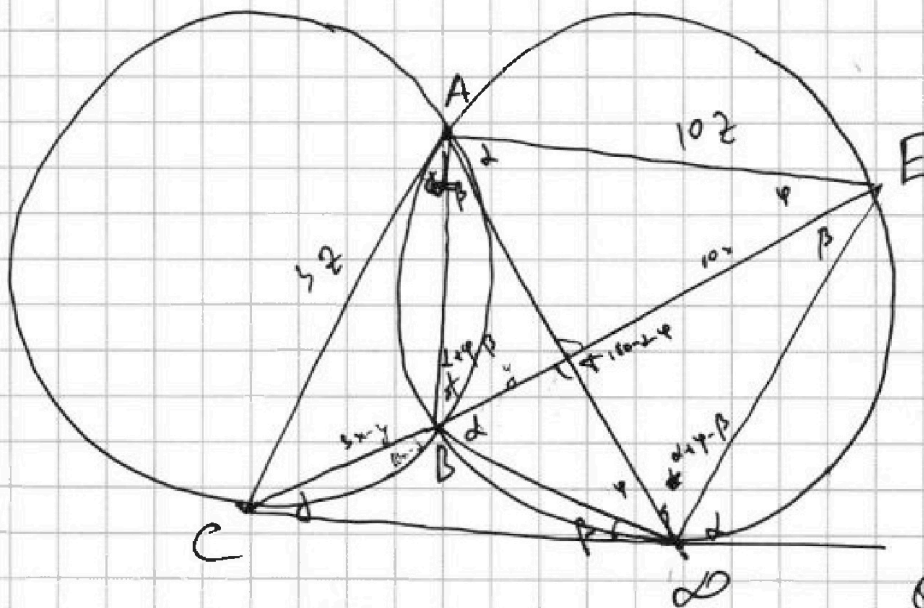
$$\frac{CT}{TE} = \frac{3}{10} \quad | \quad \frac{ED}{CD} = ?$$

$$\triangle COB \sim \triangle COE$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{CB}{CO} \Rightarrow \frac{BO}{EO}$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{CB}{CO} \Rightarrow \frac{BO}{EO} = \frac{CO}{CE} = \frac{3}{10}$$

$$AT \cdot TD = BT \cdot 10x$$



$$\frac{CT}{ET} = \frac{3x}{10x}$$

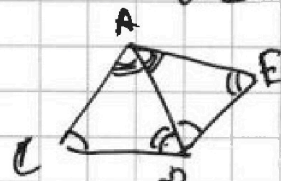
$$CD^2 = 13x \cdot (3x - y)$$

$$60 - (13x - y) - 13x = 2x - y - 13x = -11x - y$$

$$180 - 2y + 13x = 180 \Rightarrow 13x - 2y = 0$$

$$\frac{CT}{TE} =$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow$$



$$\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{ED} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$$

$$AD^2 = AE \cdot AC = 30 \cdot 2 = 60 \Rightarrow$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{10}{\sqrt{60}} = \frac{10}{2\sqrt{15}} = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{10 \cdot \sqrt{15}}{30} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{3}{2} \quad t_2$$

$$t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3 = +\frac{3}{4}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3 + p \Rightarrow$$

$$t_2 + t_3 + t_1 \left( -\frac{3}{2} - t_1 \right) = \frac{3}{4}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3 + p$$

$$\frac{3+p}{t_1} + t_1 \left( -\frac{3}{2} - t_1 \right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3+p}{t_1} - t_1 \left( \frac{3}{2} + t_1 \right) = \frac{3}{4}$$

$$3+p - t_1^2 \left( \frac{3}{2} + t_1 \right) = \frac{3}{4} t_1$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$$

~~$$-4t^3 - 6t^2 - 3t + 3 = 0$$~~

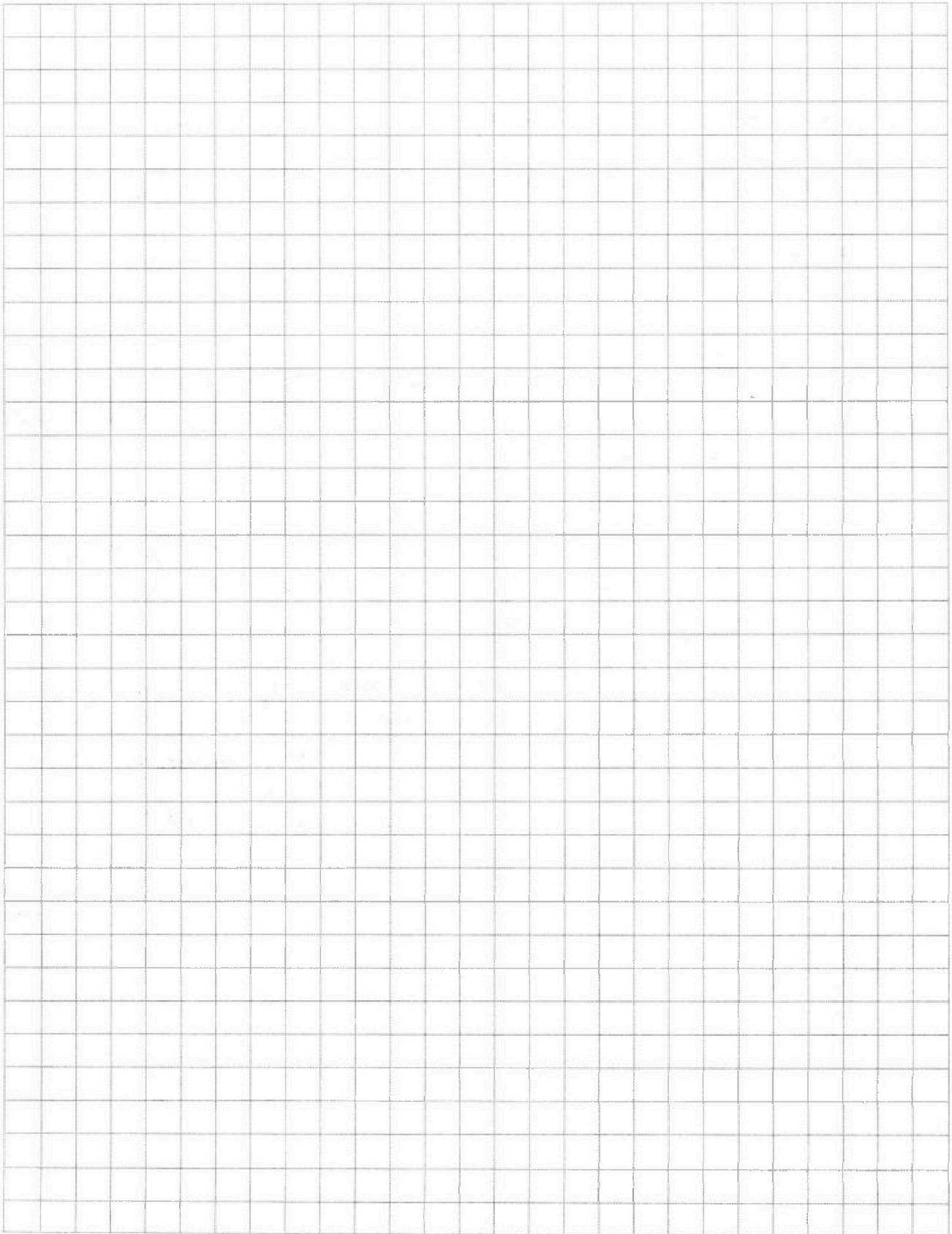


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y+1| + 3|y-12|$$

1)  $y < -1$

$$-y-1-3y+36 = 35-4y \rightarrow 39 \quad \times$$

2)  $y \in (-1; 12)$

$$\in (13; 35)$$

$$y+1-3y+36 = 37-2y$$

3)  $y > 12$ :  $y+1+3y-36 = 4y-35 \rightarrow 13$

$$\begin{aligned} (x+1)(4-x) &= \\ 4x-x^2+12-3x &= \\ \sqrt{1-x^2+x+12} &= f \end{aligned}$$

Решение -  $y=12$ .

$$13 = \sqrt{169-71} \quad \Delta$$

$$169 = 169 - 71 \rightarrow 7 = 10 \quad | \quad y=12$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$x+3+4-x - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{\dots} = 4$$

$\sqrt{x+3}$	$\sqrt{4-x}$
$x+3$	$4-x$
$2x$	$1$

$$\begin{aligned} &> 0 \text{ при } \left[ x > \frac{1}{2} \right] \\ \sqrt{12+x-x^2} &> \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$12+x-x^2 > \frac{25}{4}$$

$$48+4x-4x^2 > 25$$

$$4x^2-4x-23 > 0$$

$$\Delta = 4+92 = 96 = 16 \cdot 6 = 4\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{2+4\sqrt{6}}{4}$$

$$x_2 = \frac{2-4\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{2+2\sqrt{6}}{2} > \frac{1+\sqrt{10}}{2}$$

$$x > 2\sqrt{6} \rightarrow \sqrt{10}$$

$$\frac{2-4\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{2+4\sqrt{6}}{4}$$

$$x \in \left( \frac{2-4\sqrt{6}}{4}; \frac{1}{2} \right)$$

$$x = \left( \frac{2-4\sqrt{6}}{4}; \frac{1}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$QD3: a_7 > 0; a_{15} > 0$$

$$(x+1) \neq 0$$

Пусть  $d$  - знамен. прогрессии:

$$a_7 = a_1 \cdot d^6$$

$$a_{13} = a_1 \cdot d^{12}$$

$$a_{15} = a_1 \cdot d^{14}$$

$$\Rightarrow 1) \frac{a_{15}}{a_7} = d^8; \quad 2) \frac{a_{15}}{a_{13}} = d^2$$

$$1) d^8 = \sqrt{\frac{(13x-35)(x+1)}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} = \sqrt{(x+1)^4} \cdot (x+1)^2 \left( x \neq \frac{35}{13}; x \neq -1 \right)$$

Тогда  $a_7 = a_{15} = d$ , тогда  $a_7 = a_{15} = d$

$$d^8 = (x+1)^2 \Rightarrow d^4 = x+1$$

$$2) d^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} \Rightarrow d^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = x+1$$

Т.к.  $x+1 \neq 0$  можно сократить

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$25 - 10x + x^2 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x = 20 \quad ; \quad \text{При } x=20 \quad a_7 > 0; a_{15} > 0; a_{13} < 0$$

$$x = 3 \quad \text{При } x=3 \quad a_7 > 0; a_{15} > 0; a_{13} > 0$$

Ответ:  $x=20; x=3$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_1 = a_{15} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{a_7 \cdot d^7}{a_7} = d^7$$

$$d^7 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)} \cdot (x+1)^5}{(13x-35) \cdot (x+1)^3} = (x+1)^2$$

~~$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^7$$~~
~~$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^7$$~~
~~$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^7$$~~

$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^7 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} = (x+1)^2$$

~~$$\frac{(13x-35)(x+1)^6}{(5-x)^2} = (x+1)^4$$~~

~~$$(13x-35)^6 = (5-x)^7$$~~

$$a_7 = a_1 \cdot d^6$$

$$a_{13} = a_1 \cdot d^{12}$$

$$a_{15} = a_1 \cdot d^{14}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^8 = (x+1)^2 \Rightarrow d^4 = (x+1)$$

$$d^7 = \frac{a_{15}}{a_7} = d^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} =$$

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = (x+1)$$

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$13x-35 = 25-10x+x^2$$

$$0 = x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x=20; x=3$$

1)  $x = -1$  ✓

2)  $x \neq -1$ :

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = x+1$$

$$13x-35 = (25-10x+x^2)(x+1)$$

$$13x-35 = 25x+25-10x^2-10x+x^3+x^2 =$$

$$0 = x^3 - 9x^2 + 2x + 60 = 0$$