



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

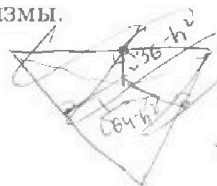
$$\frac{1}{4} + \frac{37}{4} + \frac{\sqrt{37}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{37}{2} - 9 = 0$$

$$\frac{13}{2} - \frac{1}{2} = \frac{12}{2} - 9 - 9 = 0$$

$$12 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{37}{4} - \frac{\sqrt{37}}{2} = 3$$

$$4 \cdot 9 + 13 = 18 \cdot 3$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} + 9 = 27$$



$$4 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{36 - h^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{36 - h^2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot h$$

$$1 + 3 > 4 - x$$

$$x > \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.л.  $a_i$  -  $i$ -тый член геом. прогрессии  $\Rightarrow a_i = a_1 \cdot k^{i-1}$ , где  $k$  - её шаг

$$\Rightarrow a_7 = a_1 \cdot k^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+11}^3}; \quad a_3 = a_1 \cdot k^2 = 5-x; \quad a_{15} = a_1 \cdot k^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)!}$$

$$OD3: \frac{13x-35}{x+11} \geq 0; \quad (13x-35)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} + \quad - \\ -1 \quad \frac{35}{13} \end{array} \quad x$$

Но если  $a_7$  (или  $a_{15}$ ) равно 0, то либо  $a_1 = 0 \Rightarrow$  все члены пом-ти нулевые, или  $k=0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \geq 2$ . Эти случаи - не геом. прогрессии

$\Rightarrow OD3: x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{35}{13}, +\infty)$ . Ранее считал  $a_1, k \neq 0$

т.к.  $a_7$  и  $a_{15}$  - корни, то  $a_7 > 0 \Rightarrow a_1 \cdot k^6 > 0 \quad k^6 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$

$$\Rightarrow a_{15} = a_1 \cdot k^{14} > 0 \quad \Rightarrow 75-x > 0 \Rightarrow x < 5$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = k^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)} \cdot (x+1)^{3/2}}{\sqrt{\frac{13x-35}{x+11}^3}} = (x+1)^2 \Rightarrow k^4 = |x+1|$$

$$\frac{a_{15}}{a_3} = k^6 = (5-x) \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} \Rightarrow k^6 = (5-x)^2 \cdot \frac{(x+1)^3}{13x-35} = (k^4)^3 = |x+1|^3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{a_{15}}{a_3}\right)^2 = (k^2)^2 = k^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = |x+1| \quad (2)$$

• При  $x < -1$   $|x+1| = -(x+1) \Rightarrow$  (1) примет вид  $(x+1)^3 \cdot \left(\frac{5-x}{13x-35} + 1\right) = 0$   
(2) примет вид  $(x+1) \left(\frac{13x-35}{(5-x)^2} + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5-x}{13x-35} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 75 = 35 - 13x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 10 = 7^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 > -1$$

• При  $x > -1$  ( $x \in (\frac{35}{13}, 5)$  с учетом возрастания)  $|x+1| = (x+1) \Rightarrow$  (1):  $(x+1)^3 \left(\frac{5-x}{13x-35} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5-x}{13x-35} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 25 = 13x - 35$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \quad \text{По т. Виета: } \begin{cases} x_3 + x_4 = 23 \\ x_3 x_4 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 20 > 5 \\ x_4 = 3 \in (\frac{35}{13}, 5) \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \{-5, 3\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2. \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z^2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

Во втором уравнении правая часть  $\leq 13 = \sqrt{169}$   $\forall z \in \mathbb{R}$  ( $|z| \leq 13$ )

Посмотрим на левую часть. Пусть  $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$ .

При  $y \geq 12$   $f(y) = 4y - 35 \geq 4 \cdot 12 - 35 = 13$ , при  $y = 12$   $f(y) = |12+1| = 13$

При  $-1 \leq y < 12$   $f(y) = -2y + 37 > -2 \cdot 12 + 37 = 13$

При  $y < -1$   $f(y) = -4y + 35 > -4 \cdot (-1) + 35 = 39 > 13$

т.е.  $f(y) \geq 13 \forall y \Rightarrow$  второе уравнение системы может иметь решение только тогда  $f(y) = 13 = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow z=0, y=12$  (также  $f(y) > 13$ )

Тогда уравне (1) можно переписать как:  $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

Замечим, что  $(x+3)(4-x) = 12+x-x^2$ . По ОДЗ  $x \geq -3, x \leq 4$

~~$a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{4-x} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7$~~

$$(2) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5 \quad 1^2$$

$$x+3+4-x - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$18\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2) + 18$$

$$9\sqrt{12+x-x^2} = 2(12+x-x^2) + 9 \quad t = \sqrt{12+x-x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 = 3^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{9+3}{4} = 3 & \Rightarrow \begin{cases} 12+x-x^2 = 3 & (*) \\ 12+x-x^2 = \frac{3}{2} & (**) \end{cases} \\ t = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(*) : x^2 - x - 9 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 9 = 37 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{37}}{2} < 4, > 0 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{37}}{2} > -3 \end{cases}$$

$$(**) : x^2 - x + \frac{21}{2} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot \frac{21}{2} = 1 + 42 = 43 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1+\sqrt{43}}{2} < 4 \\ x_4 = \frac{1-\sqrt{43}}{2} > -3 \end{cases}$$

Ответ:  ~~$y=12, z=0, x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{1+\sqrt{43}}{2}, \frac{1-\sqrt{43}}{2} \right\}$~~

В уравн (2) левая часть  $> 0$  при  $\sqrt{x+3} > \sqrt{4-x} \Rightarrow$  при  $x+3 > 4-x, x > \frac{1}{2}$ , при  $x < \frac{1}{2}$  левая часть  $< 0$ .

При  $t=3$  (см. (\*)) правая часть (2)  $2 \cdot 3 - 5 = 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x_1$  подходит,  $x_2$  - нет

При  $t = \frac{3}{2}$  (\*\*) правая часть (2)  $2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow x_3$  подходит,  $x_4$  - нет.

Ответ:  $z=0, y=12, x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{1-\sqrt{43}}{2} \right\}$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3  $\cos 3x + 3 \cdot \cos 2x + 6 \cdot \cos x = p.$

$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ;  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ .  $\cos x = c \Rightarrow c \in [-1, 1]$

Исходное ур-ние:  $f(c) = 4c^3 - 3c + 3(2c^2 - 1) + 6c$ ;  $f(c) = p$   
 $f(c) = 4c^3 + 6c^2 + 3c - 3$

$f'(c) = 4 \cdot 3c^2 + 2 \cdot 6c + 3 = 3(4c^2 + 4c + 1) = 3(2c + 1)^2$

$\Rightarrow f'(c) = 0$  при  $c = -\frac{1}{2}$ ,  $f'(c) > 0$  для остальных  $c$ .

Т.к.  $f(c)$  непрерывна, это означает, что  $f(c)$  неубывает при  $c \in (-\infty, +\infty)$ , т.е. имеет вид, как на рисунке:

Возьмем  $f(c) = 4(c + \frac{1}{2})^3 - 3,5$

$\Rightarrow \forall p$   $f(c) = p$  имеет ровно одно решение.

Но т.к.  $c = \cos x$ , нам нужно, чтобы это решение лежало на отрезке  $[-1, 1]$

$\Rightarrow p \in [f(-1); f(1)]$

$f(-1) = 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{7}{2} = -4$ ;  $f(1) = 4 \cdot \frac{2^3}{8} - \frac{7}{2} = 10$

$\Rightarrow p \in [-4; 10]$

$p = 4 \cdot (\cos x + \frac{1}{2})^3 - 3,5$

$\Rightarrow \cos x + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}}$   $\Rightarrow \cos x = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2}$ ,  $c \in [-1; 1]$   
 или  $p \in [-4; 10]$

~~$x = \pm \arccos \dots$~~

$\Rightarrow x = \pm \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  при  $p \in (-4; -3) \cup (-3; 10)$

решения случаи:

при  $p = -4$   $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

при  $p = 10$   $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

при  $p = -3$   $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

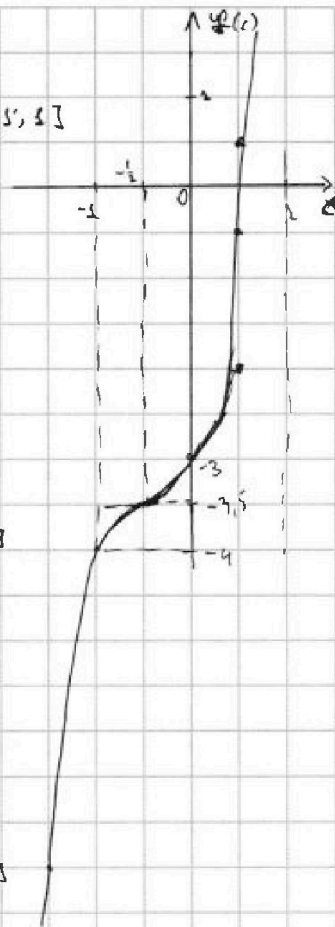
Ответ:  $p \in [-4; 10]$ ;

при  $p = -4$   $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

при  $p = 10$   $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

при  $p = -3$   $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

при  $p \in (-4; -3) \cup (-3; 10)$   $x = \pm \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$





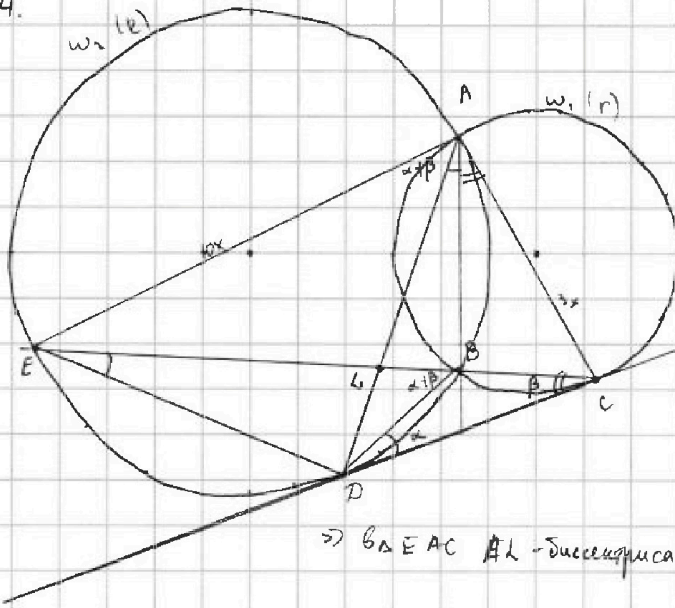
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4.



$$AD \cap CE = L \Rightarrow CL : LE = 3 : 10$$

$$\angle BDC = \alpha, \angle BCD = \beta$$

По об-ву касательной и хорды

$$\angle DEB = \frac{\sqrt{DB}}{2} = \angle BDC = \alpha = \angle OAB$$

$$\angle BAC = \frac{\sqrt{BC}}{2} = \angle BCD = \beta$$

$\triangle BDC$  внешний угол

$$\angle DBE = \alpha + \beta = \frac{\sqrt{DE}}{2} = \angle DAE$$

$$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = \alpha + \beta$$

$\Rightarrow \triangle EAC$   $AL$  - биссектриса ( $\angle EAL = \alpha + \beta = \angle LAC$ )  $\Rightarrow$  по об-ву биссектрисы

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CL}{LE} = \frac{3}{10} \quad \text{Пусть } AC = 3x, AE = 10x$$

$$\triangle EDC \text{ по т. синусов} \quad \frac{ED}{\sin \beta} = \frac{CD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = k$$

$$\triangle DBC \text{ по т. синусов} \quad \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = k$$

$$R\text{-радиус окруж. } \omega_2, r - \omega_1 \Rightarrow \triangle ABE \quad \frac{AE}{\sin \angle ABE} = \frac{10x}{\sin \angle ABE} = 2R$$

$$\triangle ABC \quad \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{3x}{\sin \angle ABC} = 2r$$

$$\angle ABE \text{ и } \angle ABC - \text{смежные} \Rightarrow \text{их синусы равны} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{R}{r}$$

$$\triangle BDE \quad \frac{BD}{\sin \alpha} = 2R; \quad \triangle ABC \quad \frac{BC}{\sin \beta} = 2r \Rightarrow \sin \beta = \frac{BC}{2r}, \sin \alpha = \frac{BD}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2R \cdot \sin \beta}{2r \cdot \sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC \cdot 2R}{2r \cdot BD} = \frac{R}{r} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{10}{3} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{10}{3k}$$

$$\text{Но } \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = k \Rightarrow k = \frac{10}{3k} \Rightarrow k^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{10}{3}} \quad (\text{отношение длин отрезков} > 0)$$

$$\Rightarrow ED : CD = \sqrt{10} : \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{10} : \sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

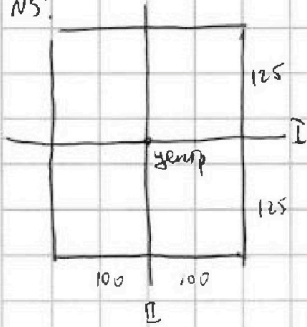


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



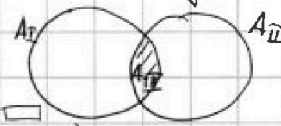
Чтобы закрасить 8 клеток, симметричных отн. I "средней линии" (шири.), необходимо и достаточно выбрать 4 клетки в верхней половине прямоугольника, остальные 4 закрасятся симметрично - симметрично  $\Rightarrow$  раскрасок, симметричных отн. линии I  $A_I = C_{125, 100}^4 = \frac{25000 \cdot 24999 \cdot 24998 \cdot 24997}{4!}$

Аналогично выбрать 8 клеток, симметричных отн. линии II есть

$$A_{II} = C_{100, 250}^4 = A_I \text{ способов.}$$

При этом будет  $A_{II}$  множество из 8 клеток, которые симметричны и отн. I, и отн. II. Чтобы получить такое множество клеток, необходимо и достаточно выбрать 2 клетки в одной из четвертей прямоугольника ("средние линии" делит прямоугол. на 4 одинак. четверти), потом их отразить отн. I, отн. II и (отн. I + отн. II), т.е. во все остальные четверти  $\Rightarrow A_{III} = C_{125, 100}^2 = \frac{12500 \cdot 12499}{2}$

$\Rightarrow$  всего множество из 8 клеток, обладающих симметрией относительно хотя бы одной средней линии  $A_I + A_{II} - A_{III} = 2 \cdot C_{25000}^4 - C_{125000}^2$

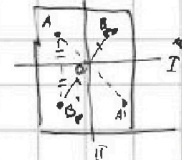


Если множество из 8 клеток обладает симметрией отн. центра  $\square$  (т.е. если клетку из мн-ва отразить отн. центра  $\square$ , попадем в клетку из мн-ва), то необходимо и достаточно для того, чтобы это задать, выбрать 4 клетки в верхней половине прямоугольника (каждая клетка оттуда от центра попадает в нижнюю половину.  $\frac{25000}{2} : 2$ , поэтому эти половины не пересекаются, центр - это вершина клеток, "средние линии" идут по углам клеток.)

Вообще способов выбрать 4 клетки из половины прямоугольника  $A_{IV} = C_{125, 100}^4 = A_I$ . Если эти 4 клетки не будут иметь симметрии отн. II линии, после отражения их от центра мы получим новое, еще не посчитанное множество, а если будут иметь симметрию отн. II линии - получим мн-во клеток с симметрией отн. I и II линий.

(Предположим, мн-во получено симметрично отн. I линии  $\Rightarrow$  4 клетки

A (см. рис. справа) есть симметрией B, являющейся симметр. парой для T, B из верхней половины, но тогда A симметр. B отн. II линии.



Это же работает в обратную сторону)  $\Rightarrow$  множество, симметр. отн. центра, но не отн. средних линий  $A_{IV} - A_{III}$

$$\Rightarrow \text{ответом будет } (A_I + A_{II} - A_{III}) + (A_{IV} - A_{III}) = 2A_I - 2A_{III}$$

$$\text{Ответ: } 2 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.  $(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - простое.  $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a-c)$  и  $(b-c)$  тоже целые.  
 $a > b \Rightarrow (a-c) > (b-c) \Rightarrow (a-c) \neq (b-c)$ .  $p^2 = \pm p \cdot \pm p = (\pm p) \cdot (\pm p)$ ,  
 других разложений на 2 целых множителя нет. не подходит, т.к.  $a \neq b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 & (p^2 > 1 \ \forall p \text{ простое}) \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a-b = -(p^2 - 1) \end{cases}$$

Если  $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ , то  $p^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (p^2 - 1) : 3 \Rightarrow (a-b) : 3$  - противоречие 2 условиям  
 $\Rightarrow p \not\equiv \pm 1 \pmod 3 \Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3$  (всего 3 остатка)  $\Rightarrow p = 3$ . Но  $p$  - простое  $\Rightarrow \underline{p = 3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c + 9, & b = c + 1 & (1) \\ a = c - 1, & b = c - 9 & (2) \end{cases}, \quad a - b = \pm 8 \neq 3$$

в случае (1)  $a + b^2 = c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 560 \Rightarrow c^2 + 3c - 550 = 0$   
 $D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209 = 47^2 \Rightarrow c_1 = \frac{-3 - 47}{2} = -25 \Rightarrow a_1 = -16, b_1 = -24$   
 $c_2 = \frac{-3 + 47}{2} = 22 \Rightarrow a_2 = 31, b_2 = 23$

в случае (2)  $a + b^2 = c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560 \Rightarrow c^2 - 17c - 480 = 0$   
 $D = 289 + 4 \cdot 480 = 2209 = 47^2 \Rightarrow c_3 = \frac{17 - 47}{2} = -15 \Rightarrow a_3 = -16, b_3 = -24$   
 $c_4 = \frac{17 + 47}{2} = 32 \Rightarrow a_4 = 31, b_4 = 23$

Ответ:  $(-16; -24; -25); (31; 23; 22); (-16; -24; -15); (31; 23; 32)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.  $\triangle ABC$  - основание призмы,  $\triangle A_1B_1C_1$  - другое основание  
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = l$ ;  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  по определению  
 $\Rightarrow$  боковые ребра - параллельны, одно из оснований  
которых равно  $l$





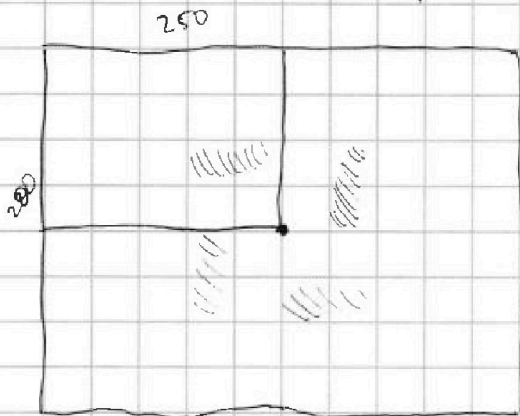
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

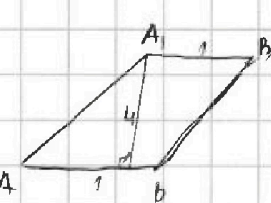
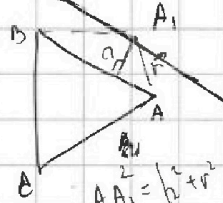
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

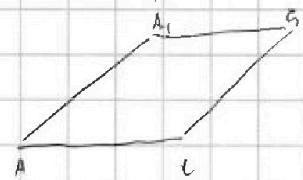
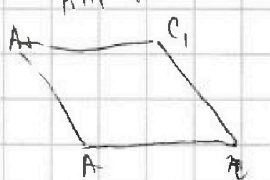
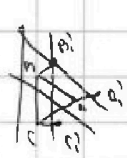


$$a_0 = \frac{100 \cdot 125 (100 + 125)}{2}$$

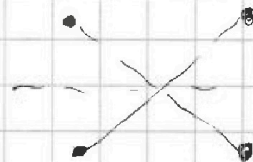
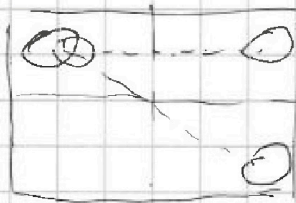
*идея: а₀ - высота параллелограмма вписанного  
в трапецию, а₁ - высота трапеции*



$$AA_1 = h^2 + r^2 = a^2 + 16$$



Посчитаем I типа  $C_2^4 = 6$ , посчитаем II типа  $C_2^2 = 1$   
A по I и II  $C_2^2 = 1$



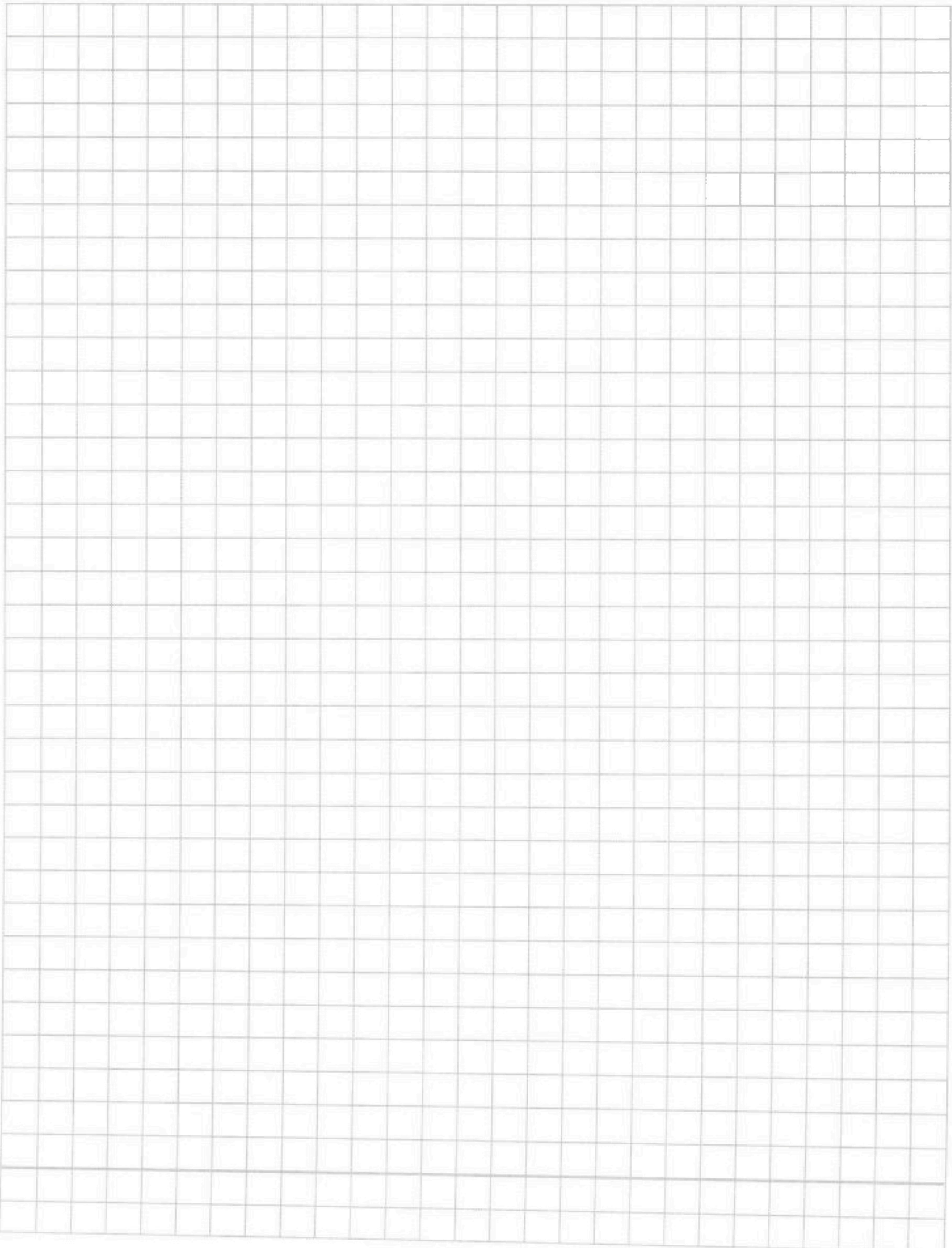


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

