



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✕ [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

- ⊗ [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ③ [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p \dots$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты). ?

- ✕ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть b_1 - первый член данной прогрессии, q - знаменатель прогрессии, \Rightarrow из условия $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, $b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x$; $b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

Заметим, что $b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \geq 0$, т.к. $q^6 \geq 0$, $\Rightarrow b_1 \geq 0$

Также $b_1, q \neq 0$, т.к.: при $b_1 = 0$, $b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$

т.е. ~~решение~~ $\begin{cases} 5-x=0 \\ 13x-35=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{35}{13} \end{cases} x \in \emptyset$, а также при $q=0$

$b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$, что невозможно. $\Rightarrow b_1 > 0$. $\Rightarrow b_{13} = 5-x > 0$
 $x < 5$

Заметим, что $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} \Rightarrow b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot b_1 \cdot q^{14} \Rightarrow q^8 = (x+1)^2$

$\Rightarrow q^4 = |x+1|$, $\Rightarrow b_{13} \cdot q^{12} = (x+1)^3 \Rightarrow b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x$,

$\Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{(x+1)^3}$. Заметим, что $b_{15} \cdot b_7 = b_1^2 \cdot q^{20}$, \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{(5-x)^2}{(x+1)^6} \cdot (x+1)^5 = \frac{13x-35}{x+1}$, т.к. $x \neq -1$, (в этом случае b_7 не определен)

то $(5-x)^2 = 13x-35$, При $x \geq \frac{35}{13}$. $x^2 - 20x + 25 = 13x - 35$,

$x^2 - 23x + 60 = 0$, \Rightarrow По т. Виета $x_{1,2} = 20; 3$, $x=20$ - не подходит, т.к. $x < 5$, \Rightarrow существует, подходящий: $x=3$

(Продолжение на след. стр.)



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \quad \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2) Пусть $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$, рассмотрим, какие значения данная функция может принимать, для этого раскроем модуль: I. $y \leq -1$:

$$y \leq -1 \quad f(y) = -y-1-3y+36 = 35-4y, \Rightarrow \text{при } y \leq -1$$

$$f(y) = 35-4y \geq 39. \quad \text{II. } y \in (-1; 12):$$

$$f(y) = y+1-3y+36 = 37-2y, \Rightarrow \text{при } y \in (-1; 12),$$

$$f(y) \in (f(12); f(-1)), \quad f(12) = 37-2 \cdot 12 = 13; \quad f(-1) = 39.$$

$$\Rightarrow f(y) \in (13; 39). \quad \text{III. } y \geq 12:$$

$$f(y) = y+1+3y-36 = 4y-35. \quad \text{при } y \geq 12 \quad f(y) \geq 13.$$

\Rightarrow Исходя из этого, можно сказать, что $f(y) \geq 13$.

Рассмотрим выражение $\sqrt{169-z^2}$, т.к. $z^2 \geq 0$, то

$$169-z^2 \leq 169, \quad \text{т.е. } \sqrt{169-z^2} \leq 13, \quad \text{т.к. } f(y) = \sqrt{169-z^2}$$

$$-z^2, \quad \text{а } f(y) \geq 13, \quad \sqrt{169-z^2} \leq 13, \quad \text{то } f(y) = \sqrt{169-z^2} = 13.$$

$\Rightarrow y=12; z=0$, подставим данные значения

в выражение (1): Продолжить на след. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \text{ (Продолжение) } (1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = \sqrt{12+x-x^2+0} : 2$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$\text{Пусть } t = \cos x \geq 0. \Rightarrow (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t = p,$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p. = f(t), \text{ рассмотрим } f(t) \text{ и ее}$$

$$\text{применяем: } f'(t) = 3 \cdot 4 \cdot t^2 + 6 \cdot 2 \cdot t + 3 = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0,$$

\Rightarrow функция почти всегда возрастает, только в точке

$$t = -\frac{1}{2}, f(t) = 0, \Rightarrow \text{эта точка не в области определения}$$

функции \Rightarrow если $t \in [-1; 1]$, то $f(t) \in [f(-1); f(1)]$.

$$\text{(и возрастает)} \quad f(-1) = \min \text{ или } 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow \text{если } p \in [-4; 10] \text{ то корни}$$

есть, при $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ $|t| > 1$, \Rightarrow т.к.

$$\cos x = t, \text{ то } x \in \emptyset. \text{ Ответ: } p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Пусть A - множество клеток, симметричных относительно центра, B, C - "средних линий", \Rightarrow по формуле включения/исключения $|A \cup B \cup C| = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$, где $A \cap B$ - симметрия клеток относительно центра и одной "средней" линии (аналогично).

Найдем значение каждого из слагаемых:

$A = C_{25000}^4$ - т.к. всего ~~клеток~~ точек в прямоугольнике: $250 \cdot 200 = 50000$, заметим, что каждой клетке есть ровно одна

симметричная первой относительно центра клетка,

всего пар будет $\frac{50000}{2} = 25000$, т.к. всего мы зафикси-

руем 8 точек, то это эквивалентно выбору 4 точек

пар, способов выбрать 4 пары из 25000 : C_{25000}^4 .

Аналогичные рассуждения можно провести относительно

множеств B и C , т.к. конкретной той же бюджет соответствует ровно одна точка \Rightarrow пар будет только те:

$\frac{250 \cdot 200}{2} = 25000. \Rightarrow B = C = C_{25000}^4$.

Найдем $A \cap B$: Нам далее будет рассматривать на примере одной клетки на рисунке: Продолжение на след. стр.

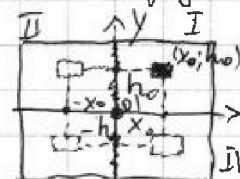


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. (Продолжение). Пусть B - "средняя линия" делящая большую сторону, \Rightarrow рисунок:  Выберем точку в I -й четверти (можете сделать без ограничений области, $(x_0; h_0)$).

Так как ситуация будет симметрична относительно центра, \Rightarrow данной точке будет соответствовать 1 точка во II -й четверти, т.к. мы рассматриваем множество $(A \cap B)$, то

клетка во второй четверти будет $\in (A \cap B)$ в данной ситуации. Также в III -й четверти будет лежать точка, симметричная относительно центра - её координаты будут $(-x_0; -h_0)$, она тоже будет \in данному множеству $(A \cap B)$.

Но т.к. она принадлежит, то точка, симметричная ей относительно оси абсцисс (средней линии B)

также принадлежит, то точка, симметричная ей относительно оси абсцисс (средней линии B)

также принадлежит, то точка, симметричная ей относительно оси абсцисс (средней линии B)

множеству. координаты IV -й точки в IV -й четверти:

$(-(-x_0); -h_0) \Leftrightarrow (x_0; -h_0)$, заметим, что данные точки симметричны относительно оси абсцисс:

точки: $(x_0; h_0)$ - начальная; $(-x_0; h_0)$ - II -я четверть;

$(-x_0; -h_0)$ - относительно центра; и $(x_0; -h_0)$ - в IV -й четверти.

I симметрична IV -й и II -я - III -й, т.к. точки в данных четвертях имеют равную абсциссу и противоположные ординаты, \Rightarrow если точка $\in (A \cap B)$, то она принадлежит $\in (A \cap B \cap C)$, $A \cap B \cap C \Leftrightarrow (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B) = (A \cap B \cap C)$.

Аналогичные рассуждения с $(A \cap C)$ - получим обратную картину. $\Rightarrow (A \cap C) = (A \cap B \cap C)$, Продолжим на след. стр.



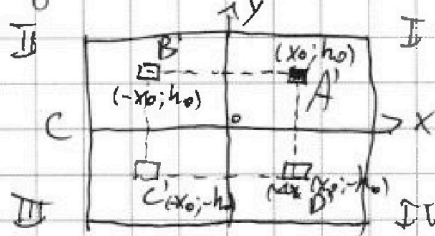
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. (Продолжение) Рассмотрим точки, $\in (BAC)$, на примере одной точки A в I -й четверти с координатами $(x_0; h_0)$:



Точка B' симметрична точке A' $B' \in (BAC)$, ~~и координаты B'~~ (относительно пр. "средней линии"; $B \Rightarrow$ координаты $B' (-x_0; h_0)$

Пусть D' симметрична A' относительно линии C , \Rightarrow её координаты $(x_0; -h_0)$, $D' \in (BAC)$

Заметим, что точка D' должна быть тоже симметрична какой-то точке, только относительно прямой B , т.к.

$D' \in (BAC)$, Пусть это будет точка C' с координатами $(-x_0; -h_0)$

\Rightarrow нетрудно заметить, что C' симметрична B' относительно линии C , также нетрудно заметить, что A' и C' ; B' и D'

пары симметричны относительно центра, \Rightarrow данные

точки также принадлежат множеству A , $\Rightarrow (BAC) = (A'B'C')$

$\Rightarrow A'B = B'C = A'C = A'B'C$, Из предыдущего рисунка нетрудно заметить, что каждой точке в одной четверти будет

соответствовать три точки в каждой из других четвертей

\Rightarrow Таким образом у нас будут четверти - по шесте в каждой четверти, \Rightarrow если у нас 8 клеток закрашивается, то будет по 2 "четверти" или каждой шесте в одной четверти

будет соотв. соответств. своя "четверть", то таким образом будет: $C_{12500}^2 = A'B = B'C = A'C = A'B'C$, \Rightarrow Ответ: $A \cup B \cup C =$

$$= 3C_{12500}^4 - 2C_{12500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. Из условий: (Пусть p - простое число)

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \not\equiv 0 \pmod{3} & (2) \\ (a-c)(b-c) = p^2 & (3) \\ a + b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

Т.к. a, b, c - нечетные, $\Rightarrow a-c; b-c$ - четные,
 \Rightarrow т.к. $(a-c)(b-c) = p^2 \cdot 1 = p \cdot p = (-p^2) \cdot (-1) = (-p) \cdot (-p)$.

\Rightarrow Т.к. $a > b$, то $a-c > b-c$, также
 т.к. $a \neq b$, то $a-c \neq b-c$, \Rightarrow
 разложение вида $p \cdot p$ или $(-p) \cdot (-p)$
 невозможно.

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-c = p^2 & (I) \\ b-c = 1 \end{cases} & \text{Вычитаем уравнения в системе (I):} \\ \begin{cases} a-c = -1 & (II) \\ b-c = -p^2 \end{cases} & \text{Вычитаем уравнения в системе (II):} \end{cases}$$

$$(a-c) - (b-c) = p^2 - 1, \quad a-b = p^2 - 1$$

$$(a-c) - (b-c) = -1 + p^2,$$

$$a-b = p^2 - 1, \Rightarrow \text{в обоих случаях}$$

$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Т.к. из (2) $a-b \not\equiv 0 \pmod{3}$, \Rightarrow т.к. $(p-1)(p+1) \not\equiv 0 \pmod{3}$

Заметим, что при $p \neq 3$ такое невозможно, т.к. если $p \neq 3$, то $p \not\equiv 3$ (т.к. число простое), \Rightarrow если $p \not\equiv 3$, то оно имеет остаток 1 или 2 при делении на 3, $\Rightarrow p-1$ или

$p+1$ одно из них будет кратно трем (при $p \equiv 2 \pmod{3}$)

$(p+1) \not\equiv 3$, при $p \equiv 1 \pmod{3}$ $-(p-1 \not\equiv 3)$, \Rightarrow единственное подходящее

целое $p = 3$. \Rightarrow

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 9 + c & (I) \\ b = 1 + c \end{cases} \\ \begin{cases} a = c - 1 & (II) \\ b = c - 9 \end{cases} \end{cases}$$

Продолжение на след. странице.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение). Подставим полученные значения из системы (I) в выражение (4):

$$(9+c) + (c+1)^2 = 560, \quad c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 560,$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0, \quad \text{По теор. Виета: } \begin{cases} c_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 31; b_1 = 23 \\ c_2 = -25 \Rightarrow a_2 = -16; b_2 = -24 \end{cases}$$

Подставим значения из системы (II) в выражение (4):

$$(c-1) + (c-9)^2 = 560, \quad c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 560,$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad \begin{cases} c_3 = 32 \Rightarrow a_3 = 31; b_3 = 23 \\ c_4 = -15 \Rightarrow a_4 = -16; b_4 = -24 \end{cases}$$

по т. Виета 7

\Rightarrow Ответ: $(31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$

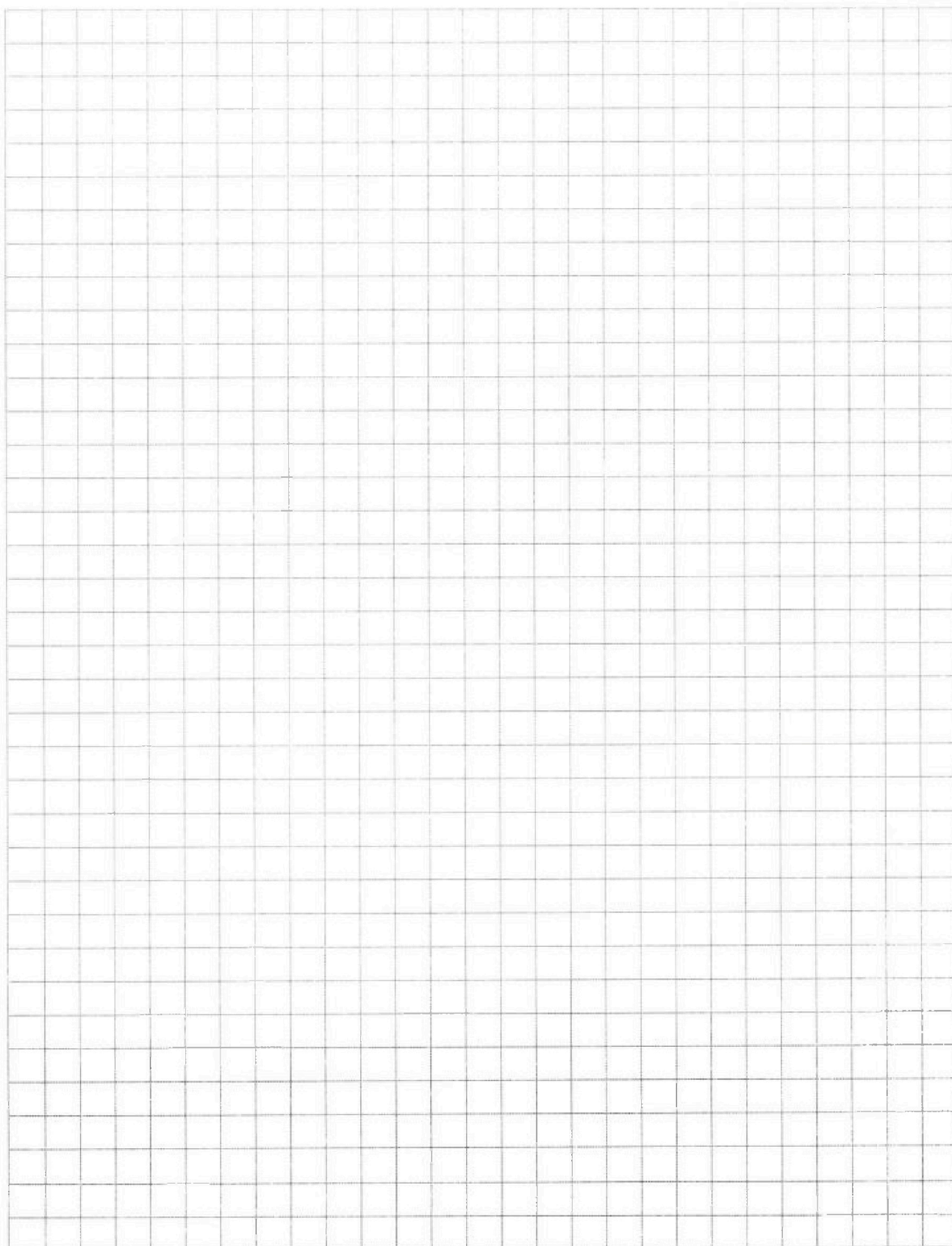


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$a - b + 5 = 2ab \rightarrow a = \frac{5-b}{2b-1}$$

$$x+3 = \frac{25-4+x-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{4-x}}{4(4-x) - 4\sqrt{4-x} + 1} = \frac{21+x-10\sqrt{4-x}}{16-4x-4\sqrt{4-x}+1}$$

$$x^2(2x-1)^2 = 22^2 + x + 3 + 44\sqrt{x+3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p=3 \Rightarrow \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} a=9+c \\ b=1+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9+c+c^2+2c+1=560$$

$$c^2+3c-550=0$$

$$(2) \quad a=c-1 \quad 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 \quad 5 \cdot 11 \cdot 10 \quad 22; 25$$

$$b=c-9 \quad 10 \cdot 55$$

$$(c-22)(c+25)=0$$

$$\Rightarrow c-1+c^2-18c+81=560$$

$$\begin{cases} c=22 \Rightarrow a=31; b=23 \\ c=-25 \Rightarrow a=-16; b=-24 \end{cases}$$

$$c^2-17c-480=0 \quad 4b^2+6b^2$$

$$16 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 32; 15$$

$$(c-32)(c+15)=0 \quad \begin{cases} c=32 \Rightarrow a=31; b=23 \\ c=-15 \Rightarrow a=-16; b=24 \end{cases}$$

Ответ: $(31; 23; 22); (-16; -24; -25)$.

$$a-b+5=2ab \Rightarrow 7 \quad x05-3; 47$$

$$a = \frac{b-5}{1/b} = \frac{b-5}{1/b}$$

$$a^2+b^2-5a+5b=2ab \quad a^2+b^2=2ab$$

$$\sqrt{x+3}+5 = \sqrt{4-x} \quad \frac{12+x-x^2}{2\sqrt{x+3}+11} \quad 12+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$$

$$x+3+5+10\sqrt{x+3} = (4-x)(4x+13+4\sqrt{x+3}+11)$$

$$x+8+10\sqrt{x+3} = 10x+48+152+16\sqrt{x+3} \quad (2)$$

$$4x^2+13x = 15x+44+2\sqrt{x+3}$$

$$4x^2$$

$$4x^2-2x-44 = 2\sqrt{x+3} \quad 2x^2-x=22+\sqrt{x+3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. b_1 -первый; 9-значная

$$9^6 b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; \quad 9^{12} b_1 = 5-x; \quad 9^{14} b_1 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$x = -1 \quad 9^6 b_1 = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 9^{14} b_1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 9^8 = (x+1)^2 \quad 9^4 = |x+1|, \Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{|(x+1)|^3}$$

$$9^{20} \cdot b_1^2 = |x+1|^5 \cdot \frac{(5-x)^2}{|(x+1)|^6} = (13x-35) \cdot \frac{1}{|x+1|}$$

~~$$(13x-35) \cdot x^2 = (13x-35)$$~~

$$\frac{(5-x)^2}{|x+1|} = \frac{13x-35}{|x+1|}, \quad x \neq -1, \Rightarrow (5-x)^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

№2. $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2-z}$

$$x^2 - 23x + 20 = 0$$

$$x = 3; 20$$

Но $x \neq 20$ по $9^{12} b_1 \geq 0$

$$x+3 \geq 0 \quad x \geq -3$$

$$4 \geq x+2 \quad -3 \leq x \quad z \leq 4-x$$

$$z \leq 7$$

$$y+x-x^2+z \geq 0 \quad 7 \geq z$$

$$y+x-x^2 \geq -7 \Rightarrow \begin{cases} y+x-x^2 \geq -7 \\ \frac{1}{4} \geq x-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 3 \\ 3 &\geq -x \\ 4 &\geq 1-x \end{aligned}$$

$$x-x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y \geq -7\frac{1}{4}$$

ВОО

$$|y+1| + 3|y-12|$$

$$\begin{aligned} -x-1-3|y+36| \\ -4y+35 \end{aligned}$$

$$-1 + -12 + +$$

$$|y+1-3y+36|$$

$$|y+1+3y-36|$$

$$37-2y$$

$$4y-35$$

При $y \in [29; -17]$
 $f(y) \in [39; 64]$

$$f(y) \in [13; 39)$$

$$f(y) \in (13; +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } \sqrt{13-2} \leq 13, \text{ то } a \leq 13 \text{ и } f(y) \geq 13$$

$$\text{то } z=0; y=12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

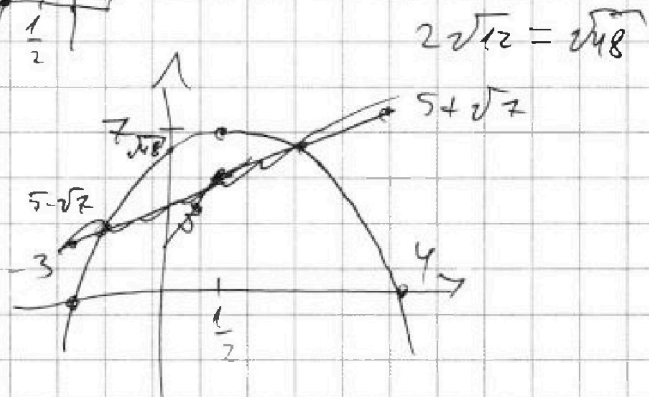
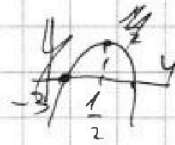
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} x+3 + 4-x+5 + 2 \cdot 5\sqrt{x+3} &= 2 \cdot 5\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} \\ = 4(x+3)(4-x), &\Rightarrow 12 + 10a = 10b - 2ab = 4a^2b^2, \end{aligned}$$

$$x \in [-4; 3] \cup [5-3; 4]$$



$$x = -3: 5 - \sqrt{7}$$

$$x = 4: 5 + \sqrt{7}$$

2 корня есть.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} t &= x+3.5 & x &= t-3.5 \\ \Rightarrow \sqrt{t-0.5} - \sqrt{0.5-t} + 5 &= 2\sqrt{t-3.5} \end{aligned}$$

$$x - 3.5 = t, \Rightarrow x = t + 3.5$$

$$\sqrt{t+3.5} - \sqrt{3.5-t} + 5 = 2\sqrt{(t-3.5)(t+3.5)} = 2\sqrt{t^2 - 3.5^2}$$

$$x+3 + 4-x+25 + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)(x-4)} = 4(x+3)(4-x)$$

$$8\sqrt{x+3} - 12\sqrt{4-x} + 27 = 4(x+3)(4-x)$$

$$\begin{cases} 8a - 12b + 27 = 4a^2b^2 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases}$$

$$-4b - 13 = 4a^2b^2 - 16ab$$

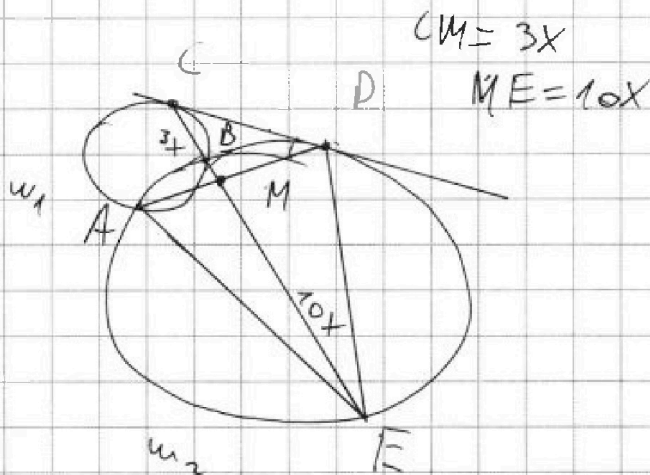
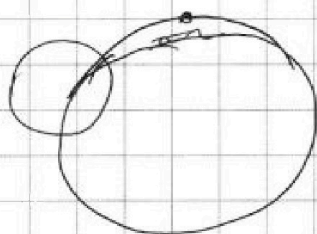


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5. Формула внеписи

$$(A \cup B \cup C) = A + B + C - (A \cap B) - (B \cap C) - (A \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

$A = B = C = C_{25000}^4$ A - центр B, C - сред. линии.

$A \cap B \cap C$ - одна точка в вершине Δ и прямоугольника
Дуги соответствовать точ. окружн. $A \cap B \cap C = C_{12500}^2$

$A \cap B$:

\odot	\odot
\odot	\odot

 $C_{12500}^2 = A \cap B = B \cap C$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$A \cap B = A \cap B \cap C = B \cap C = A \cap C$

Ответ: $3C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

№3 $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$; $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p = f(t)$

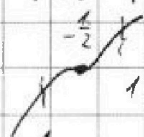
$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$

$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$4t^2 + 4t + 1 = 0 \quad (2t+1)^2 = 0$

$t = -\frac{1}{2}$



Всегда одно решение

экстремум

$p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} + 5 = \sqrt{4-x} (2\sqrt{x+3} + 1)$$

$$x+8 + 10\sqrt{x+3} = (4-x)(4x+12+1 + 4\sqrt{x+3}) =$$

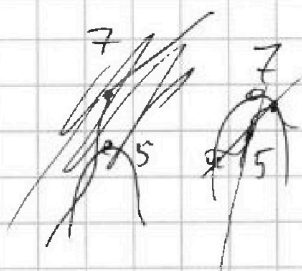
$$= 16x+52 + 16\sqrt{x+3} - (4x^2 + 13x + 4\sqrt{x+3} \cdot x)$$

$$4x^2 + 13x + 4\sqrt{x+3} \cdot x = 15x + 44 + 6\sqrt{x+3}$$

$$a-b+5=2ab$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right) = 0$$

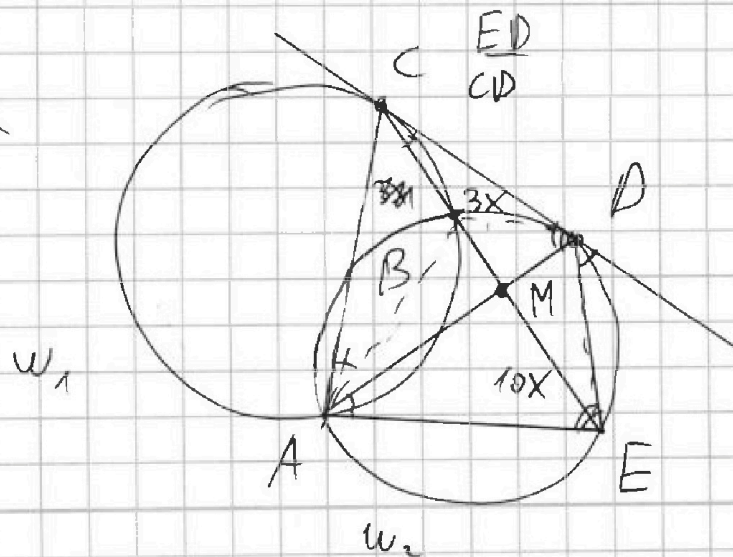
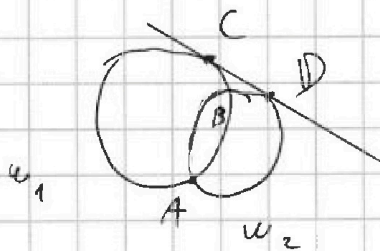


$$\sqrt{x+3} = -\sqrt{4-x}$$

$$\Rightarrow 4-x=0$$

$$x=3 < 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. (Продолжение). При $x < \frac{35}{13}$:

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x, \quad x^2 + 3x - 10 = 0. \quad \text{По т. Виета}$$

$x_{1,2} = 2; -5$. Заметим, что $b_1 > 0$ та $b_{21} = -10$.

$$b_{15} = \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}, \quad \text{то } (13x - 35)(x + 1) \geq 0 \\ \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow x = 2$ - не подходит, \Rightarrow единств. подходящее $x = -5$

Ответ: $x = -5; 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{1-x-0} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0} \quad x^2-x-12=$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \stackrel{?}{=} 7 \quad = (x-4)(x+3)$$

$$x \geq 3; \quad x \leq 4$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

№3. $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$

$$= 2\cos^2 x - 1 - 2\sin x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cdot \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$4\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Пусть $t = \cos x$

$$\Rightarrow 4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = p,$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$3t^3 + 3t^2 + t^3 + 3t^2 + 3t + 3 = p - 2$$

$$3t^2(t+1) + (t+1)^3 = p-2, \quad (t+1)(t^2+2t+1+3t^2) = p-2$$

$$(t+1)(4t^2+2t+1) = p-2$$

№6. $a > b$

$$a-b \neq 0 \pmod{3}$$

$$(a-c); (b-c) = p^2. \Rightarrow \text{Или } \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-c = -p^2 \\ a-c = -1 \end{cases}$$

Или $a-c \neq b-c$, т.е. $a > b$ $\Rightarrow a-b = p^2 - 1 \quad b-a = -p^2 + 1$

$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

если $p \equiv 3k$, то $p-1$ или $p+1 \equiv 3$

$$\Rightarrow p = 3$$