



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = (25x-9)(x-6); \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

~~Так как $b_7 \neq 0$, т.к. или $b_7 = 0$, или $q = 0$, то применим опрег. Лопиталя~~

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

Заметим, что $\frac{b_9}{b_7} = q^2$; $\frac{b_{15}}{b_7} = q^6$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{25x-9}{|x-6|(x+3)^2} \end{cases}$$

т.к. $q \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{Уса: } x \in [-3; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Заметим, что в заданных уса $\frac{25x-9}{x-6} > 0 \Rightarrow q^4 = \frac{25x-9}{(x-6)(x+3)^2}$

Также $q^2 \cdot q^6 = q^8 \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3)\sqrt{25x-9}}{(x+3)\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|x-6|}$

Тогда $\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{|x-6|}$

Ⓡ $x \in [-3; \frac{9}{25}]$

$$\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{x-6} \Rightarrow (x+3)^2 = 9 - 25x \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$$

$$\begin{aligned} x(x+3) &= 0 \\ x_1 &= -3 \quad \text{— не подходит по уса} \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Проверим $x=0$ При нем $b_7 = 3\sqrt{6}$; $b_9 = 3$; $b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ и сумма $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ — не подходит

$\Rightarrow x=0$ — ответ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II) $x \in (6; +\infty)$

$$\frac{25x-9}{(x-9)(x+9)} - \frac{1}{x-6}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$D = 289$$

$$x_1 = \frac{19-17}{2} = 1 \text{ - не подходит по условию}$$

$$x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$$

Проверка $x=18$: $b_7 = 42\sqrt{3}$; $b_9 = 21$; $b_{15} = \frac{7\sqrt{3}}{21} \Rightarrow$ суц. $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ при том. Это решение

\Rightarrow 200м прир. суц. $\rightarrow x=18$ - ответ.

Ответ: $\{0, 18\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

Исследуем (2) равенство. Пусть $f(y) = |y+4| + 4|y-5|$; $g(z) = \sqrt{81-z^2}$.

Найдём область значений $f(y)$. Раскроем модуль во сносках:

(I) $y \leq -4 \Rightarrow f(y) = -y-4 - 4y+20 = -5y+16$ — монотонно убывающая функция \rightarrow мин значение \leftarrow на $y = -4$; $f(-4) = 36$. Т.е. при $y \leq -4$: $f(y) \geq 36$.

(II) $y \in [-4; 5]$. $f(y) = y+4 - 4y+20 = -3y+24$ — монотонно убывающая функция \rightarrow мин значение при $y = 5$; $f(5) = 9 \Rightarrow$ при $y \in [-4; 5]$: $f(y) \geq 9$.

(III) $y \in [5; +\infty)$. $f(y) = y+4 + 4y+20 = 5y+24$ — монотонно возрастающая функция \rightarrow мин значение при $y = 5$; \Rightarrow при $y \in [5; +\infty)$: $f(y) \geq 9$.

Из всех случаев следует, что $f(y) \geq 9$.

Теперь найдём область значений $g(z)$.

$g(z) = \sqrt{81-z^2}$. Так $81-z^2 \geq 0 \Rightarrow z \in [-9; 9]$. Заметим, что $g(x)$ — чётная.

Поэтому рассмотрим только интервал $z \in [0; 9]$. При $z \uparrow$ на этом интервале значение функции строго убывает \rightarrow max в точке $z = 0 \Rightarrow \max g(z) = 9 \Rightarrow$

$$\rightarrow g(z) \leq 9.$$

При этом $f(y) = g(z)$. Это возможно только если $f(y) = g(z) = 9$.

Во время анализа функций мы выяснили, что $f(y) = 9$ только при $y = 5$; $g(z) = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только при $z=0 \rightarrow y=5; z=0$

Теперь рассмотрим $\textcircled{1}$; подставим сразу значения y и z :

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + y = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\text{Усл: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ 5-4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-5, 1]$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - y$$

Выведем обе части в квадрат.

$$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$4(5-4x-x^2) - 14\sqrt{5-4x-x^2} + 10 = 0$$

$$t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-4x-x^2} = 1 \\ \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-4x-x^2 = 1 \\ 5-4x-x^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x-4=0 \\ x^2+4x+\frac{15}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = -\sqrt{11}-4 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

С учетом усл:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\sqrt{11}-4; 5; 0); (2\sqrt{2}-2; 5; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$t = \cos x, t \in [-1; 1]$$

$$pt^3 = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$$

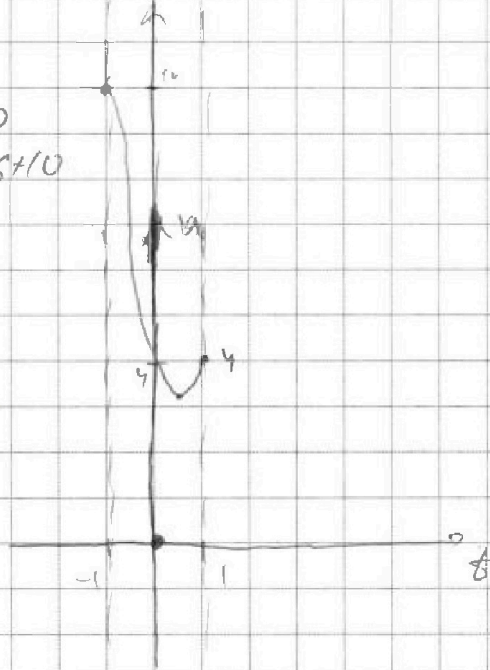
$$u = 3t^2 - 3t + 4$$

$$u = pt^3$$

$u = 3t^2 - 3t + 4$ - парабола; вершина слева;

Вершины $(\frac{1}{2}; \frac{19}{4})$. При $t = -1; u = 10$;

При $t = 1 \Rightarrow u = 7$



$u = pt^3$. При $p = 0; u = 0$, но $3t^2 - 3t + 4 \neq 0$ при $t \in [-1; 1]$.

$\Rightarrow p = 0$ - не реш.

При $p \neq 0; u = pt^3$ - возрастающая функция; пересечем через $(0,0)$

Ⓐ $p > 0 \Rightarrow$ пересечем через точки $(-1; p)$ и $(1; p)$. При $t < 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$ не пересек.

параболу. Может быть пересек параболу при $p > 0$. Т.е. pt^3 равен максимуму $3t^2 - 3t + 4$, но

если $pt^3 \leq 4$, то $p \leq 4$, но решений нет. При $p > 4$ - решение есть. Иногда t

Ⓑ $p < 0$ тоже при $t > 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$ не пересек параболу. Аналогично I. если pt^3 равно

реш. при $p \leq -10$

$p \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$ При этих значениях p есть хотя бы 1 $t \Rightarrow \infty$ решений для x .

Ответ: $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

Для начала заметим, что ввиду того, что для каждой точки должны быть симметричные, относительно xy оси из объектов, то в каждом из 3 случаев все клетки разбиваются на пары единственным образом, причем обе клетки пары должны быть в раскраске, что не было. Т.е. в каждом случае мы выбираем набор из 4 пар. Всего клеток 40000, всего пар 20000 \rightarrow это количество вариантов. $C_{20000}^4 = \frac{20000!}{19996! \cdot 4!}$. Т.к. случаев 3, то всего вариантов $\frac{3 \cdot 20000!}{19996! \cdot 4!}$.

Теперь найдем, какие раскраски возможны. Также, в которых раскраска симметрична относительно xy оси для 2 элементов. Заметим, что если ось симметрии описательно xy , то ось симметрии и описательно z . То есть все такие случаи рассмотреть 3 раза: Найдем, как выглядят такие случаи. Отметим любую точку и все 3 ее симметричные. Заметим, что такая четверка точек единственна для каждой из этих 4 точек и выглядит как вершина тетраэдра. Тогда в этих случаях все клетки единственным образом разбиваются на четверки, и нам надо выбрать 2 из них. Т.е. $C_{10000}^2 = \frac{10000!}{9998! \cdot 2!}$. Заметим, что каждая такая раскраска однозначно была посчитана 3 раза \Rightarrow надо вычитать их дважды \Rightarrow
 \Rightarrow Ответ $\frac{3 \cdot 20000!}{19996! \cdot 4!} - \frac{2 \cdot 10000!}{9998! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 20000!}{4! \cdot 19996!} - \frac{10000!}{9998!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Т.к. $(a-c)/(b-c) = p^2$, при этом $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ч.р.н. все три числа чет. $(a-c) \mid (b-c)$

I $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases}$. По урн: $(b-a) \div 3 \Rightarrow p^2+a-1-a = (p^2-1) \div 3$. Если $p \equiv 1 \pmod{3}$

$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2-1) \div 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3}$, т.к. p - простое $\Rightarrow p=3$.

$\Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases}$. По урн $a^2+b=710 \Rightarrow a^2+a+2=710 \Rightarrow a^2+a-708=0$
 $\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_2 = 26 \end{cases}$

Пока: $a_1 = -27; b_1 = -19; c_1 = -28$ - все урн. Ответ: это тройка - четки.

$a_2 = 26; b_2 = 34; c_2 = 25$ - все урн. Ответ: \Rightarrow это четки.

II $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = -1+p^2$, при этом $\min p=2 \Rightarrow p^2-1 > 0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b$, т.к. простое урн.

III $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b-1 \\ a=b+1+p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2+1 \Rightarrow a > b$ - простое

IV $\begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ a=b-1-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ b=a+p^2+1 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2+1$. Аналогично п. I \Rightarrow

$\Rightarrow p=3 \Rightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ c=a+4 \end{cases} \Rightarrow a^2+a+2=710 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -27 & b_3 = -19, c_3 = -18 \\ a_4 = 26 & b_4 = 34, c_4 = 35 \end{cases}$ - обе тройки нечетки

V $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b$ - простое.

VI $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b$ - простое.

Иных случаев нет \Rightarrow

Ответ: $\{(-27, -19, -28), (26, 34, 25), (-27, -19, -18), (26, 34, 35)\}$.

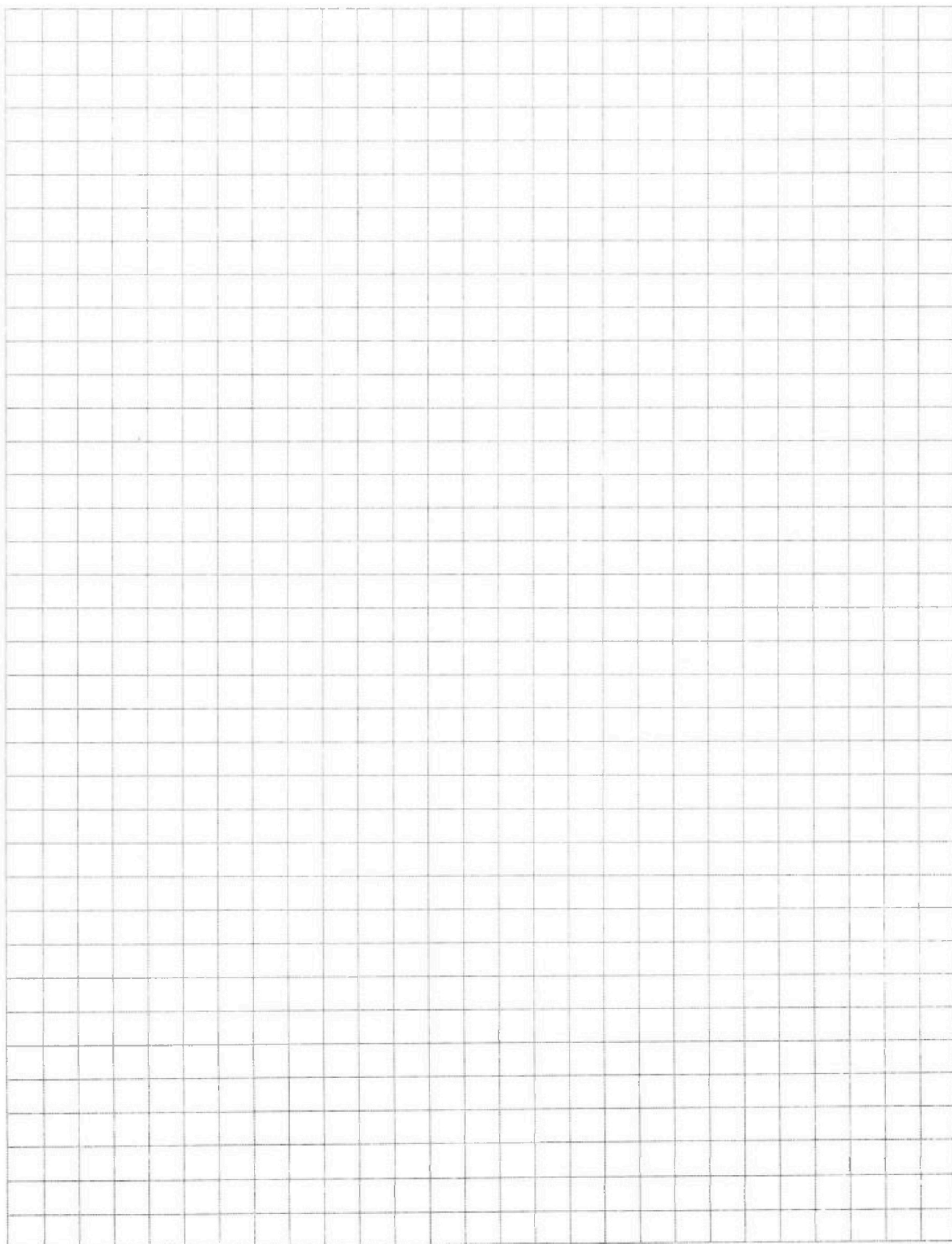


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



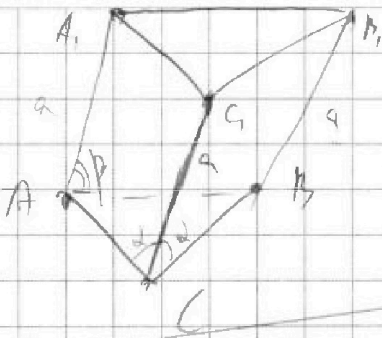


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta ABC - \text{плем}$
 $S_{ABC} = 1$

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$3 + 4 + 5 + 5 + 7 + 0 = 31$$

$$3 + 4 = 3 + 2 = 17$$

$$x^2 + y^2 - 2R_1y + R_1^2 = R_1^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2R_2y + R_2^2 = R_2^2$$

$$-2R_1y + 2ax - a^2 + 2R_2y = 0$$

$$2ax = 2(R_1 - R_2)y + a^2$$

$$x = \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2}$$

$$\left(\frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - 2R_1y = 0$$

$$R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2 + \frac{2(R_1 - R_2)y + a^2}{a^2}y^2 - 2R_1y = 0$$

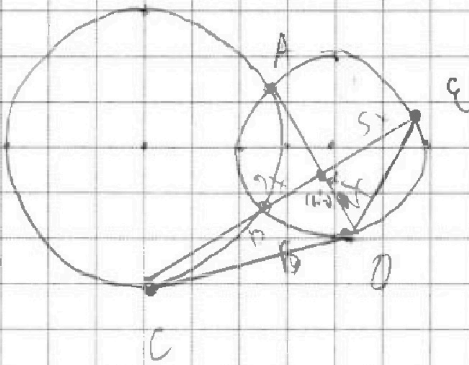
$$\frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}y^2 - (R_1 + R_2)y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$D = (R_1 + R_2)^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2} =$$

$$= R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 - 2R_1R_2 - R_2^2 - a^2 =$$

$$= 4R_1R_2 - a^2$$

$$y_1 = \frac{R_1 + R_2 - \sqrt{4R_1R_2 - a^2}}{2 \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}}$$



$$\frac{EO}{CO} = ?$$

$$\frac{S_{COA}}{S_{OAE}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = CO^2$$

$$25x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = OE^2$$

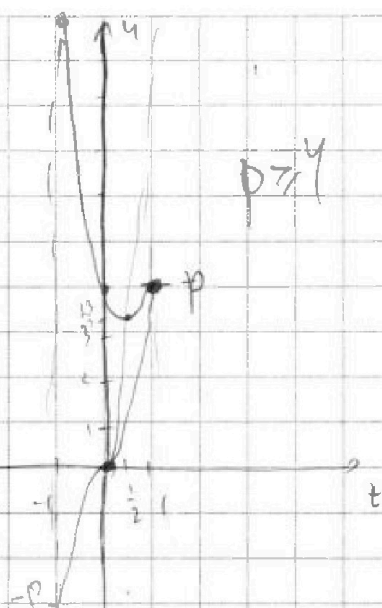


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t^3 - \frac{3}{p}t^2 + 3t - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t}{p^3} - \frac{3 \cdot 6}{p^3} + \frac{3 \cdot 4}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t - 18}{p^3} + \frac{12}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$16 + 12p - 4p^2 = 0$$

$$p^2 - 3p + 4 = 0$$

$\frac{4}{p}$ - корень?

$$p = 4 \Rightarrow [1; 4]$$

$$p = 5$$

$$st^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\frac{EO}{CO} = ?$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{AB}{R_1}$$

$$\frac{AB}{2} = R_1 \sin \alpha$$

$$AB = 2R_1 \sin \alpha$$

$$AB = 2R_2 \sin \beta$$

$$O_1 O_2 = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta$$

$$CO^2 = R_1^2 \cos^2 \alpha + R_2^2 \cos^2 \beta - 2R_1 R_2 \cos \alpha \cos \beta - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1 R_2 = 2R_1 R_2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta$$

$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta$$

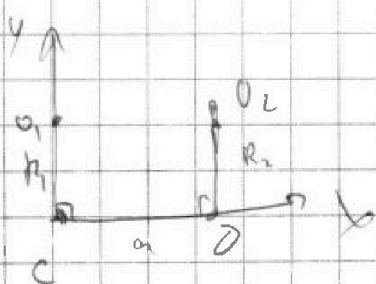
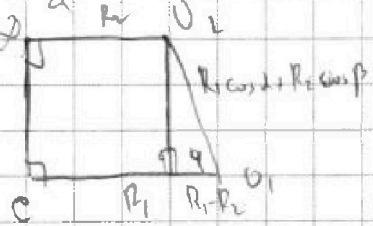
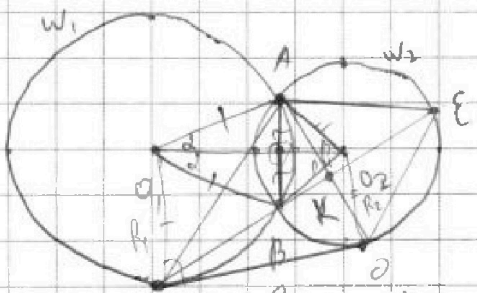
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 = kR_2$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$



$$(O_1(0; R_1)) \text{ или } R = R_1 \text{ центр } (O_1/R_1)$$

$$O_1(0; R_1) \rightarrow x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2$$

$$O_2(a; R_2) \rightarrow (x - a)^2 + (y - R_2)^2 = R_2^2$$

$$R_1 A = R_2 B$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a, p, c \in \mathbb{Z} \\ a \neq b \\ b-a \mid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \\ a^2 + b = 710 \end{cases}$$

I $a-c=1$
 $b-c=p^2$

II $c=a-1$
 $b-a+p^2 = b = p^2+a-1$

III $a-c=-1$
 $b-c=-p^2$

$a < p^2+a-1$

$p^2-1 > 0$ ✓

IV $b-c=1$
 $a-c=p^2$

$b-a = (p^2-1) \mid 3$

h	h^2
0	0
1	1
2	4

V $b-c=-1$
 $a-c=-p^2$

$p^2 \mid 3$
 $p=3$

VI $a-c=p$
 $b-c=p$

VII $a-c=-p$
 $b-c=-p$

$a^2 + b = 710$

$a^2 + a + 9 = 710$

$a^2 + a - 701 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$

$\sqrt{D} = 53$

$a_1 = \frac{-1-53}{2} = -27$

$a_2 = \frac{-1+53}{2} = 26$

$b = a + 8$
 $c = a - 1$

$2809 = 53^2$

$5050 = 7500$

2809

$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$

$p=?$ Сложим

$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^3 x + 6 + 10$

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$

$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$

$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) =$

$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$

$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^3 x + 16$

$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^3 x + 4$

$p \cos^3 x = 3 \cos^3 x - 3 \cos x + 4$

$t = \cos x, t \in [-1; 1]$

$pt^3 = 3t^3 - 3t + 4$

$u = pt^3 \rightarrow f(t)$

$u = 3t^3 - 3t + 4$ - корни тем $g(t)$

$0 = 9$ берем $t_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

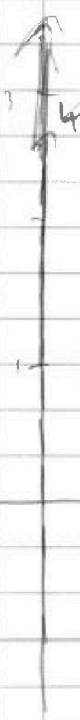
$u_0 = 3 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{3}{8} - \frac{12}{8} + \frac{32}{8} = \frac{23}{8}$

$g(-1) = 3 + 3 + 4 = 10$

$g(1) = 3 - 3 + 4 = 4$

$f(t) = pt^3$
 $(-1; p)$
 $(1; p)$

$pt^3 - 3t^3 + 3t - 4 = 0$
 $p=7, t=1$ (✓)
 $p=-10, t=-1$
 $-10t^3 = 3t^3 - 3t + 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV) $y \geq 5$ $t = y + 1 + y - 20 = 5y - 16$ - вып. фн

$\min t$ $\Leftrightarrow y = 5$
 $\min t = 9$

а т.к. $0 \leq t \leq 9$

$y = 5; z = 0$

Усл. $x \geq 5$
 $x \leq 1$

$-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

$x^2 + 4x - 5 \leq 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$

$x \in [-5; 1]$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 1$

$x+5 + 1-x + 16 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$

$1\sqrt{5-4x-x^2} + 6 = 4(5-4x-x^2) + 16$
 $t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$

$4t^2 - 14t + 10 = 0$

$2t^2 - 7t + 5 = 0$

$D = 49 - 40 = 9$

$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$

$t_2 = \frac{7+3}{4} = 2.5$

$\sqrt{5-4x-x^2} = 4$

$5-4x-x^2 = 16$

$x^2 + 4x + 11 = 0$

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 16 + 16 = 32$

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2-2\sqrt{2}$

$x_2 = 2\sqrt{2}-2$

$4x^2 + 16x + 15 = 0$

$D = 256 - 240 = 16$

$x_1 = \frac{-16-4\sqrt{1}}{4} = -\sqrt{1}-4$

$x_2 = \sqrt{1}-4$

Всего вариантов

Старые карты: 100. Число = 40000

Все разобраны на карты; берём 7 карт;

где для кажд. из 3 карт: $\frac{40000!}{40000!} = 10000$

$\frac{40000!}{40000!} = 10000$

Вар. вып. 2, 4, 10000



сумма чисел
всего

$\frac{40000!}{40000!} = 1$

$\frac{40000!}{39996!} = 7!$

$\frac{40000!}{40000!} = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$q^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \Rightarrow v_{15} = q^4 \cdot v_3 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot 3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \checkmark$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad x = 0 \quad \checkmark$$

$$3) X=18 \Rightarrow v_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{2 \cdot 19} = 12\sqrt{2}$$

$$v_9 = 21$$

$$v_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 7}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\Rightarrow q = \frac{21}{12\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$q^4 = \frac{1}{8}$$

$$q^6 = \frac{1}{16\sqrt{2}}$$

$$v_{15} = v_9 q^6 = \frac{21}{16\sqrt{2}} \quad \otimes$$

$$\sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{3 \cdot 49} = 12\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{7}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$q^2 = \frac{21}{12\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$q^4 = \frac{1}{12} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{24\sqrt{3}}$$

$$v_{15} = 21 \cdot \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-y^2} + 4 = 2\sqrt{y-yx-x^2+2}$$

$$|y+1| + |y-5| = \sqrt{31-z^2}$$

$$0 \leq \sqrt{31-z^2} \leq 9$$

$$t = |y+1| + |y-5|$$

$$\textcircled{I} y = -4$$

$$t = -y - 4 - y + 20 =$$

$$(5y+16), \text{ ydnl}$$

$$y = -4 \Rightarrow \text{yadnl} \text{ min } y = -4$$

$$\textcircled{II} y \in [-4, 5] \Rightarrow t = y+4 - y+20 = 24 \text{ ydnl } \text{ funktsiya} \sim \text{min } v_{15} = 5 \Rightarrow \text{min} = 9$$