



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{v_n\}$ - геометрическая прогрессия (v_1 - первый член, q - знаменатель)

$$v_2 = v_1 q = \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \quad v_3 = v_1 q^2 = x+3,$$

$$v_{15} = v_1 q^{14} = \frac{(25x-9)^7}{(x-6)^7}$$

$25x-9 \neq 0$, $x+3 \neq 0$, $x-6 \neq 0$ - тк тогда один или два из членов прогрессии равен 0, а ещё хотя бы 1-нет (причём не первый) - такого быть не может.

Заметим, что $v_2 \cdot v_3 = v_1^2 q^3 = v_{15} \cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{v_2 v_3}{v_{15}}$

$$v_1 = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)} (x+3) \sqrt{(x-6)^7}}{\sqrt{(25x-9)^7}} = \sqrt{(x-6)^4 (x+3)} =$$

$$= (x-6)^2 (x+3).$$

$$v_3 = x+3 = v_1 q^2 = (x-6)^2 (x+3) q^2 \rightarrow q^2 = \frac{1}{(x-6)^2} \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} = v_1 q = (x-6)^2 (x+3) q \rightarrow$$

$$q = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{(x-6)^2 (x+3)} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{x+3} = \frac{\sqrt{(25x-9)}}{(x-6)^3} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$q^{24} = (q^2)^{12} = (q^6)^4 = \frac{1}{(x-6)^6} = \frac{(25x-9)^2}{(x-6)^6} \cdot \frac{1}{(x+3)^4} \rightarrow$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 & (1) \\ (x+3)^2 = 9-25x & (2) \end{cases}$$

(1): $x^2 + 6x + 9 = 25x - 9 \rightarrow x^2 - 19x + 18 = 0 \rightarrow$
 $x = 1, x = 18 \rightarrow x = 1$ - не подходит, тк $25x-9$ при $x=1 > 0$, $x-6$ при $x=1 < 0$, т.е. под корнем (v_2) < 0 - не может быть при $x=18$ - всё нормально

(2): $x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x \rightarrow x^2 + 31x = 0 \rightarrow$
 $x = 0, x = -31$ - оба подходят, тк - подходит.

ответ: 0, 18, -31.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cdot \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6(2\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0 \quad | :4$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Пусть $t = \cos x$, тогда $-1 \leq t \leq 1 \rightarrow$

$$p t^3 - 3 t^2 + 3 t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

• если $p=0$: $-3t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3t + 1 = 0$
 $\rightarrow D = 9 - 12 < 0 \rightarrow$ нет решений $\rightarrow p \neq 0$

• $(p-1)t^3 = (1-t)^3$ / ивлеем корни 3-степени (нечётная степень)

$$\sqrt[3]{p-1} t = 1-t \rightarrow (\sqrt[3]{p-1} + 1)t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

(примем $\sqrt[3]{p-1} + 1 \neq 0$, тк $p \neq 0$)

$$\rightarrow \text{тк } -1 \leq t \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \rightarrow$$

$$|\sqrt[3]{p-1} + 1| \geq 1 \text{ выполняется } \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} + 1 \geq 1 \\ \sqrt[3]{p-1} + 1 \leq -1 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases}; \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -8 \end{cases}; \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

\rightarrow при $\begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$ t принимает значения от -1 до 1 (косинус определён)

Ответ: $\begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• Заметим, что симметрия относительно центра прямоугольника - это симметрия относительно обеих средних линий.
 (Пронумеруем столбцы от 1 до 400 и строки от 1 до 100. Тогда при симметрии относительно средней линии // короткой стороне прямоугольника если закрашена клетка (i, j) (i - номер столбца, j - строка), то закрашена и клетка $(401-i, j)$, при симметрии относительно средней линии // длинной стороне прямоугольника, если раскрашена клетка a_{ij} (i, j) , то раскрашена и клетка $(i, 101-j)$, при симметрии относительно центра, если раскрашена (i, j) , то раскрашена и $(401-i, 101-j)$. Тогда если есть симметрия относительно обеих средних линий, то есть и целая симметрия относительно центра прямоугольника.

• Тогда симметрии с хотя бы одной симметрией относительно ср. линий:

$$C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

(симметрию относительно ср. линий можно получить выбрав 4 клетки на одной половине прямоугольника и отразив)

(симметрии относ. одной + относ. другой - оценке)
 (симм. относ. центра двух линий - выбираем 2 кл. на $\frac{1}{4}$ и отражаем)

• Симметрии относительно центра всего C_{20000}^4 .
 (выбираем 4 на одной полов. и отражаем)

Три этих, если есть симметрия относительно центра и одной из средних линий, то есть симметрия относительно и второй из средних линий. Тогда симметрии относительно только центра $C_{20000}^4 - C_{10000}^2$.

Всего: $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$

Ответ: $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• по условию $a < b \Rightarrow a - c < b - c$

• $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - некоторое простое число
 p^2 можно разложить как $1 \cdot p^2, (-1) \cdot (-p^2), p \cdot p, (-p) \cdot (-p)$ и т.д., т.к. p - простое, но если
 $(a-c) = (b-c) = \pm p$, то $a = b$, но $a < b \Rightarrow$
 т.к. $a - c < b - c : (\text{т.к. } p^2 > 1 \text{ и } -p^2 < -1)$

$$\begin{cases} a - c = 1 & (1) & (1): b - a = p^2 + c - (c + 1) = p^2 - 1 \\ b - c = p^2 & (2) & (2): b - a = c - 1 - (c - p^2) = p^2 - 1 \\ a - c = -p^2 & (2) & \\ b - c = -1 & & \Rightarrow p^2 - 1 \not\equiv 3 \end{cases}$$

но квадраты чисел по mod 3 могут давать только остатки 0 или 1 $\rightarrow p^2 \equiv 3$ (то есть даёт остаток 0, иначе $p^2 - 1 \not\equiv 3$) $\rightarrow p = 3$, т.к. p - простое число.

$$(1): \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \quad \begin{aligned} a^2 + b &= c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 710 \rightarrow \\ c^2 + 3c - 700 &= 0 \\ (b > a, \text{ т.к. } c + 1 < c + 9) & (c - 25)(c + 28) = 0 \rightarrow \\ \begin{cases} c = 25 \\ c = -28 \end{cases} & \rightarrow \begin{aligned} a = 26, b = 34 &\rightarrow (26, 34, 25) \\ a = -27, b = -19 &\rightarrow (-27, -19, -28) \end{aligned} \end{aligned}$$

$$(2): \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} a^2 + b &= c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 710 \\ c^2 - 17c - 630 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c + 18)(c - 35) &= 0 \\ \begin{cases} c = -18 \\ c = 35 \end{cases} & \rightarrow \begin{aligned} a = -27, b = -19 &\rightarrow (-27, -19, -18) \\ a = 26, b = 34 &\rightarrow (26, 34, 35) \end{aligned} \end{aligned}$$

Ответ: $(26, 34, 25), (-27, -19, -28), (-27, -19, -18), (26, 34, 35)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

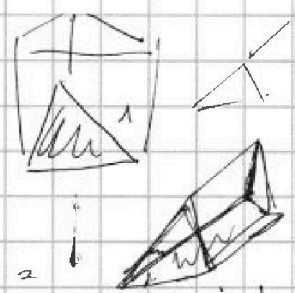
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z^2} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z^2} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-2z^2} \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$



$$p(p \cos 3x + 3(p+4) \cos x) = 6 \cos 2x + 10$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

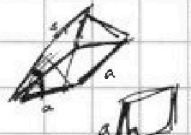
$$\cos x = a$$

$$\begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm 1 \\ a = c \pm 1 \end{cases}$$

$$4p a^3 - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p a^3 - 3 \cos x$$

$$p a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0$$



$$c^2 + 2c + 1 + b = 210 \Rightarrow a \leq 1$$

$$(p-1)a^3 + (a-1)^3 = 0$$

$$(p-1)a^3 = (1-a)^3$$

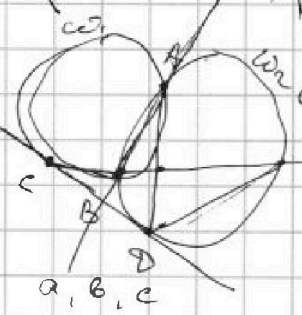
absin d > 3
absin p > 3
absin y

$$b-c = c^2 + c + 1 - 210 < 0$$

$$(3\sqrt[p-1]{p-1} + 1)a = 1$$

$p < 1$
 $p > 1: p > 1$
 $p-1 > 1$
 $p > 1$
 $p-1 > 0$
 $3\sqrt[p-1]{p-1} > 0$

$$(a-1+at)(a^2+1-2a+t^2a^2+at(a-1)) = 0$$



$$a^2(1+t^2+t) - a(2+t) + 1 \quad (\cos x = 1)$$

$$D = t^2 + 4t + 4 - 4t^2 - 4t - 4 = -3t^2 < 0$$

$$t^2 + t + 1 > 0$$

$$a + at = 1$$

$$a = \frac{1}{t+1}$$

$$a < b$$

$$b - a > 3$$

$$a(t+1) \geq 1$$

$$-1 \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b = 210$$

$$b = 210 - a^2$$

$$(a-c)(210 - a^2 - c) = p^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0 \quad t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}} \quad p-1 = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3$$

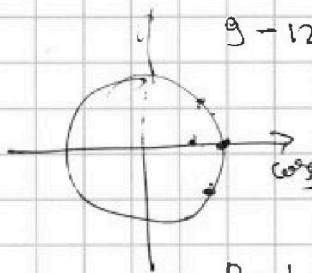
$$(p-1)t^3 = (1-t)^3 \quad p = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3 + 1$$

$$\sqrt[3]{p-1} t = 1-t \quad p-1 = \left(\frac{1-t}{t}\right)^3 = \left(\frac{1}{t}-1\right)^3$$

$$(\sqrt[3]{p-1} + 1)t = 1$$

$$p=1 \quad (t-1)^3 = 0 \quad -1 \leq \sqrt[3]{p-1} \leq 1 \quad p \neq 1 \quad p-1 \neq -1 \quad p=0$$

$$t=1 \quad \cos x = 1 \quad t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \quad \sqrt[3]{p-1} = -1 \quad p-1 = -1 \quad p=0$$



$$-3t^2 + 3t - 1$$

$$3t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \Delta = 9 - 12 < 0$$

$$p=2 \quad p > 1 \quad p-1 > 0 \quad p < 1$$

$$-4 \leq p < 0 \quad -(p-1) < 0$$

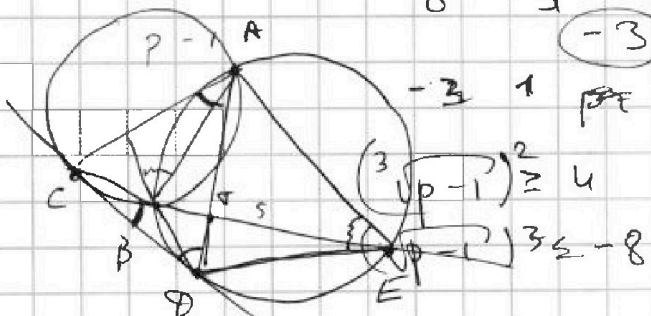
$$p-1 \leq -2 \quad p \leq -1$$

$$-8 \leq p < -7 \quad -3$$

$$\sqrt[3]{p-1} + 1 > -1$$

$$\sqrt[3]{p-1} > -2$$

$$p-1 \neq -8 \quad p < -7$$



$$-3 \quad 1 \quad -5 \sqrt{-6} \leq -2$$

$$(\sqrt[3]{p-1})^2 \geq 4$$

$$(\sqrt[3]{p-1})^3 \leq -8$$

$$\sqrt[3]{p-1} + 1 = -1$$

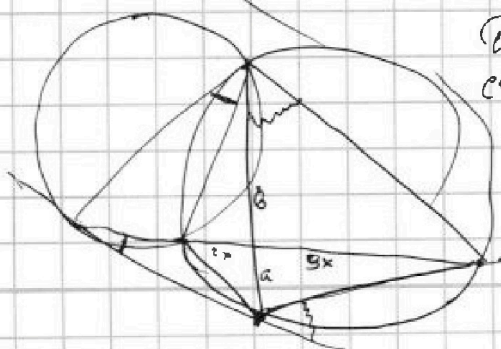
$$-1 = \sqrt[3]{p-1}$$

$$OC^2 = OT \cdot TA$$

$$CD^2 = CT \cdot TE$$

$$ab = 10x^2$$

$$a(a+b) = a^2 + ab = a^2 + 10x^2 = CD^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = 181-2^z \end{cases}$$

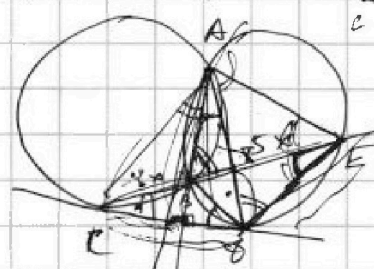
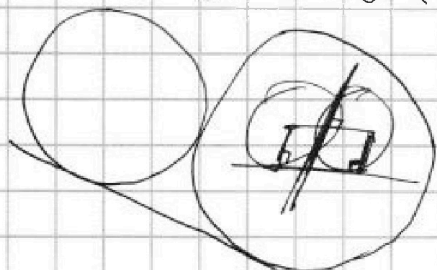
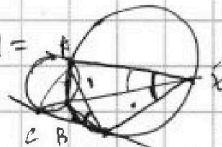
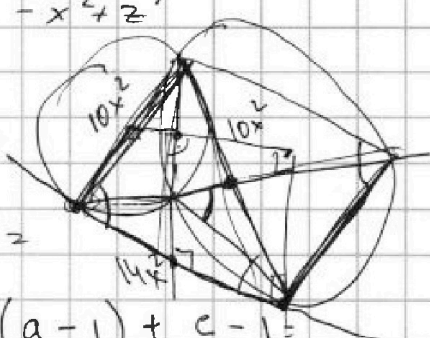
$a = x+5, \quad b = y+4, \quad c = z+1$

$\sqrt{a} - a - 4c \quad y - 4x - x^2 + z =$

$= b - 4 - (x+5)(x+4) + z =$

$= b - 4 - (a^2 - 6a + 5) + c - 1 =$

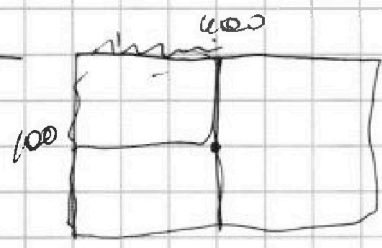
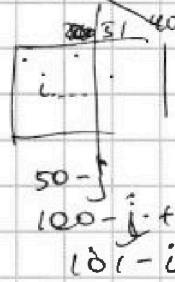
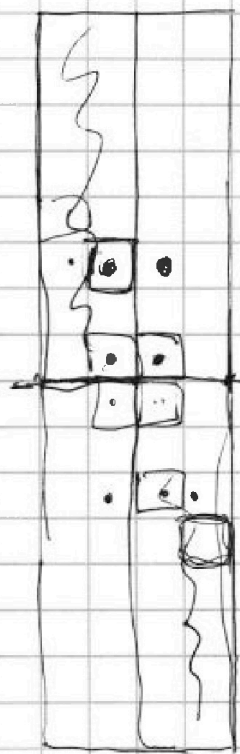
$= b - 4 - a^2 + 6a - 5 + c - 1$



$CD^2 = CF \cdot CE =$

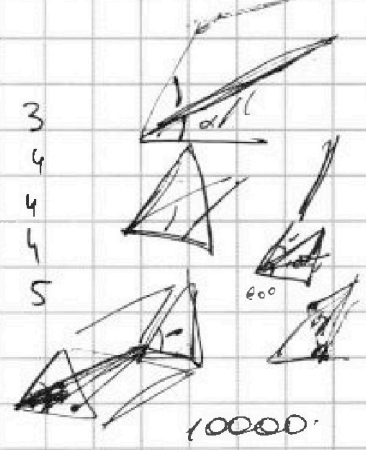
$CF : FE = 2x : 5x$

$AD \cdot CA = CD^2 = CF \cdot CE = 2x \cdot 7x = 14x^2$



200.00
 $2 \cdot 20000$

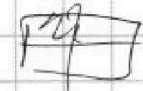
 $4! 19996!$
 $3 \cdot 4$



$400 \cdot 50$
 20000

 $18997 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 200$

$ab \sin \alpha = 2$
 $= 3$
 $= 3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+3)\sqrt{(25x-9)(x-6)^2} = 6\sqrt{(25x-9)(x-6)^2} \rightarrow 6 = (x+3)(x-6)^2$$

$$q^{14} = (x+3)(x-6)^4 \sqrt{(25x-9)(x-6)^2} \cdot (x+3)$$

$$\frac{q^{214}}{6^2} = \frac{(x+3)^2(25x-9)(x-6)^4}{(x+3)^2(x-6)^4} = (x+3)\sqrt{(x+6)^3(x-6)}$$

$6a^6$ $6a^8$ $6a^{14}$ $6a^{20}$ 2 15 25
 $-x-5$ 22 12 $y+4-c$ 10 12 -31 x 31
 -42 -48 14 0 11 25 25 27 5 12
 $-x-2z-1$ 0 3 4 11 25 25 27 5 12

$$6(x+3)(x-6)^2 q^8 = (x+3) q^4 = (x-6)$$

$$q^4 = (x-6)$$

$$(x+3)(x-6)^2 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)^2} q^6 = (x-6) \sqrt{x-6}$$

$$q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)^2} q^{x+3} = (x-6) \sqrt{x-6}$$

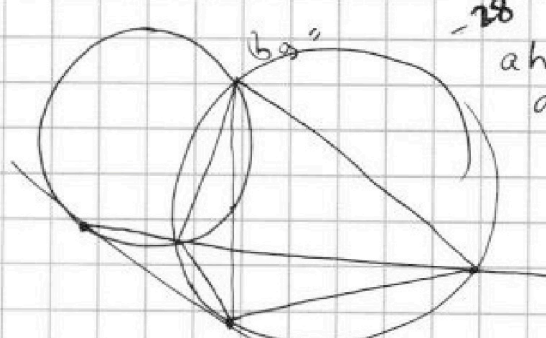
$$\frac{(x-6)^6}{(25x-9)^2} = \frac{1}{(x-6)^6} \frac{1}{(x+3)^4} = a^4 \sqrt{32}$$

$$y - (a^2 - 5a + a - 5) + 6 - 1 = \dots$$

$$y = a^2 + 5a$$

$$y - a^2 + 4a + 5 + 6 - 1 = \dots$$

$$y + 4z - a^2 + 4a + 6 = \dots$$



$x+5 = a$
 $1 - x - 4z = 1 \quad a - 4 - 4z$
 $a - 5 \quad z + 1 = 6 \quad a - 4z$
 $y - 4x - x^2 + z = y - (a-5)(a+1) + 8 - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$
 $b - a \neq 3$
 $(a-c)(b-c) = p^2$
 $a^2 + b = 710$

$a - c = 1, b - c = 1$
 $a - c < b - c \Rightarrow$

$a - c = \pm 1$
 $b - c = \pm 1$

$a - c = p^2 \Rightarrow a = c + p^2$ (2)
 $a - c = 1 \Rightarrow a = 1 + c$ (1)
 $b - c = p^2 \Rightarrow b = p^2 + c$

$a^2 + p^2 + c = 710 \Rightarrow c^2 + 3c + 1 + p^2 = 710$
 $b - c = b - a + 1 = 1 + p^2 + c + p^2 = 710$

$a - c > b - c$

$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c - p^2 \end{cases}$
 $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c + p^2 \end{cases}$
 $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + p^2 \end{cases}$

$710 = c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1 = 710 \Rightarrow c^2 - 2cp^2 + p^4 + c = 711$
 $710 = c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 710 \Rightarrow c^2 + 3c + p^2 = 711 = 78 \cdot 3^2$

$c = 3: p^2 = 9 \Rightarrow p = 3$
 $c = 5: p^2 + c^2 = 25 + 25 = 50$

$c^2 + 3c = 78 \cdot 3^2$
 $c(c+3) = 3c^2 + 3c = 78 \cdot 3^2$
 $c^2 + c + 1 = 78$