



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~нужно~~ пусть $a_{10} \neq 0$, тогда:

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$(q^2)^4 = q^8 = \frac{(2-x)^4}{((25x+34)(3x+2))^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$m.k. a_{10} \neq 0 \Rightarrow 3x+2 \neq 0 \Rightarrow \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} = 1$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$((2-x)^2 - 25x - 34)((2-x)^2 + 25x + 34) = 0$$

$$4 - 4x + x^2 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 30$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 25x + 34 = 0$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 38 = 441 - 152 = 289$$

$$x_{3,4} = \frac{-21 \pm 17}{2} = -2$$

проверка:

$$x = -1$$

$$a_{10} = \sqrt{9 \cdot (-1)} \quad \phi$$

$$x = 30$$

$$a_{10} = \sqrt{789 \cdot 92} \quad ; \quad a_{10} \cdot q^2 = a_{12} \quad \phi$$

$$a_{12} = -28$$

$$(>0) (>0) (<0)$$

$$a_{18} > 0$$

$$x = -2$$

$$a_{10} = \sqrt{-16 \cdot (-4)} = 8$$

$$a_{12} = 4$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \frac{1}{2}$$

$$x = -2; \text{удовлетворяет}; q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = -19$$

$$a_{10} = \sqrt{(70)(70)} \quad a_{12} > 0 \Rightarrow x = -19; \text{удовлетворяет}$$

$$a_{18} > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$ (продолжение)

2) пусть $\alpha_i = 0$, тогда все $\alpha_k; k \in \mathbb{N}$; $\alpha_k = 0$, т.к. $\alpha_k = \frac{\alpha_i}{d^k}$

$\Rightarrow 2 - x = \alpha_{12} = 0 \Rightarrow x = 2$; подставляем в $\alpha_{10} = \sqrt{84 \cdot 8} \neq 0$
противоречие.

Ответ: $x = -2$; $x = -19$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$ (продолжение)

$$2) \begin{cases} a - b = 1 \\ 8 = 2ab \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b} \end{cases}$$

$$\frac{4}{b} - b = 1$$

$$-b^2 - b + 4 = 0$$

$$b^2 + b - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\sqrt{3-x} = b = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\Downarrow b = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \sqrt{6+x} = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$3-x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \quad 6+x = \frac{64}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$x = \frac{12 - 18 + 2\sqrt{17}}{4} = x = \frac{64 - 108 + 12\sqrt{17}}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$\frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{12\sqrt{17} - 44}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$36\sqrt{17} - 68 - 108 + 12\sqrt{17} = 48\sqrt{17} - 176$$

\Rightarrow данные a и b удовлетворяют

$$x = \frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$

$$x = -\frac{3 + 2\sqrt{17}}{2}$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)

$$1) \begin{cases} a - b = -2 \\ -2 + 7 = 2ab \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \Rightarrow b \neq 0; a = \frac{5}{2b} \end{cases}$$

$$\frac{5}{2b} - b = -2$$

$$5 - 2b^2 + 4b = 0$$

$$2b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$D = 16 + 40 = 56$$

$$b = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

~~$$b = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{4} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$~~

~~$$b = \frac{4 - \sqrt{56}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{14}}{4} = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$$~~

$$a = \frac{5}{2 \pm \sqrt{14}}$$

~~$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$~~

~~$$b = \sqrt{3-x} > 0 \Rightarrow b \neq \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$$~~

$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

~~$$b = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 - \sqrt{14}}$$~~

$$\sqrt{x+6} = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

$$x+6 = \frac{25}{4+14+4\sqrt{14}}$$

$$3-x = \frac{4+14+4\sqrt{14}}{4}$$

$$x = \frac{25 - 108 - 24\sqrt{14}}{18 + 4\sqrt{14}} = x = \frac{12 - 18 - 4\sqrt{14}}{4} = \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{-83 - 24\sqrt{14}}{4\sqrt{3+\sqrt{14}}} = \frac{-6 - 4\sqrt{14}}{\sqrt{3+\sqrt{14}}}$$

$$-83 - 24\sqrt{14} \neq -27 - 18\sqrt{14} - 6\sqrt{14} - 4 \cdot 14 = -83 - 24\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{6 + 4\sqrt{14}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}: \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \\ \text{заметьте, что правая часть} \leq 20 \end{array} \right.$$

оценим левую часть:

$$|y+2| + 2|y-18| \quad \begin{array}{ccc} 1) & 2) & 3) \\ -2 & & 18 \end{array} \rightarrow y$$

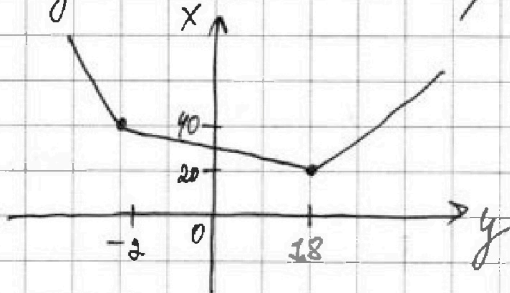
$$1) -y-2-2y+36 = 34-3y \geq 34-3(-2) = 40$$

$$2) y+2-2y+36 = 38-y \geq 20 = 38-18$$

$$3) y+2+2y-36 = 3y-34 \geq 54-34 = 20$$

\Rightarrow левая часть \forall уравнения $\geq 20 \Rightarrow$ равенство достигается,

когда левая = 20 = правая $\Rightarrow z=0; y=18$



$$\text{I уравнение системы: } \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+6}}_a - \underbrace{\sqrt{3-x}}_b + 7 = 2\sqrt{\underbrace{18-3x-x^2}_{ab}}$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab & (1) \\ a^2+b^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

вычтем из (2) - (1): $a^2 - 2ab + b^2 = 2 - (a-b)$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2; t_2 = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3p(1 - \cos^2 x) \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

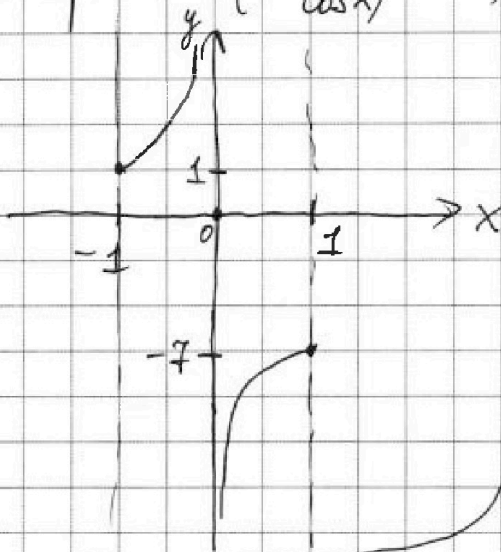
$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0.$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0; \cos x \neq 0, \text{ иначе } 4 = 0$$

$$(p-1) = - \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3; f(x) = 1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3, \text{ где } x \in [-1; 1].$$



~~✖~~ $x=0$ - асимптота

$$\Rightarrow p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 = 1 - p.$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$x = \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty)$; $x = \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



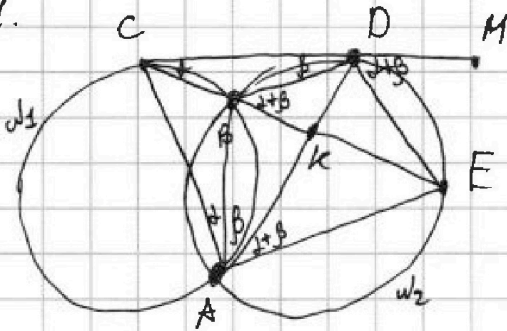
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№9.



Доказано: CD - кас.

$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

Найти: $\frac{ED}{CD}$

Решение:

пусть $\angle BAD = \beta$; $\angle BAC = \alpha$, тогда:
 $\angle BDC = \angle BAD = \beta$; $\angle DCB = \angle BAC = \alpha$ (углы между хордой и кас.)

$$\angle DBE = \angle BDC + \angle BCD = \alpha + \beta = \angle DAE \text{ (открывается на } DE) \Rightarrow$$

$\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AK$ - биссектриса в $\triangle ACE$. \Rightarrow по ЗСБ:

$$\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\angle DAE = \angle MDE \text{ (хорда, кас.)} = \angle CAD \Rightarrow \angle ADM - \angle CAD = \angle ADE =$$

$$= \angle ACD \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CA}{DA} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow DA^2 = CA \cdot AE =$$

$$= 7y \cdot 20y \Rightarrow DA = y\sqrt{140}; AC = 7y; AE = 20y$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{CA}{DA} \text{ (из этих же } \sim \Delta) \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{DA}{CA} = \frac{\sqrt{140}}{7} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$



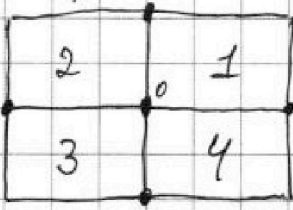
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.
1) Сначала рассмотрим множества, для которых выполняется только одна из предточенных симметрий. Тогда разделим наш прямоугольник средними линиями на 4 равных прямоугольника.



Средние линии пройдут по границам клеток, так как стороны исходного прямоугольника - четные. Т.О. - центр. Тогда наше мн-во из 8 кв. разобьется на 2 по 4 клетки.

#клеток в маленьких прямоугольничках = $\frac{500 \cdot 120}{4} = 15000$ клеток.

Заметим, что выбор 4 клеток в одном из маленьких \square ,

7 3 способа составить мн-во симметричное (выбор 4 кв. в \square №1; можно выбрать 4 клетки в \square №2, №3, №4 (или)).

#выбрать 4 клетки в мал. $\square = C_{15000}^4$; так можно

выбрать в 4 \square т.е. составить мн 3 мн-ва и каждое из них мы посчитали 2 раза \Rightarrow таким способом $\frac{4 \cdot C_{15000}^4 \cdot 3}{2} =$

$= 6 C_{15000}^4$

Теперь рассмотрим, когда может выполняться 2 симметрии одновременно.

пусть центральная + еще какая-то, но тогда (~~какая-то~~) ~~какая-то~~ также будет выполняться и 3-ий вид симметрии, т.к. $8 \nmid 3 \Rightarrow$ если выполняется центральная + еще что-то, то выполняются все 3.

пусть выполняется 2 средние, но тогда выполняется и центральная симметрия, т.к. ~~какая-то~~ композиция 2 симметрий = симметрия ~~какая-то~~ \Rightarrow если выполняется не одна симметрия, то выполняются все 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ в каждой из мелких \square размещаем по 2 клетки C_{15000}^2 ; все остальное восстанавливается однозначно.

3) теперь, когда выполняются одиночные симметрии, но клетки смежные ~~в~~ в 4 мелких \square из 4 клеток

для каждого такого выбора \exists по 2 способа и каждый из них считаем 2 графа.

⇒ $\frac{2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^3 \cdot C_{15000}^1}{2}$

сложим все получившиеся суммы:

$$6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + (C_{15000}^2)^2$$

~~$$\frac{6 \cdot 15000!}{4! \cdot 14996!} + \frac{15000!}{2! \cdot 14998!} + \frac{2 \cdot 15000! \cdot 15000!}{1 \cdot 3! \cdot 14999! \cdot 14997!} + \frac{(15000!)^2}{2! \cdot 14998!}$$

$$\frac{15000 \cdot 14997}{4} + \frac{15000 \cdot 14999}{2} + \frac{15000^2}{2} \cdot 15000 \cdot 15000$$~~

Ответ: $6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 (1 + C_{15000}^2) + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a < b$$

$$b - a \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a^2 + b = 1000$$

т.к. $(a - c)(b - c) = p^2$, то $\exists 6$ вариантов переставки делителей.

$$1) \begin{matrix} -p & -p \\ p & p \end{matrix} \Rightarrow a - c = b - c \Rightarrow a = b \text{ (противоречие с условием)}$$

$$1) \begin{matrix} 1 & p^2 \\ p^2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow a = c + 1; b = c + p^2 \quad a < b \quad (\checkmark)$$

$$2) \begin{matrix} p^2 & 1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a = c + p^2; b = c + 1; p^2 > 1 \quad (\text{условие } \phi)$$

$$2) \begin{matrix} -1 & -p^2 \\ -p^2 & -1 \end{matrix} \Rightarrow a = c - 1; b = c - p^2; c - 1 > c - p^2 \text{ (усл.) } \phi$$

$$2) \begin{matrix} -p^2 & -1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a = c - p^2; b = c - 1; \quad (\checkmark)$$

$$1) a = c + 1; b = c + p^2$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + c + p^2 = 1000$$

$$a^2 + a - 1 = 1000 - p^2$$

$$\text{мин. } a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\text{левая часть } \geq -\frac{5}{4}$$

p	p ²	p ² -1	
2	4	3	X
3	9	8	✓
5	25	24	X
7	49	48	
11	121	120	
13	169	168	✗
17	289	288	
19	361	360	
23	529	528	
29	841	840	
31	961	960	

! следующий p² > 1000 + 5/4

из $b - a \div 3 \Rightarrow c + p^2 - c - 1 \div 3 \Rightarrow p^2 - 1 \div 3 \Rightarrow$ из таблицы $p = 3$

$$a^2 + a - 1 = 991$$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$(a - 31)(a + 32) = 0$$

$a = 31$	$a = -32$
$c = 30$	$c = -33$
$b = 30 + 9 = 39$	$b = -33 + 9 = -24$

$$2) a - c = -p^2; b - c = -1 \quad b - a = c - 1 - c + p^2 \div 3$$

$$a = c - p^2; b = c - 1 \quad p^2 - 1 \div 3$$

если $p \neq 0$, то $(p-1)(p+1)$ может быть сравнимо с 3
одно из них $\div 3$, т.к. остатков всего 3.
 $\Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение).

$$a = c - 9; \quad b = c - 1$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0.$$

$$D = 289 + 3680 = 3969 = 63^2$$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} = 40$$
$$= \frac{-46}{2} = -23$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$c = 40$$

$$c = -23$$

$a = 31$
$b = 39$
$c = 40$

$a = -32$
$b = -24$
$c = -23$

Ответ:

a	b	c
31	39	40
-32	-24	-23
31	39	30
-32	-24	-33



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2}$$
$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

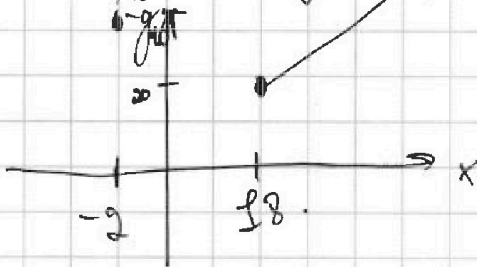
$$|a| + 2|b| = \sqrt{(a-b)-z^2}$$

$$|z| \leq 20$$

$$x > -6.$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$|x+2| + 2|x-18| = y.$$



$$-x-2-2x+36 = -3x+34 \geq 40.$$

$$x+2-2x+36 = 38-x \geq 20.$$

$$x+2+2x-36 = 3x-34 \geq 20.$$

$$z = 0. \quad y = 18$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

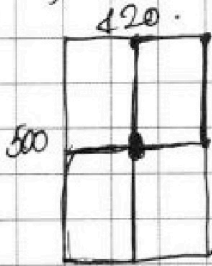
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b+7=2 \sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

$$(a+b)^2 = 16 + a-b$$



120. 8 кл.

$$30 \cdot 500 = 15000$$

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4$$



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$a-b+7=2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

$$(a-b)^2 = 2 - (a-b)$$

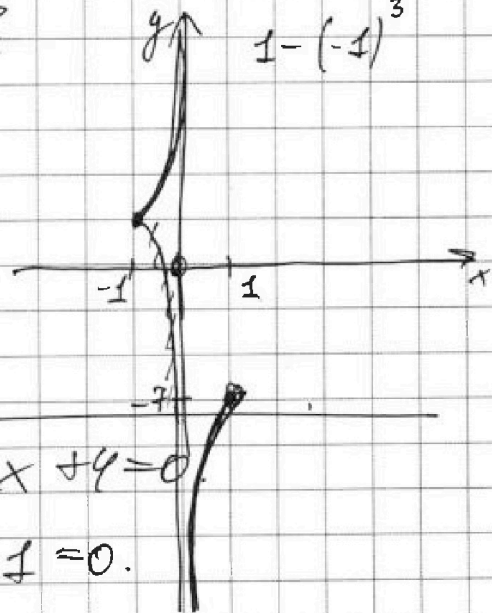
$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$1+8=9$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$1 - (-1)^3$$



$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$p-1 = - \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3$$

$p \in$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\sqrt{x} (пер.)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x+6 + 3-x + \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = (\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x})^2$$

$$\cancel{a-b} + 16 = (a+b)^2$$

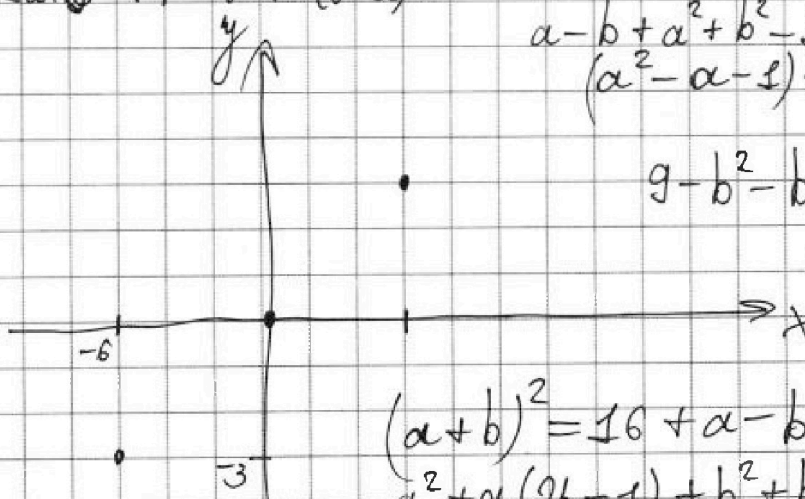
$$\cancel{a+b} (a+b)^2 - (a+b) - 16 + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab \\ a^2+b^2 = 9 \end{cases}$$

$$a-b = 2ab - 7 \leq 9 - 7 = 2$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}} \leq 2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+9} + 7 = 2\sqrt{a(9-a)}$$



$$a-b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$(a^2 - a - 1) + (b^2 - b - 1) = 2ab$$

$$9 - b^2 - b + 7 = 2ab$$

$$a = \frac{16 - b^2 - b}{2b}$$

$$a = \frac{8}{b} - b - \frac{1}{2}$$

$$(a+b)^2 = 16 + a - b$$

$$a^2 + a(2b-1) + b^2 + b - 16 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 - 4b + 64 = 64 - 8b$$

$$a = \frac{1 - 2b \pm \sqrt{8(8-b)}}{2}$$

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x+49} + 14\sqrt{x} - 14\sqrt{9-x} - 2\sqrt{a(9-a)} = 4(a(9-a))$$

$$42 + 13\sqrt{x} - 13\sqrt{9-x} =$$

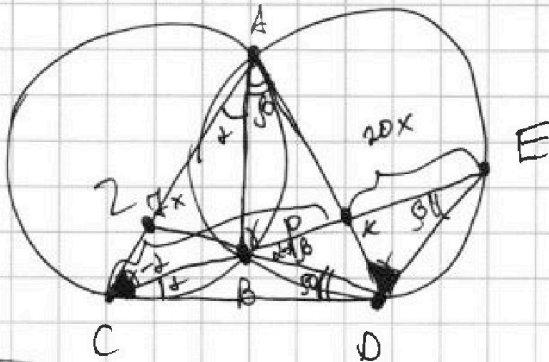
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin \angle ECD}{\sin \angle CED} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + 7} = 2\sqrt{b}}{\sqrt{a^2 - (1 - 2\sqrt{b}) + \frac{1}{2}}}$$

$$x(1 - 2\sqrt{b}) + 6\frac{1}{2} = 0.$$

$$\triangle CZD \sim \triangle DKE$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{ZD}{KE} = \frac{(1 + 2\sqrt{a})(1 - 2\sqrt{b})}{-13}$$

$$CB \cdot 27x = CD^2$$

$$CD = \frac{ZD \cdot DE}{KE}$$

$$CB \cdot 27x = \frac{(ZD \cdot DE)^2}{400x^2}$$

\sqrt{f}

$$a_{10} = \sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$$

$$a_{12} = 2 - x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25 + 34}{(3x + 2)^3}}$$

~~$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$$~~
~~$$a_{12} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{25 + 34}{(3x + 2)^3}}$$~~

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2 - x}{\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

$$a_{10} = \sqrt{441 \frac{\sqrt{21}}{21} \frac{1}{\frac{4}{441}}}}$$

$$\frac{(2 - x)^4}{(25x + 34)^2 (3x + 2)^2} = \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

$$(2 - x)^4 = (25x + 34)^2$$

$$(4 - 4x + x^2)^2 = 25x + 34$$

$$x^4 + 16x^2 + 16 - 32x + 8x - 8x^3 - 25x - 34 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 57x - 18 = 0$$

$$(4 - 4x + x^2) = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x + 1)(x - 30) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 30$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \frac{1}{16}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√1.

{a_n} - геом. пр.

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} - 32 \cdot 31$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{x+18}{3x+2}} = a_1 \cdot q^8$$

$$a_{10} \cdot q^8 = a_{18} \cdot (1+4 \cdot 9 \cdot 92)$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_{18} = a_1 \cdot q^{17}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

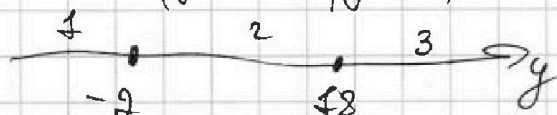
$$\begin{array}{r} 39699 \\ \times 36 \\ \hline 238194 \\ \times 36 \\ \hline 1411044 \\ \hline 14217438 \end{array}$$

√2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

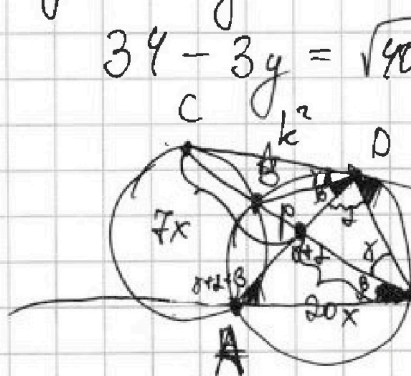
$$2\sqrt{y-3x-x^2+2} + \sqrt{3-x-2z} \geq 7$$

$$(y+2) + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



$$-y-2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$34-3y = \sqrt{400-z^2}$$



$$p^2 - 1 \neq 3$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{p^2 - 1}{3}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=-1 \\ a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$k^2 = (7x-p)(27x)$$

$$k^2 = 189x^2 - 27px$$

Δ DME ~ Δ AMD

$$\frac{DM}{DM} \quad d^2 + a - (1001 - p^2) = 0$$

$$1 + 4004 - 4p^2 = k^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

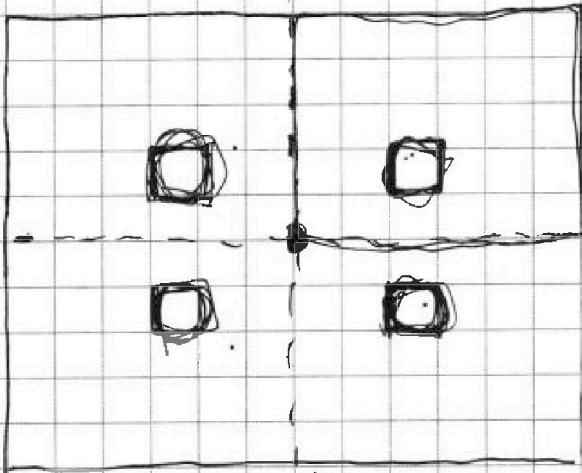


1 2 3 4 5 6 7

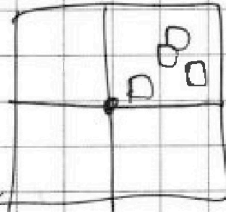
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√5.



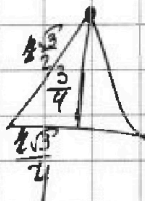
$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 81 \\ \hline \uparrow 31 \\ 93 \\ \hline 961 + 89 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline + 64 \\ \hline 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 = 6(15000)!$$

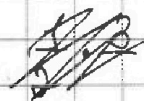
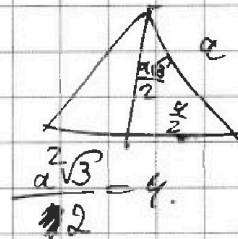
√7.



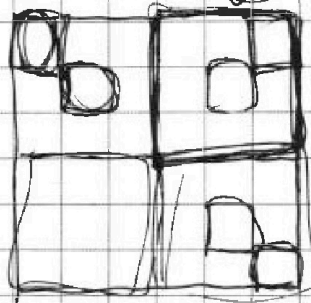
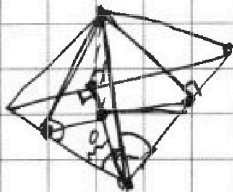
$$S=4, \quad a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$$



$$\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4$$



$$C_{15000}^2$$



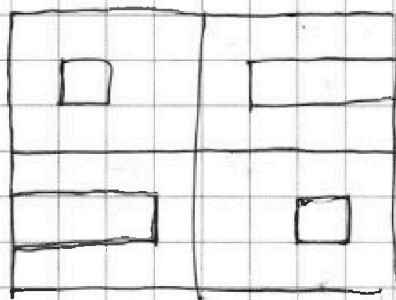
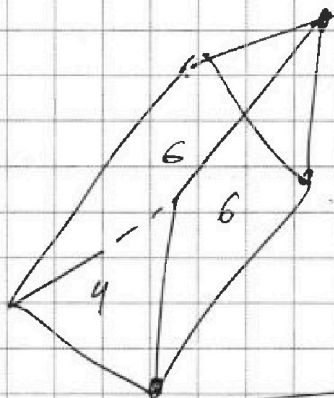
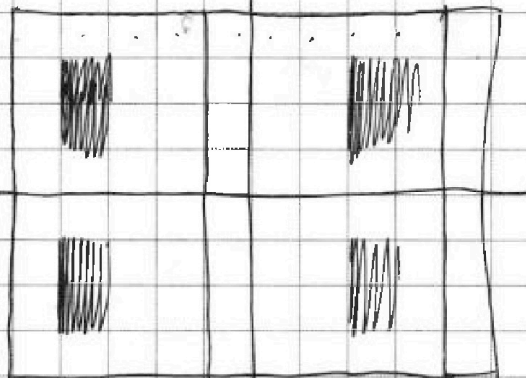
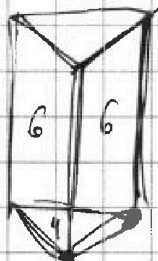
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

~~$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$~~

$$p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0. \quad \frac{h}{b} - \frac{b}{h} + 8f$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0. \quad \frac{b}{x} - \frac{b}{x} = \frac{b}{x}$$

$$p-1 = - \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 \quad x - x = 8f$$

$$|p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3| \quad \Delta = 1 + 4004p^2$$

$$\cos x \in [-1; 1].$$

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$1000 - a^2 - a + 1 = p^2$$

$$4001 - a^2 - a = p^2$$

$$\frac{1}{2} \quad 4000 \geq p^2$$

√2.

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$-2-y-2y+36 \leq 20$$

$$34-3y \leq 20$$

$$3y \geq 14$$

$$b-c > a-c$$

$$b > a$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a < b. \quad \sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) + \frac{1}{2}(1-2\sqrt{b})$$

$$b-a \cdot 3. \quad 2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad 2\sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) + (1-2\sqrt{b})$$

$$a^2 + b = 1000.$$

$$a-c = b-c$$

$$a=b$$

~~$$a-b = a^2$$~~

$$2) b-c = p^2, a-c = 1.$$

$$C = b-1.$$

$$1000 - a^2 > a$$

$$a(a+1) < 1000$$

$$b = 1000 - a^2$$

$$a^2 + a - 999 - p^2 = 0$$

$$1 + 4(999 + p^2)$$

$$(2\sqrt{a}+1)(1-2\sqrt{b}) = -3$$

$$(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{b}-1) = 13$$

$$|b-a+1 = p^2|$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -6$$

$$3 - x - 22 \geq 0$$

$$0 > (3-x)/(9+x) < 0$$

$$0 > 8x - x^2 + 2x$$

$$0 < x - x^2 - 8x$$

$$(9x - 8x)$$

$$9x - 8x = x$$

$$22 \leq 3 - x$$

$$2 \leq \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$$

$$y + 2 \geq 3x + x^2$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$-\frac{3}{2} = -1.5$$

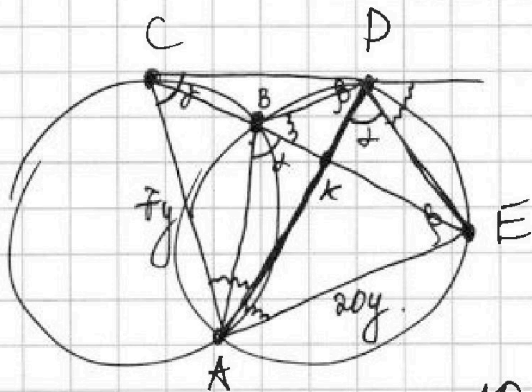
49 25
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31

$$b + 1 - a = p^2$$

$$b - a + 1 = p^2$$

$$a^2 + b = 4000$$

$$b - a \leq 3$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$a^2 + a - 1 + p^2 = 4000$$

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{20y}{\sin \alpha}$$

$$\frac{20y \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{7y \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{20}{7} \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha$$

$$a^2 + a - 1 = 4000 - p^2$$

$$b - c = p^2$$

$$a - c = 1$$

4
9

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + AD + 40 = 0$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$$

$$\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x}$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3(p+4) \cos x + 40 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

(-1)

$$a^2 + a - 1 \leq 1000$$

$$a^2 + a - 1001 \leq 0$$