



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~нужно~~ пусть  $a_{10} \neq 0$ , тогда:

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$(q^2)^4 = q^8 = \frac{(2-x)^4}{((25x+34)(3x+2))^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$m.k. a_{10} \neq 0 \Rightarrow 3x+2 \neq 0 \Rightarrow \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} = 1$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$((2-x)^2 - 25x - 34)((2-x)^2 + 25x + 34) = 0$$

$$4 - 4x + x^2 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 30$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 25x + 34 = 0$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 38 = 441 - 152 = 289$$

$$x_{3,4} = \frac{-21 \pm 17}{2} = -2$$

проверка:

$$x = -1$$

$$a_{10} = \sqrt{9 \cdot (-1)} \quad \phi$$

$$x = 30$$

$$a_{10} = \sqrt{789 \cdot 92} \quad ; \quad a_{10} \cdot q^2 = a_{12} \quad \phi$$

$$a_{12} = -28$$

$$(>0) (>0) (<0)$$

$$a_{18} > 0$$

$$x = -2$$

$$a_{10} = \sqrt{-16 \cdot (-4)} = 8$$

$$x = -2; \text{удовлетворяет}; q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{12} = 4$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \frac{1}{2}$$

$$x = -19$$

$$a_{10} = \sqrt{(>0)(>0)} \quad a_{12} > 0 \Rightarrow x = -19; \text{удовлетворяет}$$

$$a_{18} > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$  (продолжение)

2) пусть  $\alpha_i = 0$ , тогда все  $\alpha_k; k \in \mathbb{N}$ ;  $\alpha_k = 0$ , т.к.  $\alpha_k = \frac{\alpha_i}{d^k}$

$\Rightarrow 2 - x = \alpha_{12} = 0 \Rightarrow x = 2$ ; подставляем в  $\alpha_{10} = \sqrt{84 \cdot 8} \neq 0$   
противоречие.

Ответ:  $x = -2$ ;  $x = -19$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$  (продолжение)

$$2) \begin{cases} a - b = 1 \\ 8 = 2ab \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b} \end{cases}$$

$$\frac{4}{b} - b = 1$$

$$-b^2 - b + 4 = 0$$

$$b^2 + b - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\sqrt{3-x} = b = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\Downarrow b = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \sqrt{6+x} = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$3-x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \quad 6+x = \frac{64}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$x = \frac{12 - 18 + 2\sqrt{17}}{4} = x = \frac{64 - 108 + 12\sqrt{17}}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$\frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{12\sqrt{17} - 44}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$36\sqrt{17} - 68 - 108 + 12\sqrt{17} = 48\sqrt{17} - 176$$

$\Rightarrow$  данные  $a$  и  $b$  удовлетворяют

$$x = \frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$

$$x = -\frac{3 + 2\sqrt{17}}{2}$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)

$$1) \begin{cases} a - b = -2 \\ -2 + 7 = 2ab \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \Rightarrow b \neq 0; a = \frac{5}{2b} \end{cases}$$

$$\frac{5}{2b} - b = -2$$

$$5 - 2b^2 + 4b = 0$$

$$2b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$D = 16 + 40 = 56$$

$$b = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

~~$$b = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{4} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$~~

$$a = \frac{5}{2 \pm \sqrt{14}}$$

~~$$b = \sqrt{3-x} > 0 \Rightarrow b = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$$~~

$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

~~$$a + b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} + \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$~~

$$\sqrt{x+6} = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

$$x+6 = \frac{25}{4+14+4\sqrt{14}}$$

$$3-x = \frac{4+14+4\sqrt{14}}{4}$$

$$x = \frac{25 - 108 - 24\sqrt{14}}{18 + 4\sqrt{14}} = x = \frac{12 - 18 - 4\sqrt{14}}{4} = \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{-83 - 24\sqrt{14}}{4\sqrt{3} + \sqrt{14}} = -6 - 4\sqrt{14}$$

$$-83 - 24\sqrt{14} = -27 - 18\sqrt{14} - 6\sqrt{14} - 4 \cdot 14 = -83 - 24\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{6 + 4\sqrt{14}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}: \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \\ \text{заметьте, что правая часть} \leq 20 \end{array} \right.$$

оценим левую часть:

$$|y+2| + 2|y-18| \quad \begin{array}{ccc} 1) & 2) & 3) \\ -2 & & 18 \end{array} \rightarrow y$$

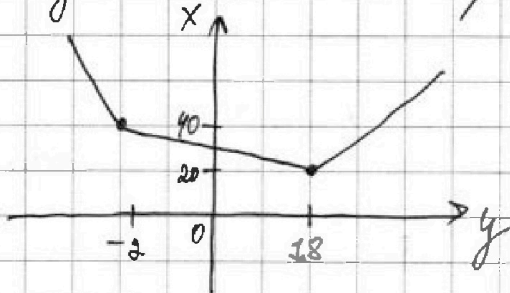
$$1) -y-2-2y+36 = 34-3y \geq 34-3(-2) = 40$$

$$2) y+2-2y+36 = 38-y \geq 20 = 38-18$$

$$3) y+2+2y-36 = 3y-34 \geq 54-34 = 20$$

$\Rightarrow$  левая часть  $\forall$  уравнения  $\geq 20 \Rightarrow$  равенство достигается,

когда левая = 20 = правая  $\Rightarrow z=0; y=18$



$$\text{I уравнение системы: } \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+6}}_a - \underbrace{\sqrt{3-x}}_b + 7 = 2\sqrt{\underbrace{18-3x-x^2}_{ab}}$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab & (1) \\ a^2+b^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$\text{вычтем из (2) - (1): } a^2 - 2ab + b^2 = 2 - (a-b)$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2; t_2 = 1.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3p(1 - \cos^2 x) \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

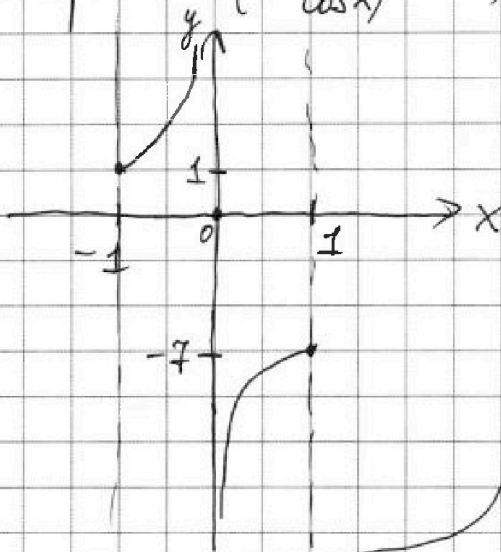
$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0.$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0 \quad ; \quad \cos x \neq 0, \text{ иначе } 4 = 0$$

$$(p-1) = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 \quad ; \quad f(x) = 1 - \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^3, \text{ где } x \in [-1; 1].$$



~~х=0~~ - асимптота

$$\Rightarrow p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty)$$

$$\left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 = 1 - p.$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$x = \pm \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty)$  ;  $x = \pm \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$





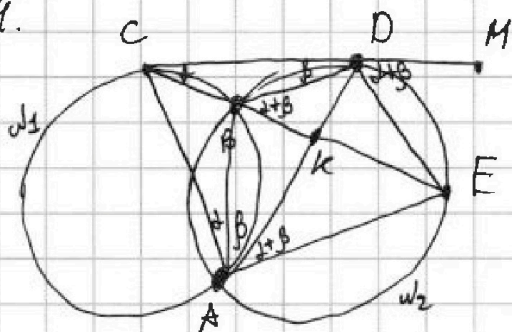
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№9.



Доказано:  $CD$  - кас.

$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

Найти:  $\frac{ED}{CD}$

Решение:

пусть  $\angle BAD = \beta$ ;  $\angle BAC = \alpha$ , тогда:  
 $\angle BDC = \angle BAD = \beta$ ;  $\angle DCB = \angle BAC = \alpha$  (углы между хордой и кас.)

$$\angle DBE = \angle BDC + \angle BCD = \alpha + \beta = \angle DAE \text{ (открывается на } DE) \Rightarrow$$

$\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AK$  - биссектриса в  $\triangle ACE$ .  $\Rightarrow$  по ЗСБ:

$$\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\angle DAE = \angle MDE \text{ (хорда, кас.)} = \angle CAD \Rightarrow \angle ADM - \angle CAD = \angle ADE =$$

$$= \angle ACD \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CA}{DA} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow DA^2 = CA \cdot AE =$$

$$= 7y \cdot 20y \Rightarrow DA = y\sqrt{140}; \quad AC = 7y; \quad AE = 20y$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{CA}{DA} \text{ (из этих же } \sim \Delta) \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{DA}{CA} = \frac{\sqrt{140}}{7} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

Ответ:  $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$



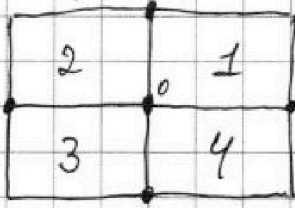
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.  
1) Сначала рассмотрим множества, для которых выполняется только одна из предточенных симметрий. Тогда разделим наш прямоугольник средними линиями на 4 равных прямоугольника.



Средние линии пройдут по границам клеток, так как стороны исходного прямоугольника - четные. Т.О. - центр. Тогда наше мн-во из 8 кв. разобьется на

2 по 4 клетки.

#клеток в маленьких прямоугольниках =  $\frac{500 \cdot 120}{4} = 15000$  клеток.

Заметим, что выбор 4 клеток в одном из маленьких  $\square$ ,

7 3 способа составить мн-во симметричное (выбор 4 кв. в  $\square$  №1; можно выбрать 4 клетки в  $\square$  №2, №3, №4 (или)).

#выбрать 4 клетки в мал.  $\square = C_{15000}^4$ ; так можно

выбрать в 4  $\square$  т.е. составить или 3 мн-ва и каждое из них мы посчитали 2 раза  $\Rightarrow$  таким образом  $\frac{4 \cdot C_{15000}^4 \cdot 3}{2} =$

$$= 6 C_{15000}^4$$

Теперь рассмотрим, когда может выполняться 2 симметрии одновременно.

пусть центральная + еще какая-то, но тогда (~~какая-то~~) ~~какая-то~~ также будет выполняться и 3-ий вид симметрии, т.к.  $8 \nmid 3$   $\Rightarrow$  если выполняется центральная + еще что-то, то выполняются все 3.

пусть выполняется 2 средние, но тогда выполняется и центральная симметрия, т.к. ~~какая-то~~ композиция 2 симметрий = симметрия ~~какая-то~~  $\Rightarrow$  если выполняется не одна симметрия, то выполняются все 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ в каждой из мелких  $\square$  размещаем по 2 клетки  $C_{15000}^2$ ; все остальное восстанавливается однозначно.

3) теперь, когда выполняются одиночные симметрии, но клетки смежные ~~в~~ в 4 мелких  $\square$  из 4 клеток

для каждого такого выбора  $\exists$  по 2 способа и каждый из них считаем 2 графа.

⇒  $\frac{2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^3 \cdot C_{15000}^1}{2}$

сложим все получившиеся суммы:

$$6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + (C_{15000}^2)^2$$

~~$$\frac{6 \cdot 15000!}{4! \cdot 14996!} + \frac{15000!}{2! \cdot 14998!} + \frac{2 \cdot 15000! \cdot 15000!}{1 \cdot 3! \cdot 14999! \cdot 14997!} + \frac{(15000!)^2}{2! \cdot 14998!}$$

$$\frac{6 \cdot 15000 \cdot 14997}{4} + \frac{15000 \cdot 14999}{2} + \frac{(15000)^2}{2} \cdot 15000 \cdot 15000$$~~

Ответ:  $6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 (1 + C_{15000}^2) + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

$$a < b$$

$$\begin{aligned} b-a &\not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) &= p^2 \\ a^2 + b &= 1000 \end{aligned}$$

т.к.  $(a-c)(b-c) = p^2$ , то  $\exists 6$  вариантов переставки делителей.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{matrix} -p & -p \\ p & p \end{matrix} \Rightarrow a-c = b-c \Rightarrow a=b \text{ (противоречие с условием)} \\ & \begin{matrix} 1 & p^2 \\ p^2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow a=c+1; b=c+p^2 \quad a < b \quad (\checkmark) \\ & \begin{matrix} p^2 & 1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a=c+p^2; b=c+1; p^2 > 1 \quad (\text{с условием}) \\ 2) \quad & \begin{matrix} -1 & -p^2 \\ -p^2 & -1 \end{matrix} \Rightarrow a=c-1; b=c-p^2, c-1 > c-p^2 \text{ (усл.) } \phi \\ & \begin{matrix} -p^2 & -1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a=c-p^2; b=c-1; \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & a=c+1; b=c+p^2 \\ & a^2 + b = 1000 \\ & a^2 + c + p^2 = 1000 \\ & a^2 + a - 1 = 1000 - p^2 \\ & \text{мин. } a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\text{левая часть} \geq -\frac{5}{4}$$

p	p <sup>2</sup>	p <sup>2</sup> -1	
2	4	3	X
3	9	8	✓
5	25	24	X
7	49	48	
11	121	120	
13	169	168	✗
17	289	288	
19	361	360	
23	529	528	
29	841	840	
31	961	960	

! следующий p<sup>2</sup> > 1000 + 5/4

из  $b-a \not\equiv 3 \Rightarrow c+p^2 - c - 1 \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 - 1 \not\equiv 3 \Rightarrow$  из таблицы  $p=3$

$$a^2 + a - 1 = 991$$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$(a-31)(a+32) = 0$$

$$a = 31$$

$$c = 30$$

$$b = 30 + 9 = 39$$

$$a = -32$$

$$c = -33$$

$$b = -33 + 9 = -24$$

$$2) \quad a-c = -p^2; \quad b-c = -1 \quad b-a = c-1 - c+p^2 \not\equiv 3$$

$$a = c-p^2; \quad b = c-1 \quad p^2 - 1 \not\equiv 3.$$

если  $p \not\equiv 0 \pmod 3$ , то  $(p-1)(p+1)$  может быть сравнимо с 3  
одно из них  $\equiv 3$ , т.к. остатков всего 3.  
 $\Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p=3.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение).

$$a = c - 9; \quad b = c - 1$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0.$$

$$D = 289 + 3680 = 3969 = 63^2$$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} = 40$$
$$= \frac{-46}{2} = -23$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$c = 40$$

$$c = -23$$

$a = 31$
$b = 39$
$c = 40$

$a = -32$
$b = -24$
$c = -23$

Ответ:

$a$	$b$	$c$
31	39	40
-32	-24	-23
31	39	30
-32	-24	-33



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2}$$
$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

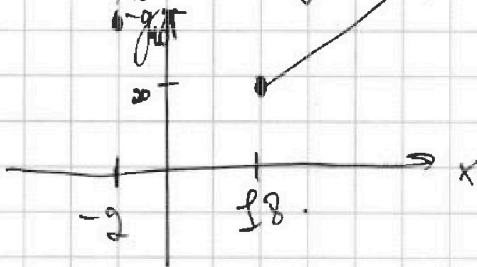
$$|a| + 2|b| = \sqrt{(a-b)-z^2}$$

$$|z| \leq 20$$

$$x > -6.$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$|x+2| + 2|x-18| = y.$$



$$-x-2-2x+36 = -3x+34 \geq 40.$$

$$x+2-2x+36 = 38-x \geq 20.$$

$$x+2+2x-36 = 3x-34 \geq 20.$$

$$z = 0. \quad y = 18$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

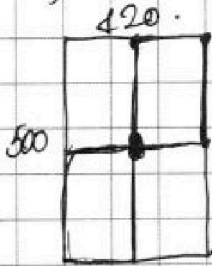
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b+7=2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

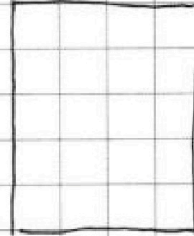
$$(a+b)^2=16+a-b$$



8 кл.

$$30 \cdot 500 = 15000$$

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4$$



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$a-b+7=2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

$$(a-b)^2=2-(a-b)$$

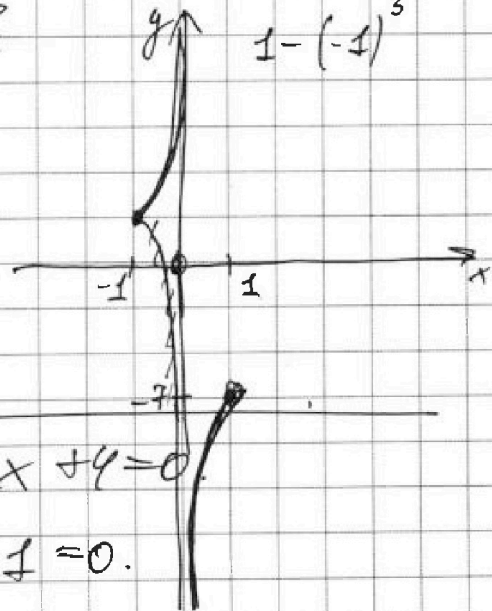
$$t^2+t-2=0$$

$$1+8=9$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$1 - (-1)^3$$



$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$p-1 = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3$$

$p \in$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x}$  (пер.)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x+6 + 3-x + \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = (\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x})^2$$

$$\cancel{a-b} + 16 = (a+b)^2$$

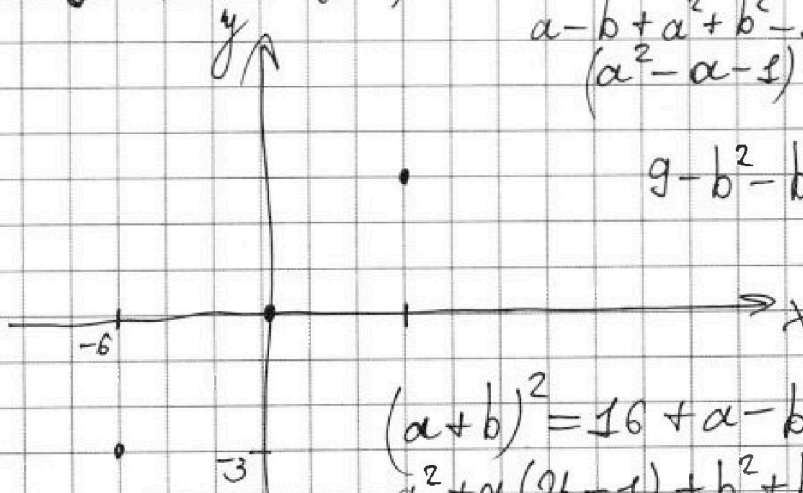
$$\cancel{a+b} (a+b)^2 - (a+b) - 16 + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab \\ a^2+b^2 = 9 \end{cases}$$

$$a-b = 2ab - 7 \leq 9 - 7 = 2$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}} \leq 2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+9} + 7 = 2\sqrt{a(9-a)}$$



$$a-b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$(a^2 - a - 1) + (b^2 - b - 1) = 2ab$$

$$9 - b^2 - b + 7 = 2ab$$

$$a = \frac{16 - b^2 - b}{2b}$$

$$a = \frac{8}{b} - b - \frac{1}{2}$$

$$(a+b)^2 = 16 + a - b$$

$$a^2 + a(2b-1) + b^2 + b - 16 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 - 4b + 64 = 64 - 8b$$

$$a = \frac{1 - 2b \pm \sqrt{8(8-b)}}{2}$$

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x+49} + 14\sqrt{x} - 14\sqrt{9-x} - 2\sqrt{a(9-a)} = 4(a(9-a))$$

$$42 + 13\sqrt{x} - 13\sqrt{9-x} =$$



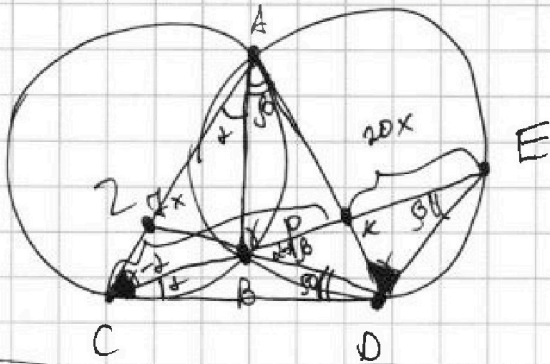
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin \angle ECD}{\sin \angle CED} = ? \quad \sqrt{a^2 - b^2} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$x(1 - 2\sqrt{b}) + 6\frac{1}{2} = 0$$

$$\triangle CDZ \sim \triangle DKE$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{ZD}{KE} = \frac{1 + 2\sqrt{a}}{1 - 2\sqrt{b}} = -13.$$

$$CB \cdot 27X = CD^2$$

$$CD = \frac{ZD \cdot DE}{KE}$$

$$CB \cdot 27X = \frac{(ZD \cdot DE)^2}{400X^2}$$

√f.

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{(25+34)/(3x+2)^3}$$

$$\frac{a_{12} \cdot a_{18}}{a_{10}} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{(2-x)^4}{(25x+34)(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(4-4x+x^2)^2 = 25x+34$$

$$x^4 + 16x^2 + 16 - 32x + 8x - 8x^3 - 25x - 34 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 57x - 18 = 0$$

$$(4-4x+x^2) = 25x+34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 30.$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$a_{10} = \sqrt{\frac{441 \cdot \sqrt{21}}{21}} = \frac{441}{\sqrt{21}}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$

$$\frac{441}{\sqrt{21}} = \frac{441 \sqrt{21}}{21} = 21 \sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√1.

{a<sub>n</sub>} - геом. пр.

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} - 32 \cdot 31$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{x+18}{3x+2}} = a_1 \cdot q^8$$

$$a_{10} \cdot q^8 = a_{18} \cdot (1+4 \cdot 9 \cdot 92)$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_{18} = a_1 \cdot q^{17}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

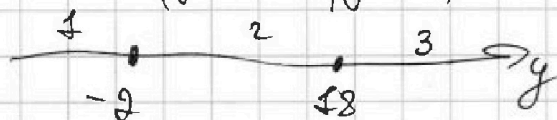
$$\begin{array}{r} 39699 \\ \times 36 \\ \hline 238194 \\ \times 36 \\ \hline 1411044 \\ \hline 14217438 \end{array}$$

√2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

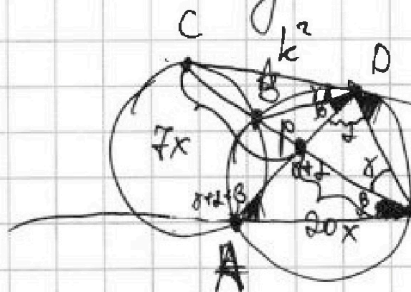
$$2\sqrt{y-3x-x^2+2} + \sqrt{3-x-2z} \geq 7$$

$$(y+2) + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



$$-y-2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$34-3y = \sqrt{400-z^2}$$



$$p^2 - 1 \neq 3$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{p^2 - 1}{3}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=-1 \\ a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$k^2 = (7x-p)(27x)$$

$$k^2 = 189x^2 - 27px$$

Δ DME ~ Δ AMD

$$\frac{DM}{AM} \cdot \frac{AM}{DM} = \frac{AD^2 + a^2 - (1001-p^2)}{0}$$

$$1 + 4004 - 4p^2 = k^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

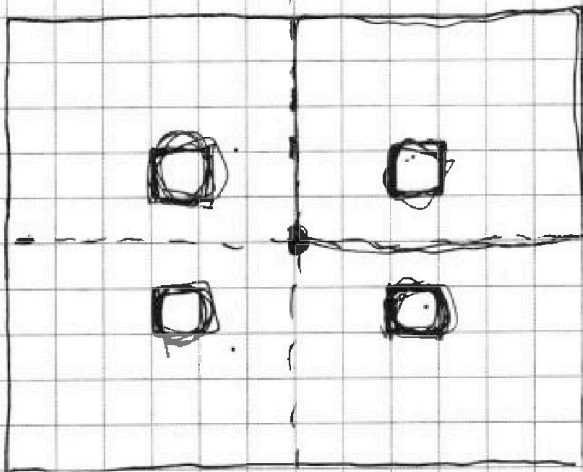


1  2  3  4  5  6  7

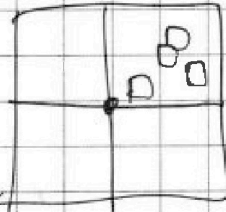
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√5.



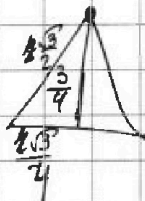
$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 81 \\ \hline \uparrow 31 \\ 93 \\ \hline 961 + 89 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline + 64 \\ \hline 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

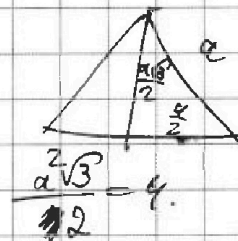
$$\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 = 6(15000)!$$

√7.



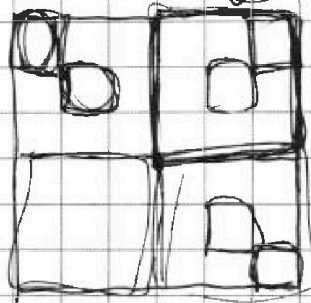
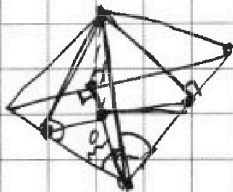
S=4.  
 $a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$



~~3/9 - 3/16 = 9/16~~

~~3/9 - 3/16 = 9/16~~  
 $\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4$



$C_{15000}^2$





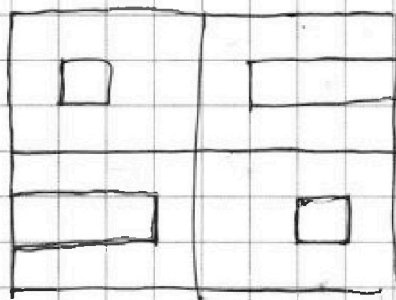
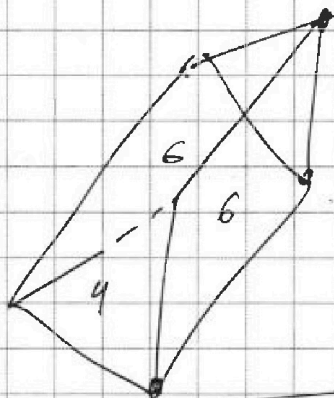
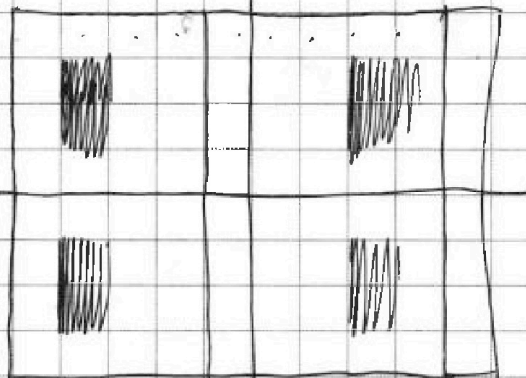
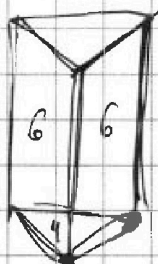
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

~~$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$~~

$$p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0. \quad \frac{h}{b} - \frac{b}{h} + 8f$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0. \quad \frac{b}{x} - \frac{b}{x} = 0$$

$$p-1 = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 \quad [x: 9] \exists x \quad \Delta = 1 + 4004p^2$$

$$\cos x \in [-1; 1].$$

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$1000 - a^2 - a + 1 = p^2$$

$$1001 - a^2 - a = p^2$$

$$\frac{1}{2} \quad 1000 \geq p^2$$

√2.

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$-2-y-2y+36 \leq 20$$

$$34-3y \leq 20$$

$$3y \geq 14$$

$$b-c > a-c$$

$$b > a$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a < b$$

$$b-a \times 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$\sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) + \frac{1}{2}(1-2\sqrt{b})$$

$$2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + 1 - \sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) - (1-2\sqrt{b})$$

$$a-c = b-c$$

$$a=b$$

~~$$1) a-b = p^2$$~~

$$2) b-c = p^2, a-c = 1.$$

$$C = b-1$$

$$1000 - a^2 > a$$

$$a(a+1) < 1000$$

$$b = 1000 - a^2$$

$$a^2 + a - 999 - p^2 = 0$$

$$1 + 4(999 + p^2)$$

$$(2\sqrt{a}+1)(1-2\sqrt{b}) = -13$$

$$(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{b}-1) = 13$$

$$b-a+1 = p^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -6$$

$$3 - x - 22 \geq 0$$

$$0 > (3-x)/(9+x)$$

$$0 > 8x - x^2 + 2x$$

$$0 < x - x^2 - 8x$$

$$(9x^2 - 8x)$$

$$9x^2 - 8x = 0$$

$$22 \leq 3 - x$$

$$2 \leq \frac{3-x}{2}$$

$$y + 2 \geq 3x + x^2$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$-\frac{3}{2} = -1.5$$

$$49 \ 25 \ 9 \ 1 \ 169 \ 289$$

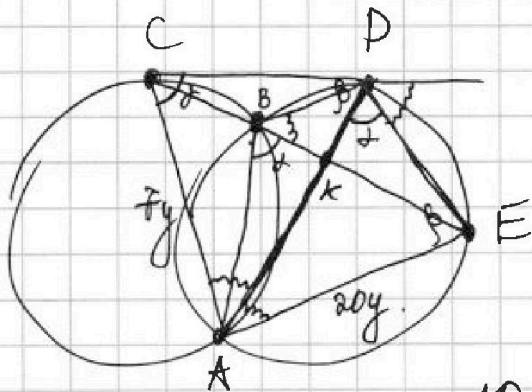
$$2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 29 \ 31$$

$$b + 1 - a = p^2$$

$$b - a + 1 = p^2$$

$$a^2 + b = 4000$$

$$b - a \leq 3$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$a^2 + a - 1 + p^2 = 4000$$

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{20y}{\sin \alpha}$$

$$\frac{20y \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{7y \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{20}{7} \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha$$

$$a^2 + a - 1 = 4000 - p^2$$

$$\begin{aligned} b - c &= p^2 & 4 \\ a - c &= 1 & 9 \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + AD + 40 = 0 \cdot \sin \beta = \frac{20y}{\sin \alpha} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$$

$$\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\begin{aligned} a^2 + a - 1 &\leq 1000 \\ a^2 + a - 1001 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3(p+4) \cos x + 40 = 0$$