МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\dfrac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+3\cos 2x+6\cos x=p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3:10$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются** отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть геом прогрессия $\{a_i\}_{i\geq 0}$ такова, что

$a_i = b\cdot q^i$, $b\neq 0$, $q\neq 1$.

По условию,
$$\begin{cases} a_7 = \sqrt{\dfrac{13x-35}{(x+1)^3}} = b\cdot q^7 \\ a_{13} = 5-x = b\cdot q^{13} \\ a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b\cdot q^{15} \end{cases}$$

Имеем $\dfrac{a_{15}}{a_7} = \dfrac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\dfrac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 = q^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\geq 0}{q^2} = \sqrt{|x+1|}$

Имеем $\dfrac{a_{15}}{a_{13}} = \dfrac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} = \dfrac{\sqrt{|13x-35|}\,\sqrt{|x+1|}}{5-x} = q^2 = \sqrt{|x+1|}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{|13x-35|}}{5-x} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13x-35 = (x-5)^2 \quad (1) \\ 13x-35 > 0,\ x+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 35-13x = (x-5)^2 \quad (2) \\ 13x-35 < 0,\ x+1<0 \end{cases} \\ x<5 \end{array}\right.$$

(1): $13x-35 = x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-23x+60=0$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=20 \end{array}\right.$ $\begin{cases} 13x-35>0: \\ \cancel{ОДЗ} \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=3}.$

При $x=3$ $a_i = \dfrac{\sqrt{2}}{64}\cdot(\sqrt{2})^i = (\sqrt{2})^{i-11}$ — подходит

$a_7 = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$

$a_{13} = 2$

$a_{15} = \sqrt{4\cdot 4} = 4$

$\begin{cases} a_7 = \sqrt{2}^{-4} = \frac{1}{4} \\ a_{13} = \sqrt{2}^2 = 2 \\ a_{15} = \sqrt{2}^4 = 4 \end{cases}$

(2): $35-13x = x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5 \end{array}\right.$ ~~под~~

$x=-5$: $\begin{cases} a_7 = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \frac{5}{4} \\ a_{13} = 10 \\ a_{15} = 20 \end{cases}$; $a_k = \dfrac{5\sqrt{2}}{64}\cdot(\sqrt{2})^k$ — подх.

Под $\begin{cases} x<5 \\ 13x-35<0 \\ x+1<0 \end{cases}$ подх. $\underline{\underline{x=-5}}$

Ответ: $x\in\{-5;3\}$.

$t^2 - 7t + 9 = 0 \qquad t = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$0 < \frac{7-\sqrt{13}}{2} < \frac{7+\sqrt{13}}{2} < 7$ — OK.

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

2) $\sqrt{t} = \sqrt{7-t} - 2, \qquad t = 7 - t - 4\sqrt{7-t} + 4$

$4\sqrt{7-t} = 11 - 2t$

$16(7-t) = 121 - 44t + 4t^2$

$4t^2 - 28t + 9 = 0 \qquad t = \frac{7}{2} \pm \sqrt{10}$

$0 < \frac{7}{2} - \sqrt{10} < \frac{7}{2} + \sqrt{10} < 7$ —OK.

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{10} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 12, 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 12, 0\right),$
$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10}, 12, 0\right), \left(\frac{1}{2}+\sqrt{10}, 12, 0\right).$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

Имеем $|y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}\leq 13$.

1) $y>12$; $|y+1|+3|y-12|\geq |y+1|=y+1>13$ — не ок

2) $-1\leq y\leq 12$; $13\geq |y+1|+3|y-12|=y+1+3(12-y)=37-2y\geq$ $37-2\cdot 12=13$ $\Rightarrow$ равенство только при $y=12$.

3) $y<-1$: $13\geq |y+1|+3|y-12|\geq 3|y-12|\geq 3\cdot 13>13$ — не ОК.

Итак, второе (2) равенство выполн. $\Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ z=0 \end{cases}$

Подставим это в первое равенство:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}+5=2\sqrt{12+x-x^2}=2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq 4$. $\quad x+3=t$, $0\leq t\leq 7$.

$$\sqrt{t}-\sqrt{7-t}+5=2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t}-\sqrt{7-t}+(\sqrt{t})^2+(\sqrt{7-t})^2-2=2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t}-\sqrt{7-t}+(\sqrt{t}-\sqrt{7-t})^2=2$$

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{t}-\sqrt{7-t}=1 & (1) \\ \sqrt{t}-\sqrt{7-t}=-2 & (2) \end{array}\right.$$

1) $\sqrt{t}=\sqrt{7-t}+1$, $\quad t=7-t+1+2\sqrt{7-t} \Leftrightarrow t-4=\sqrt{7-t}$

$$(t-4)^2=\sqrt{7-t}^{\,2}$$

$$\begin{cases} t^2-8t+16=7-t \\ 0\leq t\leq 7 \end{cases} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\cos x = t$, $-1 \le t \le 1$.

Тогда $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x =$

$$= (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t$$

$$= 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

Итак, мы исследуем ур-ние $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ при $-1 \le t \le 1$.

Заметим, что $f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \ge 0 \Rightarrow$

f ~~нестрого~~ монотонно возрастает на всей вещ. оси (т.к. производная ~~обнуляется только при $t = -\frac{1}{2}$~~ ≥ 0).

Поэтому она принимает все значения от $f(-1)$ до $f(1)$ при $-1 \le t \le 1$ (из непрерывности) ровно по одному разу. Итак, подойдут знач. $-4 \le p \le 10$.

$f(-1) = -4$

$f(1) = 10$

Заметим, что ~~$f(t) = (2t+1)^3 \cdot \frac{1}{2}$~~

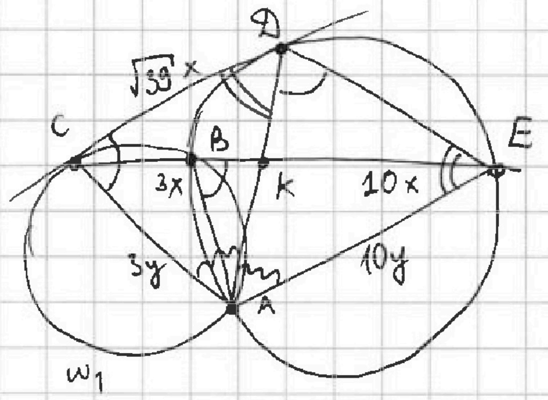
$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (2t+1)^3 - \frac{7}{2}$$

Поэтому $f(t) = p \Leftrightarrow (2t+1)^3 = 2p + 7 \Leftrightarrow$

$t = \dfrac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$. Осталось решить ур-ние $\cos x = t$:

$x = \arccos(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $-4 \le p \le 10$, $x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



$AD \cap CE = K$

$CK = 3x$, $EK = 10x$.

По т. о хорде и касательной, и о впис. угле,

$\angle DCA = \pi - \angle ABC = \angle ABE$

$= \angle ADE$;

$\angle CDA = \angle DEA$. $\Rightarrow$

$\Delta ACD \sim \Delta ADE \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK$ - бис. ΔCAE (*)

По т. о произв. секущих $CD^2 = CB \cdot CE = 3x \cdot 13x$

$\Rightarrow CD = \sqrt{39}\, x$

(*): по св. бис. $\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AC = 3y$, $AE = 10y$

Из подобия ΔACD и ΔADE $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = \sqrt{30} \cdot y$

Из этого же подобия $\frac{CD}{AD} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} =$

$= \frac{10y}{\sqrt{30}\,y} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть A, B, C — мн-ва конф. 8 клеток, обладающих первым, вторым и третьим свойством соотв. (симм. отн. центра, отн. ~~ср. линии // 250~~, отн. ср. линии // 200).

Мы хотим найти $|A \cup B \cup C|$.

По ф-ле включений-исключений,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Обозначим для краткости $250 = n$, $200 = m$.

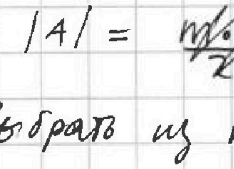
Посчитаем каждое слагаемое по-отдельности

1) $|A| = C^4_{\frac{mn}{2}}$ (т.к. достаточно выбрать из нижней половины пр-ка 4 разных кл. и симм. отразить их отн. центра)

2) $|B| = C^4_{\frac{mn}{2}}$ — выбираем из нижней половины 4 разных клетки и отр. их отн. ср. линии

3) $|C| = C^4_{\frac{mn}{2}}$ — выбираем из левой половины 4 разных кл. и отр. их отн. ср. линии

4) $|A \cap B| = C^2_{\frac{mn}{4}}$. 8 клеток бьются на 2 пр-ка с центром в центре пр-ка $m \times n$, ровно 2 разл. клетки лежат в левом нижнем пр-ке, ост. получаются симметрией

n

m

5) Аналогично 4), $|A \cap C| = C^2_{\frac{mn}{4}}$

6) Заметим, что мн-во клеток, облад. симметриями отн. средних линий, центрально симметрично. Поэтому ~~КВВС~~ $A \cap B = B \cap C = A \cap C \Rightarrow$

$$|B \cap C| = C^2_{\frac{mn}{4}}$$

7) $|A \cap B \cap C| = |B \cap C| = C^2_{\frac{mn}{4}}$, т.к. $A \cap B = B \cap C$.

Итого, $|A \cup B \cup C| = 3C^4_{\frac{mn}{2}} - 2C^2_{\frac{mn}{4}} = 3C^4_{25000} - 2C^2_{12500}$

Ответ: $3 \cdot C^4_{25000} - 2 \cdot C^2_{12500}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(a-c)\cdot(b-c)=p^2$ (p – простое).

Заметим, что $a-c > b-c$, поэтому

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

(т.к. p^2 имеет делители ±1, $\pm p$, $\pm p^2$, и $a-c\neq\pm p$, иначе $b-c=\pm p$ и $a=b$).

Отметим, что в обоих случаях

$a-b=(a-c)-(b-c)=p^2-1$.

По условию, $a-b=p^2-1$ не кратно 3.

Но это означает, что $p\equiv_3 0$ (т.к. $1^2\equiv_3 1$ и $2^2\equiv_3 1$)

$\Rightarrow p=3$.

Итак, имеем $a-b=p^2-1=8$

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ c=b-1 \\ 2)\ c=b+9 \end{array}\right.$$

По условию, $a+b^2=560 \Leftrightarrow b+8+b^2=560$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=23,\ a=31 \\ b=-24,\ a=-16 \end{array}\right.$$

1) $\left[\begin{array}{l} a=31,\ b=23,\ c=22 \\ a=-16,\ b=-24,\ c=-25 \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} a=31,\ b=23,\ c=32 \\ a=-16,\ b=-24,\ c=-15 \end{array}\right.$

Ответ: $(31,23,22)$, $(-16,-24,-25)$, $(31,23,32)$, $(-16,-24,-15)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S_{BCC_1B_1} = BC \cdot dist(B_1, BC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{y+\sqrt{3}y}{4}+1-x-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}+1\right)-y\right)^2+h^2} = 4.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} y^2+h^2=16 \quad (1) \\ \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-x\right)^2+\left(\sqrt{3}\,\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-y\right)^2+h^2=9 \quad (2) \\ \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-x\right)^2+\left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}+1\right)-y\right)^2+h^2=16 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3)-(2): \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}+1\right)-y\right)^2-\left(\sqrt{3}\,\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-y\right)^2=7$$

$$\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}\right)+1\right)-y+\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}\right)-y\Big)=7$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+3=7$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=4, \quad x=\frac{8+\sqrt{3}y}{3}$$

$$(2)-(1): \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-x\right)^2+\left(\sqrt{3}\,\frac{x+\sqrt{3}y}{4}-y\right)^2-y^2=-7$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}y-3\cdot\frac{8+\sqrt{3}y}{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{8+\sqrt{3}y}{3}-y}{4}\right)^2-y^2=-7$$

$$2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-y^2=-7$$

$$h^2=16-y^2=16-\left(2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+7\right)=$$

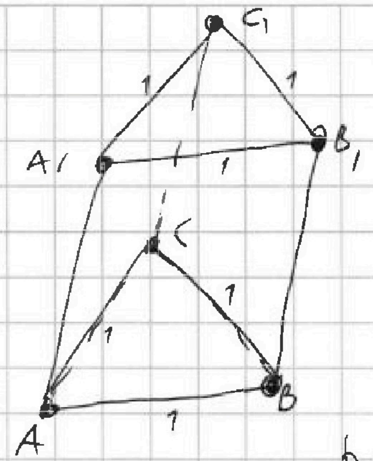
$$16-4-\frac{4}{3}-7=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}, \quad h=\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — исходная призма.

БОО $S_{ABB_1A_1} = S_{BCC_1B_1} = 4$,

$S_{ACC_1A_1} = 3$.

Пусть h — высота призмы.

Введём декартову СК с центром A,

$OX = AB$, $OZ \perp (ABC)$, $OY \in (ABC)$ и $\perp AB$.

Имеем

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, а также

$\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1} = (x, y, h) \Rightarrow$

$A_1(x, y, h)$, $B_1(x+1, y, h)$, $C_1\left(\frac{1}{2}+x, \frac{\sqrt{3}}{2}+y, h\right)$.

$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot dist(A_1, AB) = 1 \cdot \sqrt{y^2+h^2} = 4$

$S_{ACC_1A_1} = AC \cdot dist(A_1, AC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 + h^2} = 3$

A_1P — высота на AC

$P(a, \sqrt{3}a, 0)$

$0 = \langle AC, A_1P \rangle =$

$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (a-x, \sqrt{3}a-y, -h) \right\rangle =$

$= \frac{1}{2}\left(a - x + \sqrt{3}(\sqrt{3}a - y)\right) =$

$= \frac{1}{2}(4a - x - \sqrt{3}y)$

$a = \frac{x+\sqrt{3}y}{4}$

B_1Q — высота на BC

$Q(b, \sqrt{3}-\sqrt{3}b, 0)$

$0 = \langle BC, B_1Q \rangle =$

$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (b-x-1, \sqrt{3}-\sqrt{3}b-y, -h) \right\rangle$

$= \frac{1}{2}\left((b-x-1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}b-y)\right)$

$= \frac{1}{2}(4b - x - \sqrt{3}y - 4)$

$b = \frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1$