



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$ , девятый член равен  $x+3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = (25x-9)(x-6); \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

~~Так как  $b_7 \neq 0$ ,  $b_9 \neq 0$ ,  $b_{15} \neq 0$ , то применим правило знаков~~

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

Заметим, что  $\frac{b_9}{b_7} = q^2$ ;  $\frac{b_{15}}{b_9} = q^6$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{25x-9}{|x-6|(x+3)^2} \end{cases}$$

П.к.  $q \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{Уса: } x \in [-3; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Заметим, что в заданных уса  $\frac{25x-9}{x-6} > 0 \Rightarrow q^4 = \frac{25x-9}{(x-6)(x+3)^2}$

Также  $q^2 \cdot q^6 = q^8 \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3)\sqrt{25x-9}}{(x+3)\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|x-6|}$

Тогда  $\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{|x-6|}$

Ⓛ  $x \in [-3; \frac{9}{25}]$

$$\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{x-6} \Rightarrow (x+3)^2 = 9 - 25x \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$$

$$\begin{aligned} x(x+3) &= 0 \\ x_1 &= -3 \quad \text{— не подходит из-за уса} \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Проверим  $x=0$  При нем  $b_7 = 3\sqrt{6}$ ;  $b_9 = 3$ ;  $b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{6}$  и сумма  $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$  — не подходит

$\Rightarrow x=0$  — решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II)  $x \in (6; +\infty)$

$$\frac{25x-9}{(x-9)(x+9)} - \frac{1}{x-6}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$D = 289$$

$$x_1 = \frac{19-17}{2} = 1 \text{ - не подходит по условию}$$

$$x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$$

Проверка  $x=18$ :  $b_7 = 42\sqrt{3}$ ;  $b_9 = 21$ ;  $b_{15} = \frac{7\sqrt{3}}{21} \Rightarrow$  суц.  $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$  при том. Это решение

$\Rightarrow$  200м прир. суц  $\rightarrow x=18$  - ответ.

Ответ:  $\{0, 18\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2)$$

Уберем (2) равенство. Пусть  $f(y) = |y+4| + 4|y-5|$ ;  $g(z) = \sqrt{81-z^2}$ .

Найдем область значений  $f(y)$ . Раскроем модуль во сносках:

(I)  $y \leq -4 \Rightarrow f(y) = -y-4 - 4y+20 = -5y+16$  — монотонно убывающая функция  $\rightarrow$  мин значение  $\leftarrow$  при  $y = -4$ ;  $f(-4) = 36$ . Т.е. при  $y \leq -4$ :  $f(y) \geq 36$ .

(II)  $y \in [-4; 5]$ .  $f(y) = y+4 - 4y+20 = -3y+24$  — монотонно убывающая функция  $\rightarrow$  мин значение при  $y = 5$ ;  $f(5) = 9 \Rightarrow$  при  $y \in [-4; 5]$ :  $f(y) \geq 9$ .

(III)  $y \in [5; +\infty)$ .  $f(y) = y+4 + 4y+20 = 5y+24$  — монотонно возрастающая функция  $\rightarrow$  мин значение при  $y = 5$ ;  $f(5) = 49 \Rightarrow$  при  $y \in [5; +\infty)$ :  $f(y) \geq 49$ .

Из всех случаев следует, что  $f(y) \geq 9$ .

Теперь найдем область значений  $g(z)$ .

$g(z) = \sqrt{81-z^2}$ . Так  $81-z^2 \geq 0 \Rightarrow z \in [-9; 9]$ . Заметим, что  $g(x)$  — четная.

Поэтому рассмотрим только интервал  $z \in [0; 9]$ . При  $z \uparrow$  на этом интервале значение функции строго убывает  $\rightarrow$  max в точке  $z = 0 \Rightarrow \max g(z) = 9 \rightarrow$

$$\rightarrow g(z) \leq 9.$$

При этом  $f(y) = g(z)$ . Это возможно только если  $f(y) = g(z) = 9$ .

Во время анализа функций мы выяснили, что  $f(y) = 9$  только при  $y = 5$ ;  $g(z) = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только при  $z=0 \rightarrow y=5, z=0$

Теперь рассмотрим  $\textcircled{1}$ ; подставим сразу значения  $y$  и  $z$ :

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + y = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\text{Усл: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ 5-4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-5, 1]$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - y$$

Выведем обе части в квадрат.

$$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$4(5-4x-x^2) - 14\sqrt{5-4x-x^2} + 10 = 0$$

$$t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-4x-x^2} = 1 \\ \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-4x-x^2 = 1 \\ 5-4x-x^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x-4=0 \\ x^2+4x+\frac{5}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = -\sqrt{11}-4 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

С учетом усл:  $\left. \begin{array}{l} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{array} \right\}$

Ответ:  $\{(-2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\sqrt{11}-4; 5; 0); (2\sqrt{2}-2; 5; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos 3x + 3(p+1) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+1) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$t = \cos x, t \in [-1; 1]$$

$$pt^3 = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$$

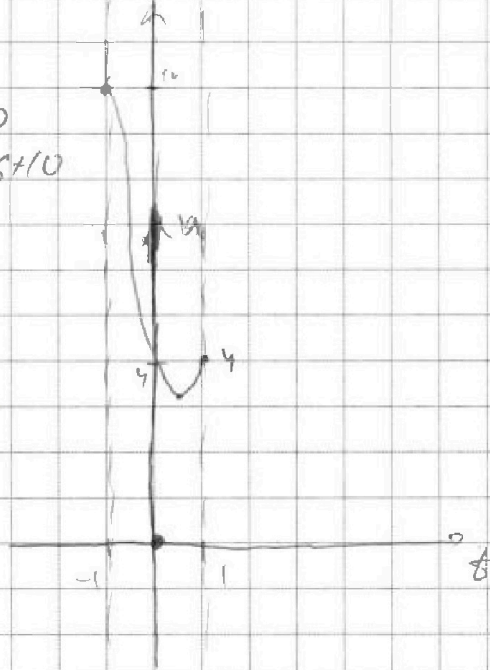
$$u = 3t^2 - 3t + 4$$

$$u = pt^3$$

$u = 3t^2 - 3t + 4$  - парабола; вершина слева;

Вершины  $(\frac{1}{2}; \frac{17}{4})$ . При  $t = -1; u = 10$ ;

При  $t = 1 \Rightarrow u = 7$



$u = pt^3$ . При  $p = 0; u = 0$ , но  $3t^2 - 3t + 4 \neq 0$  при  $t \in [-1; 1]$ .

$\Rightarrow p = 0$  - не реш.

При  $p \neq 0; u = pt^3$  - возрастающая функция; пересечем через  $(0,0)$

Ⓐ  $p > 0 \Rightarrow$  пересечем через точки  $(-1; p)$  и  $(1; p)$ . При  $t < 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$  не пересек.

параболу. Может быть пересек параболу при  $p > 0$ . Т.е.  $pt^3$  равен максимуму  $3t^2 - 3t + 4$ , но

если  $pt^3 \leq 4$ , то  $p \leq 4$ , но решений нет. При  $p > 4$  - решение есть. Иногда  $t$

Ⓑ  $p < 0$  тоже при  $t > 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$  не пересек параболу. Аналогично I. если  $pt^3$  равно

реш. при  $p \leq -10$

$p \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$  При этих значениях  $p$  есть хотя бы 1  $t \Rightarrow \infty$  решений для  $x$ .

Ответ:  $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

Для начала заметим, что ввиду того, что для каждой точки должны быть симметричные, относительно  $xy$  оси из объектов, то в каждом из 3 случаев все клетки разбиваются на пары единственным образом, причем обе клетки пары должны быть в раскраске, что не было. Т.е. в каждом случае мы выбираем набор из 4 пар. Всего клеток 40000, всего пар 20000  $\rightarrow$  это количество вариантов.  $C_{20000}^4 = \frac{20000!}{19996!4!}$ . Т.к. случаев 3, то всего вариантов  $\frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!}$ .

Теперь найдем, какие раскраски возможны несколько раз. Также, в которых раскраска симметрична относительно  $xy$  оси для 2 элементов. Заметим, что если ось симметрии описательно  $xy$ , то она симметрична и относительно  $z$ . То есть все такие случаи почитаем 3 раза: Найдем, как выглядят такие случаи. Отметим любую точку и все 3 ее симметричные. Заметим, что такая четверка точек единственна для каждой из этих 4 точек и выглядит как вершина тетраэдра. Тогда в этих случаях все клетки единственным образом разбиваются на четверки, и нам надо выбрать 2 из них. Т.е.  $C_{10000}^2 = \frac{10000!}{9998!2!}$ . Заметим, что каждая такая раскраска однозначно была посчитана 3 раза  $\Rightarrow$  надо вычитать их дважды  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Ответ  $\frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!} - \frac{2 \cdot 10000!}{9998!2!} = \frac{3 \cdot 20000!}{4! \cdot 19996!} - \frac{10000!}{9998!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Т.к.  $(a-c)/(b-c) = p^2$ , при этом  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , ч.р.н. все три числа чет.  $(a-c) \mid (b-c)$

I  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases}$ . По урн:  $(b-a) \div 3 \Rightarrow p^2+a-1-a = (p^2-1) \div 3$ . Если  $p \equiv 1 \pmod{3}$

$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2-1) \div 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , т.к.  $p$  - простое  $\Rightarrow p=3$ .

$\Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a \end{cases}$ . По урн  $a^2+b=710 \Rightarrow a^2+a+1=710 \Rightarrow a^2+a-709=0$   
 $\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_2 = 26 \end{cases}$

Поиск:  $a_1 = -27; b_1 = -19; c_1 = -28$  - все урн. Ответ: это тройка - четки.

$a_2 = 26; b_2 = 34; c_2 = 25$  - все урн. Ответ:  $\Rightarrow$  это четки.

II  $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = -1+p^2$ , при этом мин  $p=2 \Rightarrow p^2-1 > 0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b$ , т.к. простое урн.

III  $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b-1 \\ a=b+1+p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2+1 \Rightarrow a > b$  - простое

IV  $\begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ a=b-1-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ b=a+p^2+1 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2+1$ . Аналогично п. I  $\Rightarrow$

$\Rightarrow p=3 \Rightarrow \begin{cases} b=a+8 \\ c=a+9 \end{cases} \Rightarrow a^2+a+8=710 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -27 & b_3 = -19, c_3 = -18 \\ a_4 = 26 & b_4 = 34, c_4 = 35 \end{cases}$  - обе тройки нечетки

V  $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b$  - простое.

VI  $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b$  - простое.

Иных случаев нет  $\Rightarrow$

Ответ:  $\{(-27, -19, -28), (26, 34, 25), (-27, -19, -18), (26, 34, 35)\}$ .



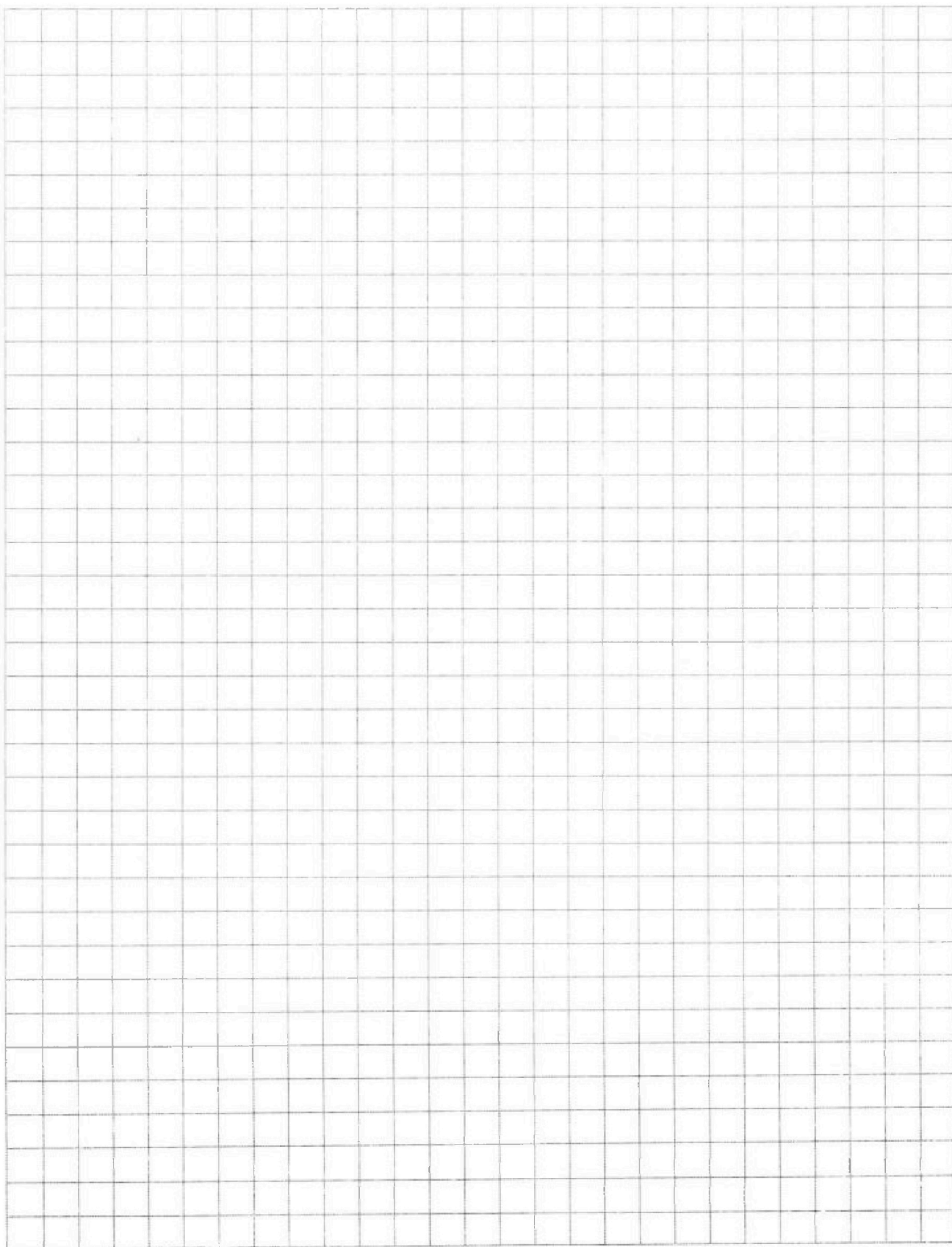


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



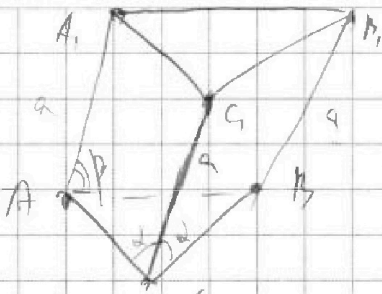


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta ABC - \text{плем}$   
 $S_{ABC} = 1$

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$3 + 4 + 5 + 5 + 7 + 0 = 31$$

$$3 + 4 + 3 + 2 = 12$$

$$x^2 + y^2 - 2R_1y + R_1^2 = R_2^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2R_2y + R_2^2 = R_2^2$$

$$-2R_1y + 2ax - a^2 + 2R_2y = 0$$

$$2ax = 2(R_1 - R_2)y + a^2$$

$$x = \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2}$$

$$\left( \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - 2R_1y = 0$$

$$R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2 + \frac{2(R_1 - R_2)y + a^2}{a^2}y^2 - 2R_1y = 0$$

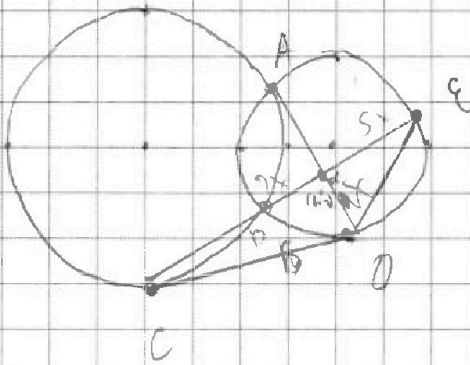
$$\frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}y^2 - (R_1 + R_2)y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$D = (R_1 + R_2)^2 - 4 \frac{a^2}{4} \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2} =$$

$$= R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 - 2R_1R_2 - R_2^2 - a^2 =$$

$$= 4R_1R_2 - a^2$$

$$y_1 = \frac{R_1 + R_2 - \sqrt{4R_1R_2 - a^2}}{2 \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}}$$



$$\frac{EO}{CO} = ?$$

$$\frac{S_{COA}}{S_{COE}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = CO^2$$

$$25x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = OE^2$$

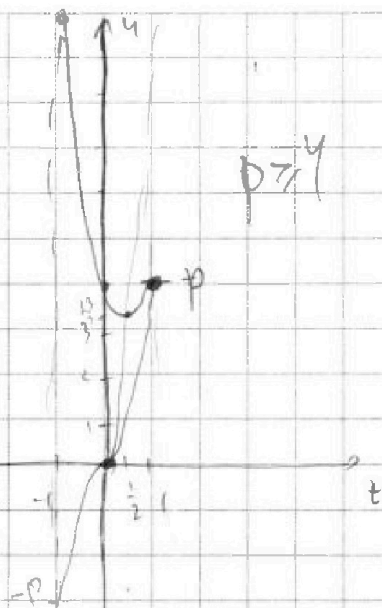


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t^3 - \frac{3}{p}t^2 + 3t - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t}{p^3} - \frac{3 \cdot 6}{p^3} + \frac{3 \cdot 4}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t - 18}{p^3} + \frac{12}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$16 + 12p - 4p^2 = 0$$

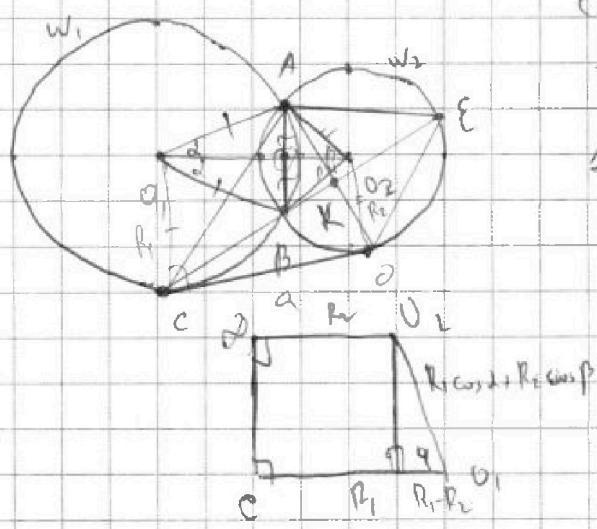
$$p^2 - 3p + 4 = 0$$

$\frac{4}{p}$  - корень?

$p = 4 \Rightarrow [1; 4]$   
 $p = 5$   
 $5t^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$

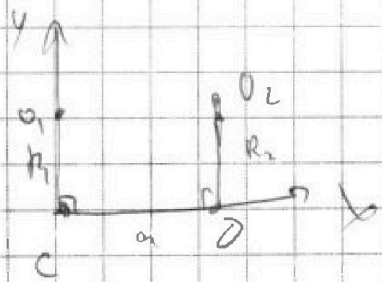
$\frac{EO}{CO} = ?$   
 $\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$   
 $\frac{AB}{R_1} = \sin \alpha$

$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta$   
 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$   
 $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}$   
 $R_1 = kR_2$   
 $\sin \alpha = \frac{1}{k} \sin \beta$   
 $\sin \beta = k \sin \alpha$



$\frac{AB}{R_1} = \sin \alpha$   
 $AB = 2R_1 \sin \alpha$   
 $AB = 2R_2 \sin \beta$   
 $O_1O_2 = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta$

$$CD^2 = R_1^2 \cos^2 \alpha + R_2^2 \cos^2 \beta - 2R_1 R_2 \cos \alpha \cos \beta - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1 R_2 = 2R_1 R_2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta$$



$(0; 0)$  или  $R = R_1$  уступ  $(0; R_1)$   
 $O_1(0; R_1)$   
 $O_2(a; R_2)$   
 $x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2$   
 $(x - a)^2 + (y - R_2)^2 = R_2^2$   
 $F_1 A = F_2 B$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a, p, c \in \mathbb{Z} \\ a \neq b \\ b-a \mid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \\ a^2 + b = 710 \end{cases}$$

I  $a-c=1$   
 $b-c=p^2$

II  $c=a-1$   
 $b-a+p^2 = b = p^2 + a - 1$

III  $a-c=-1$   
 $b-c=-p^2$

$a < p^2 + a - 1$

$p^2 - 1 > 0$  ✓

IV  $b-c=1$   
 $a-c=p^2$

$b-a = (p^2 - 1) / 3$

|     |       |
|-----|-------|
| $h$ | $h^2$ |
| 0   | 0     |
| 1   | 1     |
| 2   | 4     |

V  $b-c=-1$   
 $a-c=-p^2$

$p^2 = 3$

VI  $a-c=p$   
 $b-c=p$

VII  $a-c=-p$   
 $b-c=-p$

$a^2 + b = 710$

$a^2 + a + 9 = 710$

$a^2 + a - 701 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$

$\sqrt{D} = 53$

$a_1 = \frac{-1-53}{2} = -27$

$a_2 = \frac{-1+53}{2} = 26$

$b = a + 8$   
 $c = a - 1$

$2809 = 53^2$

$5050 = 7500$

$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$

$p = ?$  сложная

$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 6 + 10$

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$   
 $= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x =$   
 $= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) =$   
 $= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$   
 $= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 16$

$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 4$

$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$   
 $t = \cos x, t \in [-1; 1]$

$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$

$u = pt^3 \rightarrow f(t)$

$u = 3t^2 - 3t + 4$  - корни тем  $g(t)$

$0 = 9$  берем  $t_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$u_0 = 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{16}{4} = \frac{13}{4}$

$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$

$p = 1, t = 1$  (✓)

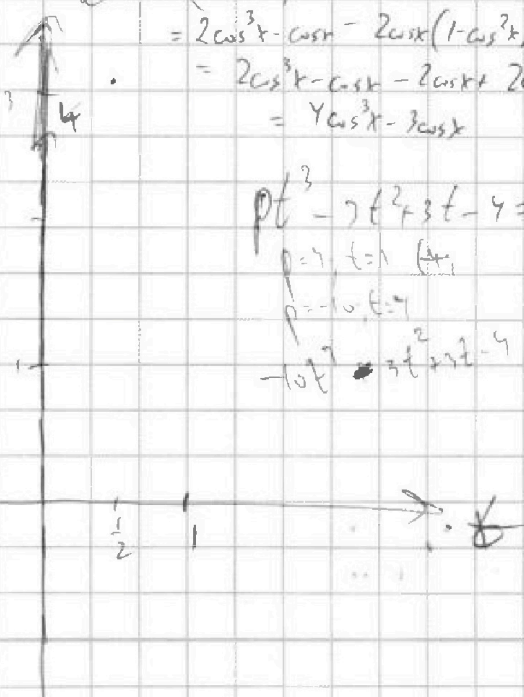
$p = -10, t = 1$

$-10t^3 = 3t^2 - 3t + 4$

$g(-1) = 3 + 3 + 4 = 10$

$g(1) = 3 - 3 + 4 = 4$

$f(t) = pt^3$   
 $(-1; p)$   
 $(1; p)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV)  $y \geq 5$  -  $t = y + 1 + y - 20 = 5y - 16$  - вып. фн

$\min t$  в  $y \in [5; 9]$   
 $\min t = 9$

а т.к.  $0 \leq t \leq 9$

$y = 5; t = 0$

Усл.  $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$-x^2 - 4x + 5 \geq 0$   
 $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$

$x \in [-5; 1]$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + t = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 + 1-x + 16 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$

$1\sqrt{5-4x-x^2} + 6 = 4(5-4x-x^2) + 16$   
 $t = \sqrt{5-4x-x^2} + 70$

$4t^2 - 14t + 10 = 0$

$2t^2 - 7t + 5 = 0$

$D = 49 - 40 = 9$

$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$

$t_2 = \frac{7+3}{4} = 5$

$\sqrt{5-4x-x^2} = 4$

$5-4x-x^2 = 16$

$x^2 + 4x + 11 = 0$

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 16 + 16 = 32$

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2-2\sqrt{2}$

$x_2 = 2\sqrt{2}-2$

$4x^2 + 16x + 15 = 0$

$D = 256 - 240 = 16$

$x_1 = \frac{-16-4\sqrt{1}}{4} = -\sqrt{1}-4$

$x_2 = \sqrt{1}-4$

Всего  $4 \times 4 = 16$  вариантов

Одна из  $4 \times 4 = 16$  вариантов  
все разбито на 7 партий; берём 7 партий;



сумма  $4 \times 4 = 16$   
всего

где  
для каждой из 3 партий:  $\frac{4000!}{4000!} = 10000$

Вар. выбор 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

$\frac{4000!}{4000!} = 1$   
 $\frac{4000!}{3996!} = 4!$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$ ;  $b_9 = x+3$ ;  $b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$   $x = ?$   
 $q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$   
 $q = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3} \cdot (x+3)}$   $\Rightarrow q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}}{(x+3)^2 \sqrt{(x-6)^3}} = \frac{|25x-9|}{(x+3)^2(x-6)}$

y ch  $(25x-9)(x-6) \geq 0$   $\textcircled{I}$   $\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0$   $= \frac{25x-9}{(x+3)^2(x-6)}$   
 $(x-\frac{9}{25})(x-6) \geq 0$   
 $x \in (-\infty, \frac{9}{25}] \cup [6, +\infty)$   $x \in (-\infty, \frac{9}{25}] \cup (6, +\infty)$   $b_7 \neq b_{15}$

$q^8 = \frac{(x+3)^2 \sqrt{25x-9}}{\sqrt{25x-9} \sqrt{x-6} \sqrt{(x-6)^3} (x+3)^2} = q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2} \neq 0$   
 $q^4 = \frac{1}{x-6}$

$\frac{25x-9}{(x+3)^2(x-6)} = \frac{1}{x-6}$

$\textcircled{I}$   $x < \frac{9}{25}$ :  
 $\frac{25x-9}{(x+3)^2(x-6)} = \frac{1}{6-x}$   $\frac{9-25x}{(x+3)^2} = 1$   $x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$   
 $x^2 + 31x = 0$   
 $x(x+31) = 0$   
 $x = 0$   
 $x = -31$

$\textcircled{II}$   $x > 6$ :  
 $\frac{25x+9}{(x+3)^2} = 1$   
 $x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$   
 $x^2 - 19x + 18 = 0$   
 $D = 361 - 72 = 289$   
 $x_1 = \frac{19-17}{2} = 1$  - не подходит по условиям  
 $x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$

$\textcircled{1}$   $b_7 = \sqrt{(25(-31)-9)(-31-6)} = \sqrt{-775 \cdot (-37)} = 5\sqrt{31 \cdot 37}$   
 $b_9 = -31+3 = -28$   
 $b_9 > 0$   
 $b_9 < 0$   
 $q^2 = \frac{b_9}{b_7} < 0$   $\textcircled{X}$

$\textcircled{2}$   $x \neq 0$   
 $b_7 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$   
 $b_9 = 3$   
 $b_{15} = \sqrt{\frac{-9}{-66^2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$q^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \Rightarrow v_{15} = q^4 \cdot v_3 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot 3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \checkmark$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad x = 0 \quad \textcircled{\times}$$

$$3) X=18 \Rightarrow v_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{2 \cdot 19} = 12\sqrt{2}$$

$$v_9 = 21$$

$$v_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 7}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\Rightarrow q = \frac{21}{12\sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$q^4 = \frac{1}{8}$$

$$q^6 = \frac{1}{16\sqrt{2}}$$

$$v_{15} = v_9 q^6 = 16\sqrt{2} \quad \textcircled{\times}$$

$$\sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{3 \cdot 49} = 12\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{7}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$q^2 = \frac{21}{12\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}}$$

$$q^4 = \frac{1}{12} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{24\sqrt{3}}$$

$$v_{15} = 21 \cdot \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-y^2} + 4 = 2\sqrt{y-yx-x^2+z}$$

$$|y+1| + |y-5| = \sqrt{31-z^2}$$

$$0 \leq \sqrt{31-z^2} \leq 9$$

$$t = |y+1| + |y-5|$$

$$\textcircled{I} y = -4$$

$$t = -y - 4 - y + 20 =$$

$$(5y+16), \text{ ydub}$$

$$y = -4 \Rightarrow \text{yub} \text{ min } y = -4$$

$$\textcircled{II} y \in [-4, 5] \Rightarrow t = y+4 - y+20 = 24 - \text{ydub funktsiya} \sim \text{min } v_{15} = 5 - \text{min } = 9$$