



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -2:$$

$$bd^9 = \sqrt{16 \cdot 4} = \pm 8$$

$$bd^{11} = 4, d = \dots \quad bd^{14} = \sqrt{\frac{16}{4^2 \cdot 4}} = \pm \frac{1}{2}, d = \pm \frac{1}{4}$$

при $x = 2$ существует геом. прогрессия с $d = \pm \frac{1}{4}$

и $b = 4^{12}$ или геом. прогрессия с $d = -\frac{1}{4}$, $b = -4^{12}$.

$$x = -19:$$

$$bd^9 = \sqrt{441 \cdot 49} = \pm 21 \cdot 7, \quad bd^{11} = 21, \quad bd^{14} = \sqrt{\frac{441}{49}} =$$

$$= \pm \frac{21}{7^3}$$

Существует геом. прогрессия с

$$d = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{и} \quad b = \pm 21 \cdot (\sqrt{7})^{11}$$

Ответ: $-2, -19$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

~~ОА3:~~
 ~~$x+6 \geq 0$~~

(2): $|y+2| + 2|y-18| = f(y)$

или $y \leq 18$ $f(y)$ убывает т.к.

коэффициент при y отрицательный,

при $y > 18$: коэф. при y - положительный \Rightarrow

$f(y)$ возрастает. Тогда её минимум достигается

в $y = 18$. $f(18) = 20$. л.ч. (2) ≥ 20 . А правая

часть меньше или равна 20. Тогда $\&$ равносильно.

решение (2): $\begin{cases} |y+2| + 2|y-18| = 20 \Rightarrow y = 18 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$

(1): $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(3-x)(6+x)}$

Положим $\sqrt{x+6} = a$, $\sqrt{3-x} = b$, заметим, что $a^2 + b^2 = 9$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a^2(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \Rightarrow a-b = -2; 1$$

ОА3:
 $x+6 \geq 0$
 $3-x \geq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b = -2!$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = -2 \Rightarrow 9 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} \Rightarrow \frac{25}{4} = 4(x+6)(3-x)$$

$$25 = -4x^2 - 12x + 42$$

$$4x^2 + 12x - 44 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 44 \cdot 4}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{896}}{8} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{14}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$\frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$ не подходит $\text{под } 0 \leq x < 3$ $\frac{-3 + 2\sqrt{14}}{2}$

$$a-b = 1:$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 1 \Rightarrow -2 \cdot 4 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 1$$

$$-9 = \sqrt{(x+6)(3-x)} \Rightarrow 76 = -x^2 - 3x + 18$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{\sqrt{17} \pm -3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит под } 0 \leq x < 3.$$

$$\text{Умова } x = \frac{\sqrt{130} - 6}{4} \cdot \frac{\sqrt{14} - 3}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{130} - 6}{4}, 18, 0 \right); \left(\frac{\sqrt{14} - 3}{2}, 18, 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. иначе p^2 делит $a-b+1$ при дел. на 3

Иногда $p=3$. $a-b+1=9$, $a^2+a=4008$ -

невозможно т.к. $a-b < 0$, тогда $a-b+1 \leq 0$

б) $a-c = -p^2$: $b-c = -1$, $a-b-1 = -p^2 \Rightarrow a-b \equiv 1$,

т.к. $-p^2$ делит $a-b$ и $a-b \equiv 1$ при дел. на 3.

тогда $p=3$. $a-b = -8 \Rightarrow a^2+a = 992 \Rightarrow a = 31; -32$.

$a=31, b=39, c=40$; $a=-32, b=-24, c=-23$.

Ответ: $(31, 39, 40)$; $(-32, -24, -23)$.

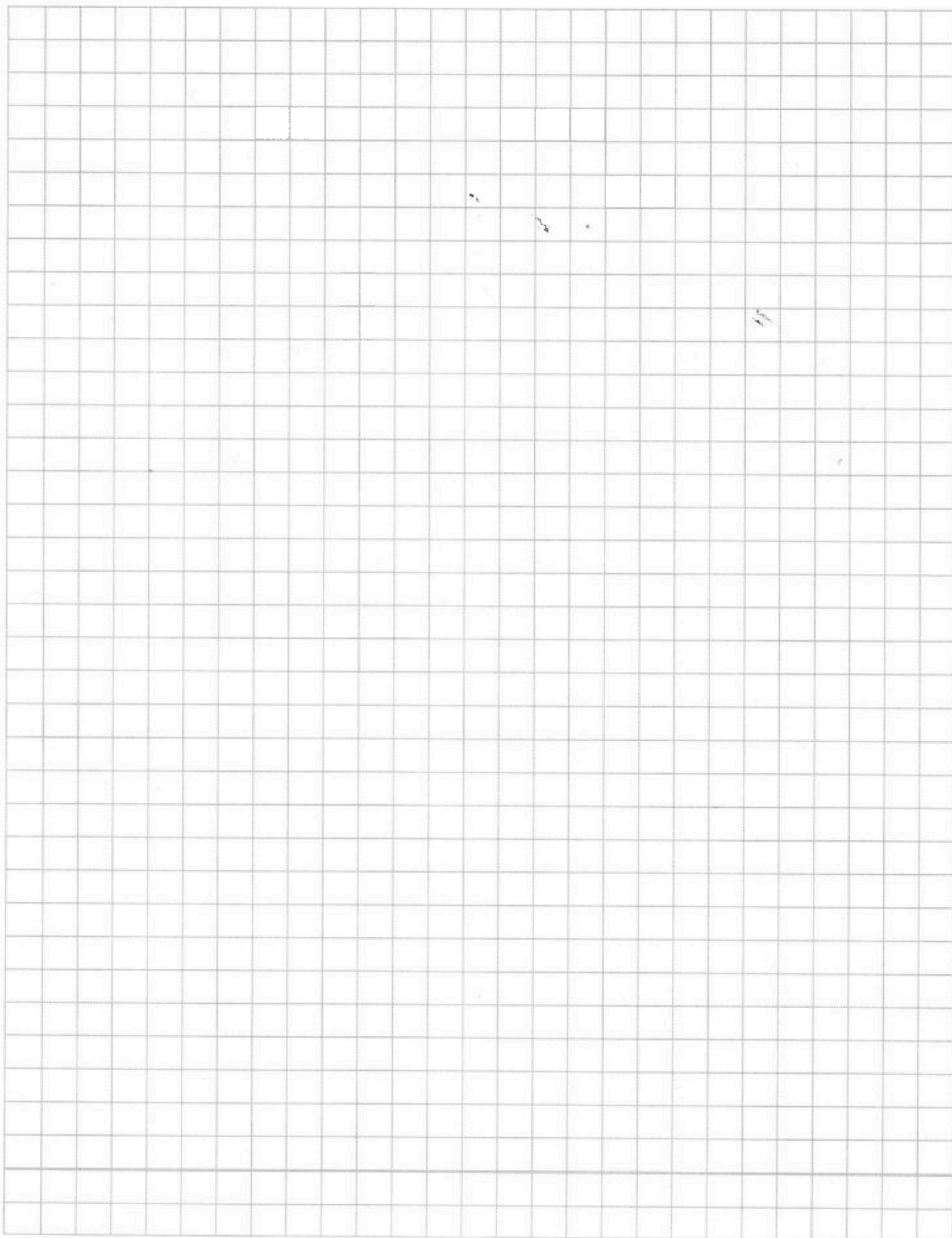


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

Пусть b - первый член геом. прогрессии, d - знаменатель.

Шаг

$$\begin{cases} b d^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} & (1) \\ b d^{11} = 2-x & (2) \\ b d^{14} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} & (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} (2)/(1): d^2 &= \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} & (A) \\ (3)/(A): d^8 &= \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2} & (B) \end{aligned}$$

$$(A): d^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(2-x)^2 = \pm(25x+34)$$

$$1) (2-x)^2 = 25x+34$$

$$2) (2-x)^2 = 25x-34$$

$$4-4x+x^2 = 25x+34$$

$$4-4x+x^2 = 25x-34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$x^2 + 27x + 38 = 0$$

$$x = -1; 30$$

$$x = -2; -19.$$

$x = -1$: $x = -1$ не подходит т.к. знаменатель

~~$b d^9 =$~~ выразим $(25x+34)(3x+2) < 0$

$x = 30$ не подходит т.к. $b d^{11} = b d^9 \cdot d^2 < 0$,

а $b d^9 > 0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b, a < b \quad a^2 + b = 1000 \Rightarrow a < 1000 - a^2, \quad a^2 + a < 1000 \Rightarrow a \in [-32, 31]$$

$$* (a-c)^2 (b-c)^2 = p^2, \text{ где } p - \text{ простое число}$$

$$\text{Итого } a-c = \pm 1 \text{ или } \pm p \text{ или } \pm p^2$$

$$1) a-c=1, \text{ тогда } b-c=p^2.$$

$$b-a+1=p^2; \quad 1000-a-a^2=p^2; \quad b-a \equiv 2 \pmod{3}$$

$b-a \equiv 1 \pmod{3}$ невозможно из-за того что квадраты

дают остатки 0 и 1 при делении на 3.

$$\text{Итого } b-a+1 \equiv 3 \Rightarrow p=3. \quad b-a=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + a = 992 \Rightarrow a = 31, -32.$$

$$a=31, \quad b=39, \quad a=-32, \quad b=-24$$

~~Итого из-за условия не подходит м.к. $b > a$.~~

$$2) a-c=-1: \quad b-c=-p^2 \Rightarrow b-a-1=p^2$$

$$\text{Если } b-a \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то } p=3. \quad b-a-1 \equiv 8,$$

$$1000 - a^2 - a = -8, \quad 1008 = a^2 + a \text{ - нет}$$

решений в целых. $b-a \equiv 2 \pmod{3}$ невозможно м.к.

$-p^2$ дает остатки 0 и 2 при дел. на 3.

$$3) a-c=p: \quad b-c=p \Rightarrow a=b!?$$

$$4) a-c=-p: \quad b-c=-p \Rightarrow a=b!?$$

$$5) a-c=p^2 \Rightarrow b-c=1 \Rightarrow a-b+1=p^2 \Rightarrow a-b \equiv 2 \pmod{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3:

$$\text{Пусть } -1 \leq \cos x = t \leq 1.$$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

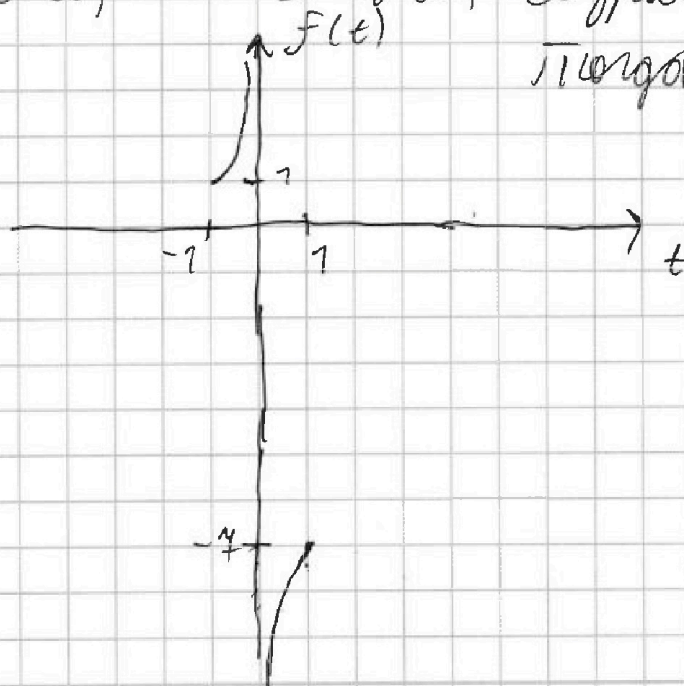
$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad \text{при } p=0: 3t^2 + 3t + 1.$$

$$pt^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p = -\frac{3}{t} - \frac{3}{t^2} - \frac{1}{t^3} = f(t) \quad f'(t) = \frac{3}{t^2} + \frac{6}{t^3} + \frac{3}{t^4} =$$

$$= 3 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^4} \right) = 3 \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^4} \right) = \frac{3(t+1)^2}{t^4} \geq 0$$

$f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ возрастает



тогда решения будут

$$\text{при } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



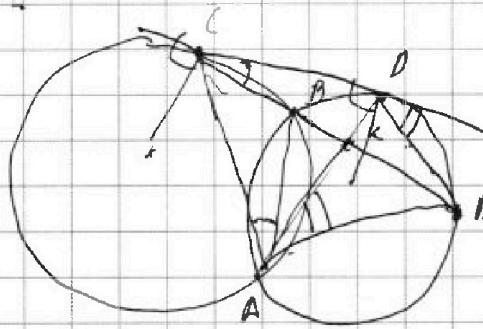
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



$$\begin{aligned}
 & p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x \\
 & 6 \cos 2x + 12 \cos x + 3p \cos x + 10 \\
 & 12 \cos 3x (\cos x + 6 \cos x + \\
 & 3 \cos x (2+p) + 10 \quad 3p \cos x \\
 & \cos 3x (p + 12 \cos x) \quad + 10
 \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 6 \cos x + 6 \cos x + 3p \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + 12 \cos 3x \cos x + 6 \cos x + 3p \cos x + 10$$

$$p (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 (12 \cos^2 x - 6) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$pt^3 - t^3 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$pt^3 - t^3 = (t+1)^3$$

$$p(\cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x -$$

$$p = -30(-3a^2 - a^3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

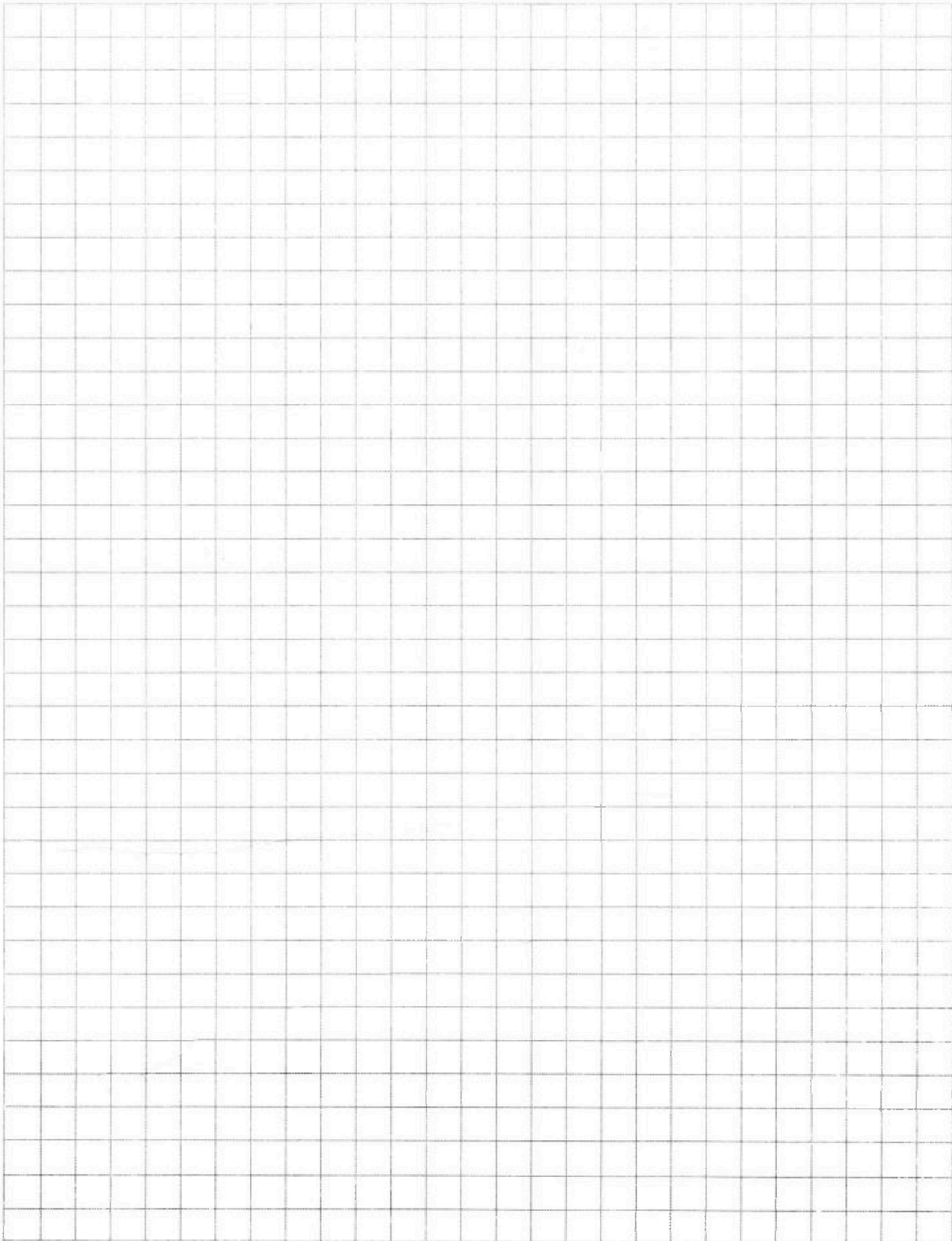
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$-992/37 = -\frac{32}{32} - \frac{3}{2} \quad 18 + 9 \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \frac{3}{2} 3t^2 * 3t + 7 = 0 \quad -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}$$

$$6^2 \cdot 9 = 25 \times 34 \quad 78 \cdot 8 \cdot 4 \quad 800 - 12 \cdot 4 = 752 \quad b = 1000 - a^2 \quad 3t \quad -3t^2 - 3t - 7$$

$$\sqrt{3x+2} \quad 25 - 42 = 20 - 3x - x^2 \quad d - b \quad 1000 \quad -3t^2 - 3t - 7$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2 \sqrt{18-3x-x^2} = 2 \sqrt{(3-x)(6+x)}$$

$$|y+2| + |2y-78| = \sqrt{400-z^2} \quad 20 \leq z \leq 20 \quad \sqrt{125x+21} \quad 78 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{11}{4}$$

$$x^2 - 29x + 40 \quad 78 \quad y = 20 \quad z = 0 \quad 6^2 \cdot 9 = 25 \times 34 \quad (x+6)(3-x) = 18 - 3x - x^2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2 \sqrt{18-3x-x^2} = 2 \sqrt{(3-x)(6+x)}$$

$$a - b + 4 = 2 \sqrt{ab} \quad a - b + 4 = 2 \sqrt{ab} \quad a - b + 4 = 2 \sqrt{ab}$$

$$3 \Rightarrow a - b + 2d + 2b + 1 - 2ab = \sqrt{ab} \quad 3pt + 2t^2 + 2t \quad 224 \cdot 7 + 10 = 0$$

$$a - b + 4 = 2 \sqrt{ab} \quad a^2 + b^2 = 9 \quad p(9t^3 - 9t) +$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2ab - 2 = 0 \quad a^2 + b^2 = 9 \quad + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$9 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1$$

$$\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = -2 \quad 5 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$$

$$\frac{25}{4} = (x+6)(3-x) \quad 3t^2 + 3t + 2 = 0 \quad 3pt^2 + 6t + 3 = \frac{2}{t^2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$60^9 = \sqrt{(25x+24)(3x+2)} \quad 0^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+24)(3x+2)^2}$$

$$60^{12} = 2-x \quad 0^2 = \frac{1}{\sqrt{(25x+24)(3x+2)}}$$

$$60^{17} = \sqrt{\frac{25x+24}{(3x+2)^3}} \quad 0^{26} = \frac{(2-x)^4}{(25x+24)(3x+2)^4}$$

$$0^8 = \frac{1}{(3x+2)^4} \rightarrow \frac{1}{(3x+2)^4} = \frac{(2-x)^8}{(25x+24)(3x+2)^4}$$

$$0^4 = \frac{1}{(3x+2)^2} \rightarrow \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^8}{(25x+24)(3x+2)^4}$$

$$0^{16} = \frac{1}{(3x+2)^4} \rightarrow \frac{1}{(3x+2)^4} = \frac{(2-x)^8}{(25x+24)(3x+2)^4}$$

$$0^7 = \frac{1}{(3x+2)^2} \rightarrow \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^8}{(25x+24)(3x+2)^4}$$

$$447 - 160 = 287$$

$$(3x+2)^2 (25x+24) = (2-x)^2$$

$$4 - 4x + x^2 = 25x + 24$$

$$x^2 - 29x - 20 = 0$$

$$x = -1, 30$$

$$\frac{(25x+24)^4 \cdot (3x+2)^4}{(3x+2)^4} = \frac{1}{(3x+2)^4}$$

$$\frac{(2-x)^2}{25x+24} = \pm 1$$

$$x^2 - 29x - 20 = 0 \quad (x+1)^2$$

$$x_1 + x_2 = 29 \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$$

$$x_1 + x_2 = -27 \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$$

$$3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = \frac{(x^2 + 2x + 1)}{x^4}$$