



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $b_n$ - геом. прогрессия

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}; \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{(25x-9)}{(x-6)^3}}$$

1)  $(25x-9)(x-6) \geq 0$  — из  $b_7$



из  $b_{15}$ :  $x \neq 6$

из  $b_9$ :  $b_9 = q^2 \cdot b_7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$  (все члены;  $b_7, b_9, b_{15} \geq 0$ )

2) если  $b_7 = 0 \rightarrow 25x-9=0 \rightarrow x = \frac{9}{25} \Rightarrow x+3 \neq 0 \quad \checkmark$   
= все члены больше или равны 0 и  $e > 0$

3) Можем поделить:  $\frac{b_9}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^6} = q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$

$$\frac{b_{15}}{b_9} = \frac{b_1 \cdot q^{14}}{b_1 \cdot q^8} = q^6 = \frac{\sqrt{(25x-9)}}{(x-6)^3 \cdot (x+3)}$$

$$(q^2)^3 = q^6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^3}{(\sqrt{(25x-9)})^3 \cdot (x-6)^3} = \frac{\sqrt{(25x-9)}}{(x-6)^3 \cdot (x+3)}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^4 = (25x-9)^2$$

$$((x+3)^2 - 25x+9)((x+3)^2 + 25x-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x^2 + 31x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ — не удовл п. (1)} \\ x = 18 \\ x = 0 \\ x = -31 \text{ — не удовл п. (1)} \end{cases}$$

Ответ: при  $x = \{0; 18\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

1) Рассмотрим 2-е уравнение системы, заметим, что левая часть означает расстояние от точки  $y$  до точки  $-4$  на числовой прямой сложившее с удвоенным расстоянием от  $y$  до  $5$



и равенство достигается при  $y=5$  (расстояние до 5 равно 0, до 4 равно 9)

НО: правая часть равенства

$$\sqrt{81-z^2} \geq 9 \Rightarrow \text{левая часть} = 9 = \text{правая}$$

$$\text{То есть } y=5; \sqrt{81-z^2} = 9 \Leftrightarrow 81-z^2 = 81 \Leftrightarrow z=0$$

$\Rightarrow y=5; z=0$ ; перенесем первое уравнение:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$1) \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$5-4x-x^2 = (x+5)(1-x) \geq 0$$

$$2) \text{ Возьмем: } a = \sqrt{x+5}; b = \sqrt{1-x};$$

$$a^2 + b^2 = 6$$

$$\begin{cases} a-b+4=1 \\ a-b+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-3 \\ a=b+1 \end{cases}$$

$$a-b+4 = 2ab$$

$$a-b = 2ab-4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (2ab-4)^2$$

$$\text{Возьмем } t = 2ab$$

$$6-t = (t-4)^2$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$\begin{cases} t=2 \\ t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ ab=2,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 3 \\ \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} + 3 = \sqrt{1-x} \\ \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \\ \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \\ \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 \end{cases}$$

$$6\sqrt{x+5} = -13-x \geq 0 \text{ w.p. (1)}$$

$$\sqrt{x+5} = 1-x + 2\sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2x+3 = 2\sqrt{1-x}$$

$$2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1,5$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 4 - 4x$$

$$4x^2 + 16x + 5 = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = -2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

- не подходит

$$\text{Ответ: } (x, y, z) = \left(-2 + \frac{\sqrt{11}}{2}, 5, 0\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$③ \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + (3p+12) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Заменим  $t = \cos x \in [-1; 1]$

$$p t^3 - 3 t^2 + 3 t - 1 = 0$$

при  $p=0$ :  $-3t^2 + 3t - 1 = 0$   $D = 9 - 12 < 0$  не решено

при  $p=1$ :  $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

$$(t-1)^3 = 0$$

$$t=1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

при  $p > 1$ :  $(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$

$$(p-1)t^3 \nearrow \text{ на } D(y)$$

$$(t-1)^3 \nearrow \text{ на } D(y)$$

$$\Rightarrow (p-1)t^3 + (t-1)^3 \nearrow \text{ на } D(y). \text{ Пусть } F = (p-1)t^3 + (t-1)^3$$

$$F(0) = \overset{\uparrow 0}{-1}; \quad F(1) = p-1 > 0$$

$\Rightarrow$  на промежутке  $(0; 1)$  есть корень и единственный  $\Rightarrow p > 1$  подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$(b-a) : 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} b-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1+c \\ a=p^2+c > b \end{cases}$$

$a, c$  - целые

$p^2$  можно разложить только на  $p \cdot p$  и  $(\pm p)^2$

но положим  
моче  $a=c+k$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+1 \\ b=p^2+c \end{cases}$$

$$b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

2 3 5 7 11 13

$$c^2 + 2c + 1 + p^2 + c = 710$$

~~$$c^2 + 2c + 1 + p^2 + c = 710$$~~

$$c^2 + 3c + p^2 = 709$$

$$c^2 + 3c + p^2 - 1 = 708 : 3$$

$$(p^2 - 1) + c^2 \equiv 0$$

$$a < b$$

$$b-a = p^2 - 1 \neq 3$$

$$a = c+1 \quad b = p^2 + c$$

$$a^2 + b = c^2 + 3c + p^2 + 1 = 710$$

$$c^2 + \frac{(p^2-1)}{3} : 3$$

$$a^2 + b \equiv 710 \Leftrightarrow a^2 + b + 19 = 729 = (27)^2$$

$$c^2 + 3c + p^2 + 20 = (27)^2$$

$$c^2 + 3c + 20 = (27-p)(27+p)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow p^2 : 3 \rightarrow p = 3$$

$$a = c+1$$

$$b = a+c$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + c = 710$$

$$c^2 + 2c - 700 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 700$$

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$$a = c+1$$

$$b = c+9$$

$$a = c+1$$

$$b = p^2 + c$$

$$b-a = p^2 - 1 : 3$$

$$\begin{matrix} n & n^2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} \Rightarrow p^2 : 3 \Rightarrow p : 3$$

$$\rightarrow p = 3$$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + c = 710$$

$$c^2 + 3c - 700 = 0$$

~~$$c^2 + 3c - 700 = 0$$~~

$$(c+28)(c-25) = 0$$

$$\begin{cases} c = -28 \rightarrow a = -27 & b = -19 \\ c = 25 \rightarrow a = 26 & b = 34 \end{cases}$$

~~$$700 : 2.5$$~~

$$\begin{array}{r} 700 : 2.5 \\ 70 \\ 7 \end{array}$$

$$25 \quad 28$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\omega_1$  и  $\omega_2$

$\omega_1 \cap \omega_2 = A \cup B$

общая касательная

CD

т. В симметр к

CD

$CB \cap \omega_2 = B \cup E$

$AD \perp CE = O$

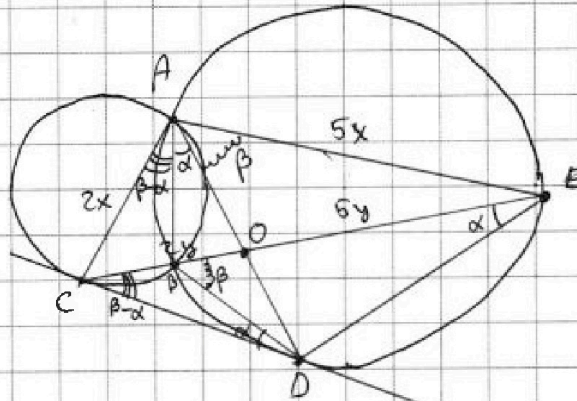
$CO : OE = 2 : 5$

Найти

$ED : CD$

Решено

Задача 4



1)  $\angle BDE = \alpha \Rightarrow \angle BDP = 2\alpha$  (угол м/у хордой и касательной)

2) Тогда  $\angle BED = \angle BAD = \alpha$

Также  $\angle EAD = \angle EBD = \beta \Rightarrow \angle DE = 2\beta$

3)  $\angle ECD = \frac{2\beta - 2\alpha}{2} = \beta - \alpha$  (угол м/у секущих)

4)  $\angle CAB = \angle ECD = \beta - \alpha$  (угол м/у хордой и касательной)

5) Тогда  $\angle CAO = \beta - \alpha + \alpha = \beta \Rightarrow AO$  — биссектриса  $\angle CAE$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}$ . Пусть  $AC = 2x$ ;  $AE = 5x$

6)  $\triangle CAD \sim \triangle DAE$ :  $\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$

$AD^2 = AE \cdot AC \Rightarrow AD = x\sqrt{10} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{5x}{x\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Ответ:  $ED : CD = \sqrt{5} : \sqrt{2}$

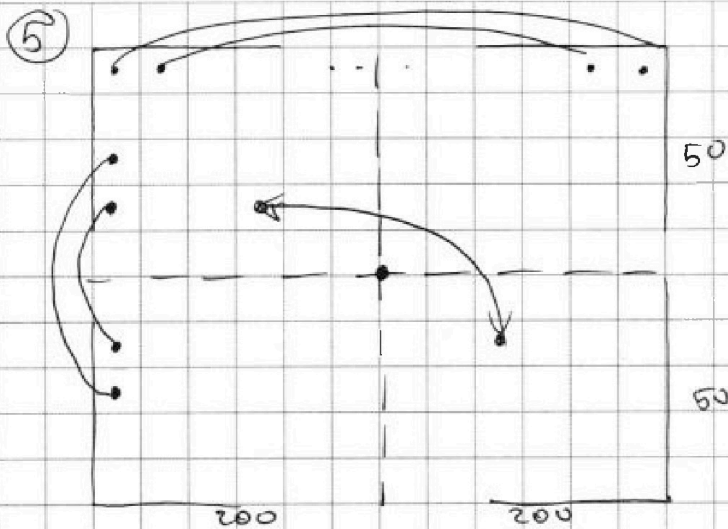
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего симметричных пар по горизонтали  $200 \cdot 100 = 20000$

Сколько же пар симметричных по вертикали (20000). Те же 20000 симметричных пар от центра.

~~Когда все это выберем одну~~

~~пару симметричных~~ Выбираем отсюда 2х множесто

1) Для горизонтальной выбираем

4 пары из 20000:  $C_{20000}^4$

2) Для вертикальной 4 пары из 20000:

$C_{20000}^4$

3) Для центральной симметрии 4 из

20000  $C_{20000}^4$

Ответ: Всего способов  $3 \cdot C_{20000}^4$  или

$C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) (a-c)(b-c) = p^2$$

простое число рассматривается только на

$\left\{ \begin{array}{l} p \cdot p - \text{не подходит так как в этом случ.} \\ 1 \cdot p^2 - \text{есть 2 варианта} \end{array} \right. \begin{array}{l} a = b \vee (a < b) \end{array}$

$$1) \text{ Пусть } a-c = p^2; b-c = 1 \Rightarrow a = p^2 + c; b = c + 1$$

и снова  $a > b \vee$

$$\Rightarrow a-c = 1; b-c = p^2 \Rightarrow a = c + 1; b = p^2 + c$$

$$b-a = (p^2 - 1) \div 3$$

Рассмотрим остатки квадратов на 3

|       |   |                |                                                         |                                |                                                          |
|-------|---|----------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------------|
| mod 3 | n | n <sup>2</sup> | } \Rightarrow \text{если } (p^2 - 1) \div 3, \text{ то} |                                |                                                          |
|       | 0 | 0              |                                                         | p <sup>2</sup> дает остаток на |                                                          |
|       | 1 | 1              |                                                         |                                | 1 \Rightarrow 0 \Rightarrow p^2 \div 3 \Rightarrow p = 3 |
|       | 2 | 4 \equiv 1     |                                                         |                                |                                                          |

т.е. простое

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$$

$$a^2 + b = \cancel{28} \quad c^2 + 3c + 10 = 710 \Leftrightarrow c^2 + 3c - 700 = 0$$

$$\begin{cases} c = -28 \\ c = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -28 \\ a = -27 \\ b = -19 \\ \cancel{c = 25} \\ a = 26 \\ b = 34 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (a, b, c) = \{(-27; -19; -28); (26; 34; 25)\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

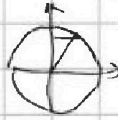
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4

$$S_{\text{пл}} = 1$$

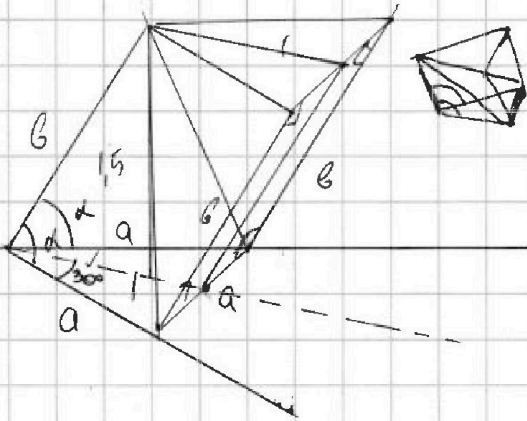
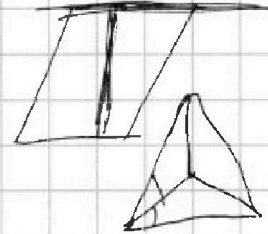
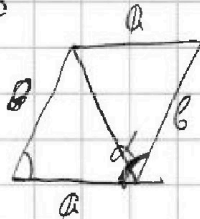
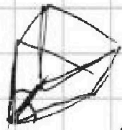
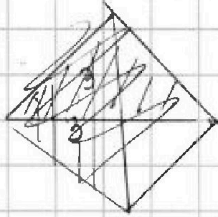


$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 1$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$



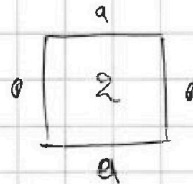
$$1 \cdot b \cdot \sin \alpha$$



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

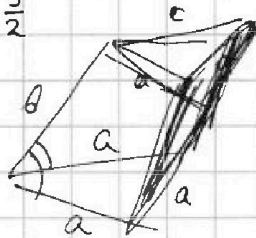
$$\frac{2}{a} \cdot a \cdot \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{2}$$



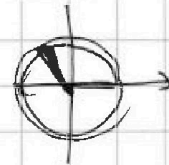
$$ab = 2$$

$$b = \frac{2}{a}$$



$$ab = 2$$

$$ab \sin \alpha = 3$$



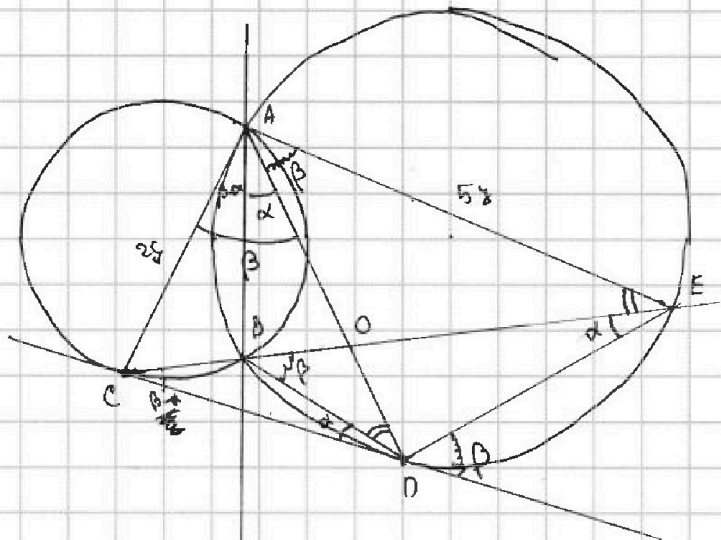


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & \frac{130 - \beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \\
 & = 130 - \frac{(\alpha + \beta)}{2} \\
 & \frac{\alpha + \beta}{2} = \beta \\
 & \alpha = \beta \\
 & 130 = 2\beta
 \end{aligned}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AD} = \frac{CO}{OE} \quad AO - \text{диаметр} \Rightarrow \frac{AC}{AE}$$

$$AD^2 = AE \cdot AC = 5y \cdot 2y = 10y^2$$

$$AD = y\sqrt{10}$$

$$\frac{AC}{AD} =$$

$$a \equiv 1 \quad b \equiv 2 \quad \text{модуль } 3$$

$$a < b$$

$$(27 - a)(27 + a) = b + 19$$

$$(b - a) \times 3$$

$$\text{если } a \div 3 \Rightarrow b \not\div 3 \Rightarrow 2 + 19 \div 3$$

$$b \equiv 2$$

$$(a - c)(b - c) \text{ — квадрат числа}$$

$$a^2 + b = 110$$

$$ab - ac - bc + c^2 = n^2$$

$$ab - c(a + b) + c^2$$

$$(a - c)(a + c) = ab - c(a + b) \quad (a - c)(b - c) = n^2$$

$$a^2 + b + 19 = (27)^2$$

$$\begin{array}{r} \times 40 \\ \times 70 \\ \hline 4900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2-1 \quad 2-0 \\ 1-0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ \times 24 \\ \times 22 \\ \hline 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$429$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+9)^4 = (25x-9)^2$$

$$((x+9)^2 - (25x-9))((x+9)^2 + (25x-9)) = 0$$

$$\begin{cases} x^2+6x+9-25x+9=0 \\ x^2+6x+9+25x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x^2+31x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=18 \\ x=0 \\ x=-31 \end{cases} \quad \# \text{ O D 3}$$

$$(2) \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 4z + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

$$1) x \geq -5$$

$$z^2 \leq 81 \Leftrightarrow z \in [-9; 9]$$

$$y=5 \quad z=0$$

$$[9; 9]$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x+5} \geq 0 \\ b &= \sqrt{1-x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$|y+4| + 4|y-5|$$



$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 &= 2\sqrt{5-4x-x^2} \\ a - b + 4 &= 2\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a-b+4=2ab \\ a^2+b^2=6 \end{cases} \quad \text{Решая получим}$$

$$(3) p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10 \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos x = t$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6(2\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t = 12t^2 + 4 \quad t \in [-1; 1]$$

$$4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad \text{при } p=0 \quad -3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} pt^3 + 3t &= 3t^2 + 1 \\ pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ D &= 9 - 4 \cdot 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

при  $p=0$

$$\begin{aligned} \sqrt{54} & \quad 3 \quad \sqrt{\frac{9}{216}} \quad \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ 3\sqrt{6} & \quad 3 \quad \frac{9}{216} = \sqrt{\frac{9}{6 \cdot 6 \cdot 6}} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

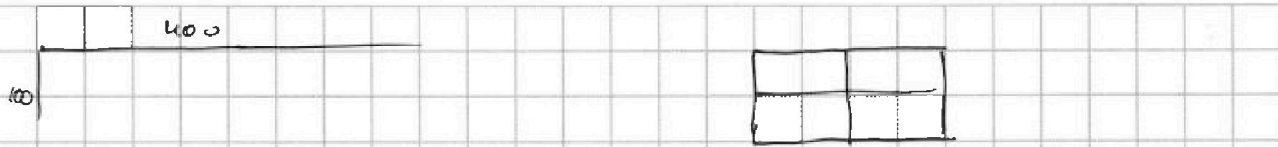


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

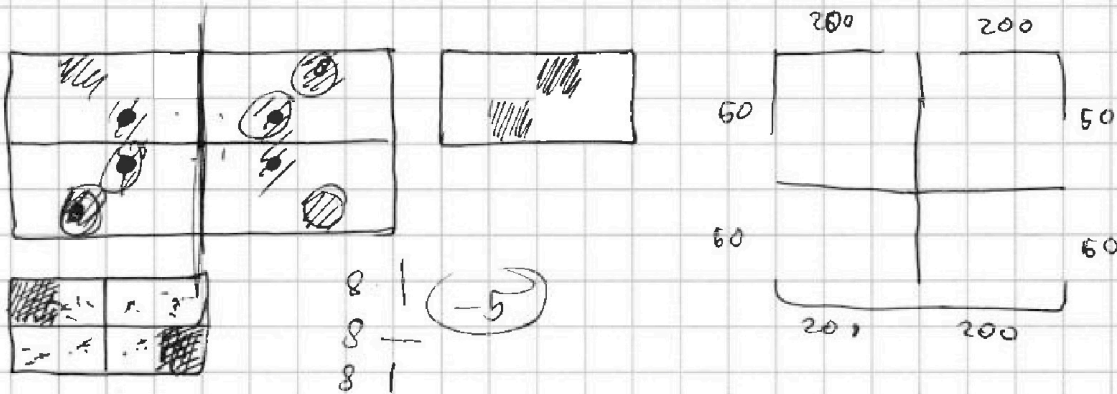
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



закрашиваем 8 точек

закрашенная 4x4 область имеет вид из следующего примера:

- от центра
- от любого из двух соседних



40000

$20000 \cdot 19999 \cdot 19998 \cdot 19997$

~~40000~~ ~~3~~ ~~89998~~ ~~3~~

$20000^4$

10000



с



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

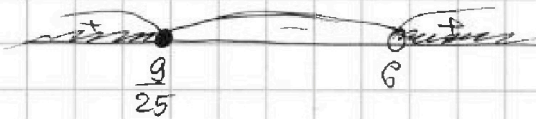
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \quad \exists \beta_0: \quad \beta_7 &= \sqrt{(25x-9)(x-6)} = b_1 \cdot q^6 \\ \beta_9 &= x+3 = b_1 \cdot q^8 \\ \beta_{15} &= \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = b_1 \cdot q^{14} \end{aligned}$$

$$\beta_7 = (25x-9)^{\frac{1}{2}} (x-6)^{\frac{1}{2}}$$

все члены положительны

$$(25x-9)(x-6) \geq 0$$



$$\frac{\beta_9}{\beta_7} = q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$\frac{\beta_{15}}{\beta_9} = q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{(x-6)^3 (x+3)}$$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = q^2$$

$$\frac{\beta_{15}}{\beta_7} = q^8 = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$\begin{matrix} b_1 & b_1 q & b_1 q^2 & & b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & & \end{matrix}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)} (x+3) \sqrt{(x-6)^3}}{(25x-9)} = (x-6)^2 (x+3)$$

~~$$\frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{x+3} = q^2$$~~

~~$$q^8 = \frac{1}{(x-6)^2} = \frac{(25x-9)^2 (x-6)^2}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2 - (25x-9)(x-6)^4}{(x-6)^3 (x+3)^4}$$~~

$$q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3} (x+3)}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2$$

$$\frac{(x+3)^3}{\sqrt{(25x-9)^3} \sqrt{(x-6)^3}} = \frac{\sqrt{25x-9}}{x+3 \sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\sqrt{(\quad)(\quad)} = (x-6)^2 (x+3) \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3} (x+3)}$$

$$\begin{aligned} 84 - 5 \cdot 4 &= 4(4) \\ -8 \pm 2\sqrt{1} & \\ \frac{-8 \pm 2\sqrt{1}}{4} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 \pm \sqrt{1} & \\ \frac{-4 \pm \sqrt{1}}{1} & \end{aligned}$$

$$44 = 10$$

$$(25)$$

$$44$$

$$84 - 20$$

~~$$4x^2 + 16x + 5 = 0$$~~

$$4x^2 + 12x + 9 = 4 - 4x$$

$$2x + 3 = 2\sqrt{1-x}$$

$$x \in [-5, 5]$$

$$2x \in [-13, 7]$$

$$-13 - 2x \geq 0$$

$$6\sqrt{x+5} = -13 - 2x$$

$$x+5 + 6\sqrt{x+5} + 9 = 1-x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

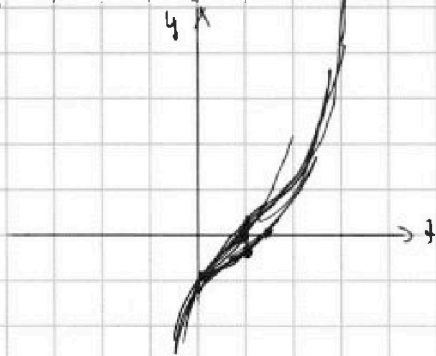
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 = F(t)$$

$$(p-1)^3 + \left(\frac{t-1}{3}\right)^3 = 0$$



при  $p > 1$

$$F(t) = p^3 - 3t^2 + 3t - 1 = p - 1$$

$$\text{при } p < 1 \quad f(t) = p - 1 < 0$$

$$f(0) = -1$$

$$F' = 3p^2 t - 6t + 3$$

$$3(p^2 t - 2t + 1)$$

~~при  $p < 1$~~

$$D = 4 - 4p$$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 3$$

$$x+5 = 1-x+9-6\sqrt{1-x}$$

$$2x-5 = -6\sqrt{1-x}$$

$$6\sqrt{1-x} = 5-2x$$

$$36-36x = 4x^2 + 20x + 25$$

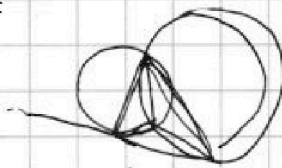
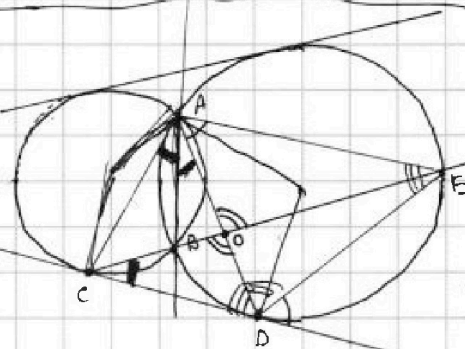
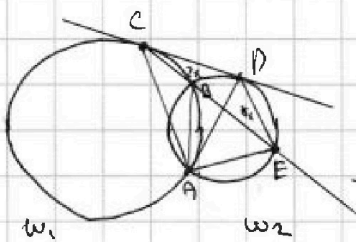
$$5-2x \geq 0$$

$$x \leq 2,5$$

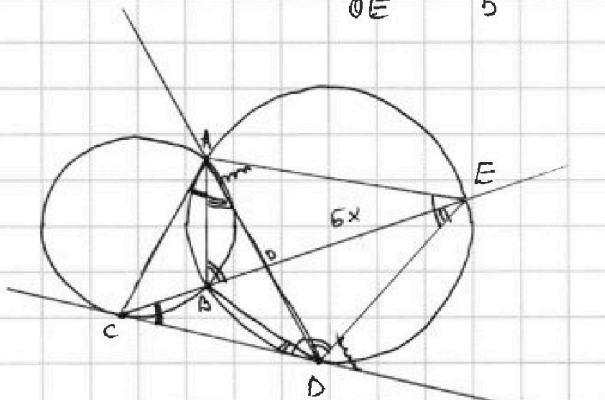
~~при  $p < 1$~~

при  $p > 1$

$$4x^2 + 16x - 11 = 0$$



$$\frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{DE} = \frac{BO}{OE}$$

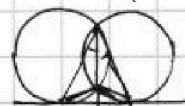
$$a - b + 4 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 6$$

$$(a+b)^2 = a - b + 10$$

$$a - b = 2ab - 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (2ab - 4)^2$$



$$b - 2ab = (2ab - 4)^2$$

$$b - z = (z - 4)^2$$

$$z^2 - 8z + 16 = 6 - z$$

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

$$(z-2)(z-5) = 0$$

$$ab = 1$$

$$ab = 2,5$$

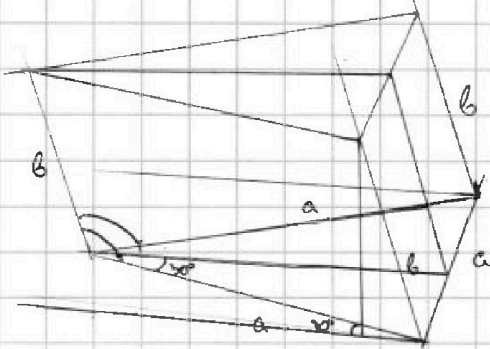


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



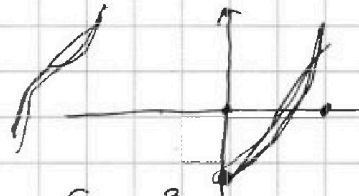
$$f' = 3pt^2 - 6t + 3 = 0$$

$$pt^2 - 2t + 1 = 0$$

при  $p \geq 1$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3$$

$$f(0) = -1 \quad f(1) = p-1$$



$$(p-1) = \frac{(1-t)^3}{t^3} = \frac{(t-1)^3}{t^3} \quad \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p-1$$

$$\left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p-1$$

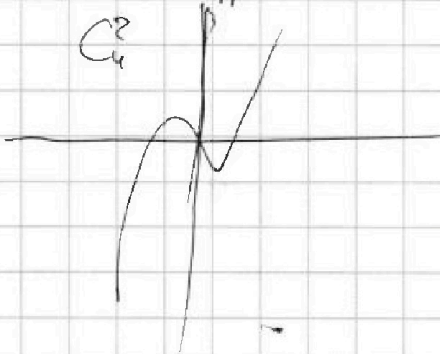
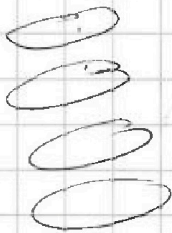
$p < 0$

$p < 1$

при  $p < 1$

при  $p \in (0, 1)$

$$D = 4 - 4p > 0$$



$$f(1) = p-1$$

$$f(0) = -1$$