



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

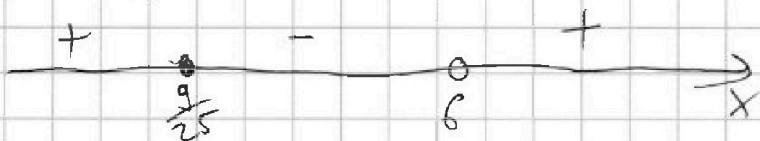
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Купец  $\{a_n\}$  - решил. Профессия. Форга

$$\begin{cases} a_7 = a_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ a_9 = a_1 q^8 = x+3 \\ a_{15} = a_1 q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

Ограничения на  $x$ :

$$\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; \infty).$$



$$x+3 = a_1 q^8 = a_1 q^6 \cdot q^2 = q^2 \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ тогда}$$

$$x+3 = q^2 \sqrt{(25x-9)(x-6)},$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = a_1 q^{14} = a_1 q^6 \cdot q^8 = q^8 \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \text{ тогда}$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^8 \sqrt{(25x-9)(x-6)}.$$

если  $x = \frac{9}{25}$ , то  $a_7 = a_{15} = 0$ ,  $a_9 = 3 + \frac{9}{25}$  - не подходит.

тогда  $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \neq 0$ , отсюда

$$\begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} \\ q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \frac{1}{(x-6)^2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~т.к.~~ т.к.  $g^2 \geq 0$ , то  $x+3 \geq 0$  (иначе равенство не будет).

тогда

$$\begin{cases} g^4 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} \\ g^4 = \frac{1}{x-6} \end{cases}$$

$$\frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6}$$

1)  $x \geq 6$ :  $\frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6} \quad | \cdot (x-6) \neq 0$ ;

$$(x+3)^2 = 25x-9; \quad x^2 + 6x + 9 = 25x - 9; \quad x^2 - 19x + 18 = 0;$$

~~т.к.~~, откуда  $\begin{cases} x=1 - \text{не подходит} \\ x=18 \end{cases}$

2)  $x < 6$ :  $(x+3)^2 = -25x+9; \quad x^2 + 6x + 9 = -25x + 9;$

$$x^2 + 31x = 0; \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-31 - \text{не подходит} \end{cases}$$

Ответ:  $x=0, x=18$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда  $x = -2 + \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ ,

$x = -2 - 2\sqrt{2}$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ .

Ответ:  $x = -2 + \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ ;

$x = -2 - 2\sqrt{2}$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b+4=2ab;$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab;$$

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2.$$

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 = (a-b) + 4;$$

Пусть  $a-b=t$ . Тогда  $t^2 + t + 4 = a^2 + b^2$

$$= x+5+1-x = 6 = t^2 + t + 4; \quad t^2 + t - 2 = 0;$$

$$\begin{cases} t=1 & (1) \\ t=-2 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 1; \quad \sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{1-x};$$

$$x+5 = 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x}; \quad 2\sqrt{1-x} = 2x+3;$$

$$4(1-x) = 4x^2 + 12x + 9 = 4 - 4x;$$

$$4x^2 + 16x + 5 = 0; \quad 4(x^2 + 4x + 4) + 5 = 16;$$

$$4(x+2)^2 = 11; \quad x+2 = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}, \quad x = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$2x+3 \geq 0; \quad x \geq -\frac{3}{2}; \quad \text{но } -2 - \frac{\sqrt{11}}{2} < -2 - \frac{3}{2} < -\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{x = -2 + \frac{\sqrt{11}}{2}}$$

$$(2): \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = -2; \quad \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 2;$$

$$x+5 = 4 + 1 - x - 4\sqrt{1-x}; \quad 4\sqrt{1-x} = -2x$$

$$2\sqrt{1-x} = -x; \quad 4(1-x) = x^2; \quad x^2 + 4x - 4 = 0;$$

$$(x+2)^2 = 8; \quad x+2 = \pm 2\sqrt{2}; \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}, \quad \text{но } x \leq 0,$$

$$x = -2 + 2\sqrt{2} > 2 + 1 + 2 > 0. \quad \boxed{x = -2 - 2\sqrt{2}}$$

~~Решение:~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Рассмотрим видое ур-е.

$$\text{Пусть } t = |y+4| + |y-5|.$$

Решим  $t$  на разбора промежутков:

$$1) \boxed{y \leq -4}: t = -y-4-4y+20 = -5y+16,$$

$$5y = 16-t; \text{ т.к. } 5y \leq -20, \text{ то } 16-t \leq -20;$$

$$t-16 \geq 20; \boxed{t \geq 36}.$$

$$2) \boxed{-4 \leq y \leq 5}: y+4-4y+20 = 24-3y = t;$$

$$3y = 24-t; \text{ т.к. } -12 \leq 3y \leq 15; \text{ то}$$

$$-12 \leq 24-t \leq 15; -36 \leq -t \leq -9;$$

$$\boxed{9 \leq t \leq 36}$$

$$3) y \geq 5: t = 5y-16; 5y = t+16;$$

$$5y \geq 25, \text{ тогда } t+16 \geq 25; \boxed{t \geq 9}$$

Отсюда  $t \geq 9$ , при этом равенство достигается при  $y=5$ .

$$\text{Но } t = \sqrt{81-2z^2} \leq \sqrt{81} = 9, \text{ то есть } 9 \leq t \leq 9,$$

$$\text{Отсюда } t=9, \boxed{y=5, z=0}$$

Подставим в первое ур-е:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2};$$

$$\text{Пусть } a = \sqrt{x+5}, b = \sqrt{1-x}. \text{ Тогда } a-b+4=2ab$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1;$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10.$$

Пусть  $\cos x = t$ . ~~тогда~~  $-1 \leq t \leq 1$ . Тогда

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t =$$

$$= 4pt^3 - 6t + 10; \quad 4pt^3 - t^2 + 4t - 4 = 0;$$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0; \quad t \neq 0$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 1; \quad p = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$t^2 = 7.7 \\ = 49.1.$$

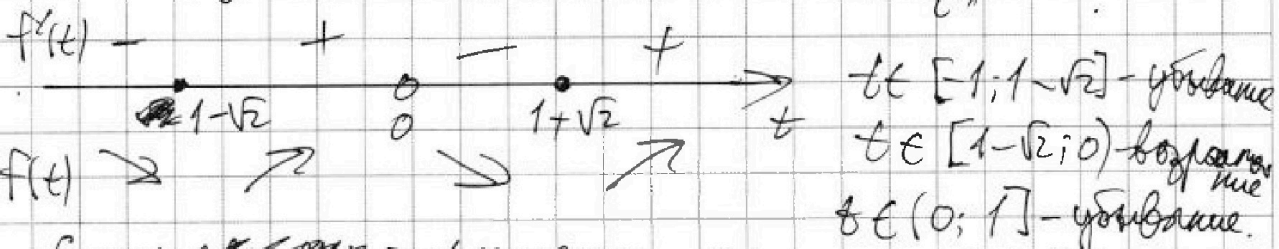
Рассмотрим  $f(t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$

$$f'(t) = \frac{(3t^2 - 3t + 1)' t^3 - 3t^2 (3t^2 - 3t + 1)}{t^6} =$$

~~$$\frac{6t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^6} - \frac{9t^4 - 9t^3 + 3t^2}{t^6} = \frac{6t^3 - 3t^2 + 3t - 1 - 9t^4 + 9t^3 - 3t^2}{t^6} =$$~~

$$= \frac{t(6t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 3t^4 + 9t^3 - 3t^2}{t^6} = \frac{6t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 9t^3 - 3t^2}{t^6} =$$

$$= \frac{3t^4 - 6t^3 - 3t^2}{t^6} = 3 \frac{t^2 - 2t - 1}{t^4} = 3 \frac{(t - 1 - \sqrt{2})(t - 1 + \sqrt{2})}{t^4}$$



Если ~~тогда~~  $\geq 1$  решение, если  $p \geq f(1 - \sqrt{2})$   
и  $p \geq f(1)$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(1) = 1, \quad f(1-\sqrt{2}) = \frac{7-3\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}} < 1.$$

$$\boxed{p \geq \frac{7-3\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}}} \quad \text{При этом если}$$

$$\frac{7-3\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}} \leq p \leq 1 - \text{ур-е имеет 1 корень,}$$

если  $p > 1$  - 2 корня.

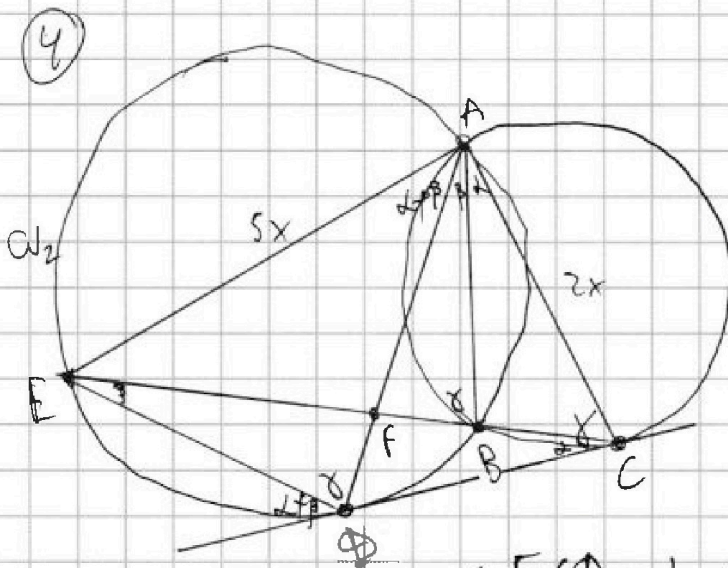


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AD \cap CE = F$ ,  
 $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle BAF = \beta$ .  
 Тогда по свойствам  
 окружности,  
 хорды  $AD$  и  $CE$  взаимно  
 перпендикулярны и секущая  
 и т. о. вытекает что  $\angle$   
 $\angle ECD = \alpha$ ,  $\angle BED = \beta$ ,  $\angle (ED; CD) = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \angle EAD = \alpha + \beta$ , т.е.  $\angle EAF = \angle FAC \Rightarrow$

$AF$  - биссектриса в  $\triangle CAE$ , тогда  $\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{5}{2}$ .

Пусть  $AC = 2x$ . Тогда  $AE = 5x$ .

Если  $\angle EDA = \gamma$ , то  $\angle EBA = \gamma$ ,  $\angle ACB = \gamma - \alpha$ ,  $\angle ACD = \gamma$ .

$\triangle EAD \sim \triangle ACD$  по двум углам, тогда

$$\frac{AD}{5x} = \frac{2x}{AD} = \frac{CD}{ED}; \quad AD^2 = 10x^2; \quad \frac{AD}{5x} = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{\sqrt{10}}{5}; \quad \frac{ED}{CD} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .



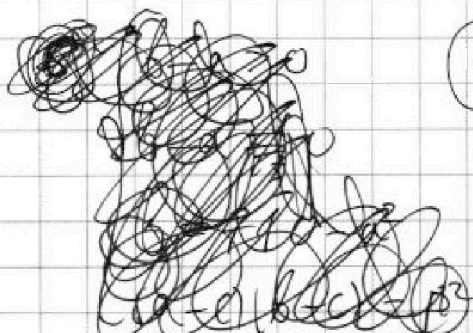


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



5 ~~Рассмотрим 3 случая~~

Рассмотрим 3 случая

1) Центральная симметрия:

Заметим, что клетки разби-

ваются на пары, которые однозначно определяются

одной из парных клеток. Разделим доску на две

$100 \times 200$ , количество вариантов - число способов

расставить 4 клетки на одну доску -  $C_{20000}^4$ .

2) "Осевая" симметрия -  $C_{20000}^4 \cdot 2$  (разные симметрии)

3) одновременно "осевая" и ~~центральная~~ центральная:

Разделим доску на 4 доски  $50 \times 200$ .

Каждая доска может ~~заполняться~~ <sup>заполняться</sup> на одну из досок

2 клетки -  $C_{10000}^2$ .

Всего: ~~способов~~ <sup>способов</sup> - центральная

$\therefore 2C_{20000}^4 + C_{20000}^2 - C_{10000}^2$ .

Ответ:  $3C_0^4$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \begin{cases} b-a > 0 \\ b-a \neq 0 \\ b = 710 - a^2 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \end{cases}$$

$$b-a = 710 - a^2 - a > 0;$$

$$\Leftrightarrow -27 \leq a \leq 26,$$

$$b-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \text{ - не подходит (т.к. } a \neq b) \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ - не подходит (т.к. } b > a)$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \\ a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ (и аналогичные со знаком "-").}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\leftarrow c = a-1; \quad b-c = \boxed{b-a+1 = 711 - a^2 - a = p^2}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$$\leftarrow c = b+1; \quad a-c = a-b-1 = -p^2;$$

$$\boxed{b-a+1 = p^2}$$

$$\boxed{711 - a^2 - a = p^2}$$

$$a^2 + a + p^2 - 711 = 0;$$

$$a_1 + a_2 = -1$$

$$a_1 a_2 = p^2 - 711$$

~~$$a^2 + a + p^2 - 711 = 0;$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\textcircled{6} \begin{cases} b-a \neq 3k \leftarrow \\ b-a > 0 \leftarrow \\ a^2+b=710 \leftarrow \\ (a-c)(b-c)=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a=710-a^2-a > 0; \\ a^2+a-710 < 0; \\ a^2+a+\frac{1}{4} < 710+\frac{1}{4}; \\ (a+\frac{1}{2})^2 = \frac{2841}{4}; \end{cases}$$

$$2 \quad (50+1)(50+1) = 2500 + 100 + 1 = 2601;$$

$$\begin{array}{r} 2841 \quad | \quad 3 \\ -27 \quad | \quad 947 \\ \hline 12 \quad | \quad 21 \end{array}$$

$$\text{~~2500~~ = } 52^2 = 2704$$

$$50+4 = 2500 + 400 + 4 = 2904$$

$$2 \quad \text{~~2500~~ = } 52^2 = 2704$$

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{49}{2} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{4}$$

$$\text{~~10 + \frac{1}{2} = 5.5~~$$

$$a=25: \quad b=25+25=710;$$

$$a=26: \quad b=76+26=102 < 700$$

$$a=-26: \quad b=76-26=50 < 710; \quad \text{~~a=-27: } 729-27=702 < 710~~$$

$$\text{~~27 \leq a \leq 26~~$$

$$b-a \neq 3k; \quad b-a = 710-a^2-a \neq 3k;$$

$$a^2+a-710 \neq 3k; \quad a^2+a \neq 3z;$$

$$a \equiv 0 \pmod{3} \checkmark, \quad a \equiv 1 \pmod{3} \otimes, \quad a \equiv 2 \pmod{3} \otimes, \quad a \equiv -26 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$(a-c)(b-c)=p^2; \quad a-c \text{ и } b-c \text{ имеют общий множитель}$$

$$ab-bc-ac+c^2=p^2; \quad b+a=710-a^2+a;$$

$$ab-c(a+b)+c^2=ab-c(710-a^2+a)+c^2=p^2;$$

$$ab-710c+a^2c-ac \neq p^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$711 - a^2 - a = p^2;$$

~~711 - a^2 - a = p^2~~

$$a=2: 4+2; \quad a=3: 9+3=12; \quad 699;$$

$$711 - a(a+1) = p^2;$$

$$a^2 + a - 711 = -p^2; \quad a^2 + a + p^2 - 711 = 0;$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -1 \\ a_1 a_2 = p^2 - 711 \end{cases}$$

$$D = 1 - 4p^2 + 2844 = 2845 - 4p^2 = k^2$$

$$k^2 + 4p^2$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 27.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$711 - 49 = 700 - 38 = 662.$$

$$711 - 121 = 600 - 10 = 590;$$

~~$$711 - 676 = 35$$~~

$$\frac{711}{-676} = \frac{-700}{-665} = \frac{35}{35}$$

$$a \neq 1$$

$$\begin{array}{r} 711 \overline{) 3} \\ \underline{63} \phantom{0} \\ 81 \phantom{0} \\ \underline{79} \phantom{0} \end{array}$$

~~$$711 - 25 = 700 - 44 = 686$$~~

$$711 - 25 = 700 - 44 = 686$$



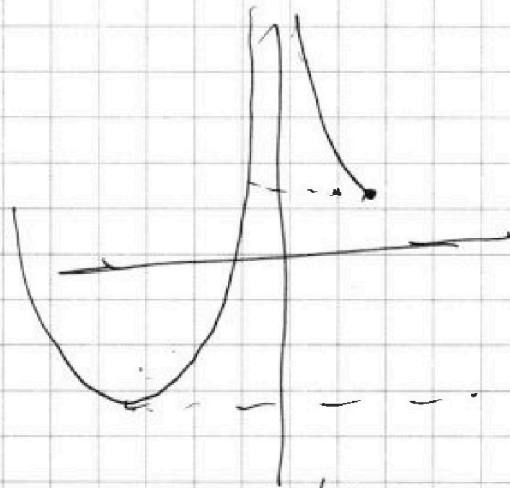
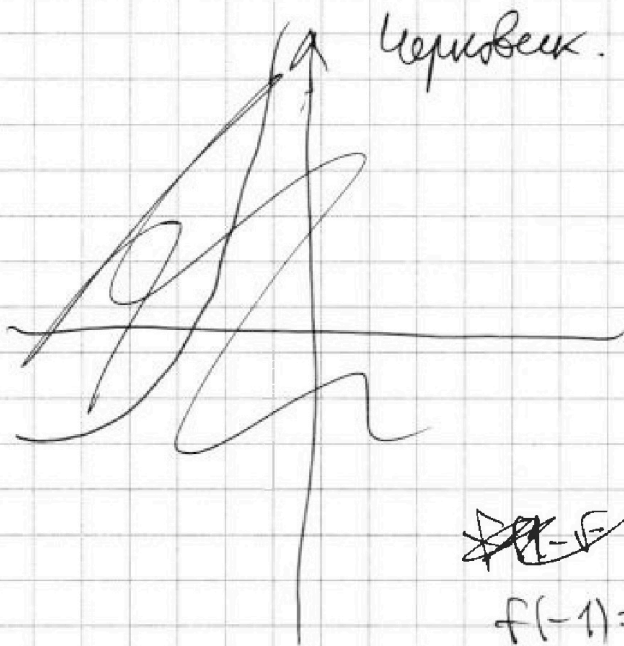


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~$f(x) = \sqrt{x}$~~

$c = a - 1;$

$f(-1) = \frac{3+3+1}{1} = 7;$

~~$b = a - p^2$~~

$b - c = b - a + 1$   
 $= (7 + 1 - a^2 - a = p^2)$

$b - a = 1 - p^2 > 0;$

$f(1) = 1;$

$a^2 + a - 7 \cdot 1 = -p^2;$

$(a + \frac{1}{2})^2 - 7 \cdot 1 = \frac{1}{4} - p^2;$

$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$

$b - a = p^2 - 1; f(1 - \sqrt{2}) ?$

~~$f(1 - \sqrt{2}) =$~~   $\frac{3 + 4 - 6t - 3 + 3t + 4}{t^3} = \frac{3(1 - \sqrt{2}) + 4}{|1 - \sqrt{2}|^3} =$

$= \frac{7 - 3\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}} = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}}$

$= \frac{7 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}}$

$= 1 - \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 7}$

~~$f(1 - \sqrt{2}) =$~~   
 $(1 - \sqrt{2})^3 = (1 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$

$= 3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4$   
 $= 7 - 5\sqrt{2}$

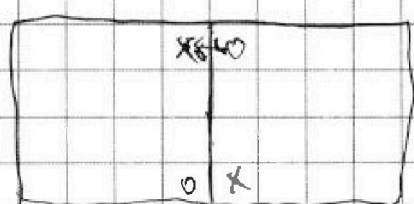
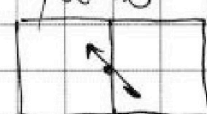
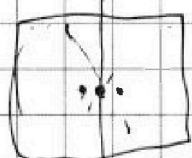
$7 - 5\sqrt{2} \approx 7 - 5 \cdot 1,4$

*рационализация*

$\frac{7 - 3 \cdot 1,41}{7 - 5 \cdot 1,41} = \dots$   
 $= -0,001$

$\begin{cases} b - a > 0 \\ b - a \neq 3k \\ a^2 + b = 790 \end{cases}$   $b = 710 - a^2$   
 $710 - a^2 - a > 0;$

④





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$4x^2 + 16x + 5 = 0; \quad \Delta = 64 - 20 = 44 = 4 \cdot 11$$

$$x_1 = \frac{-8 \pm 2\sqrt{11}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2}} = \sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{3 - \frac{\sqrt{11}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{11}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{11}}{2}}$$

$$= 1? \quad 3 + \frac{\sqrt{11}}{2} + 3 - \frac{\sqrt{11}}{2} - 2\sqrt{(3 + \frac{\sqrt{11}}{2})(3 - \frac{\sqrt{11}}{2})}$$

$$6 - 2\sqrt{9 - \frac{11}{4}} = 6 - \sqrt{36 - 11} = 6 - 5$$

$$\sqrt{1-x} - 2 \geq 0; \quad \sqrt{1-x} \geq 2; \quad 1-x \geq 4; \quad x \leq -3$$

$$x - 1 \leq -3;$$

$$x \leq -2$$

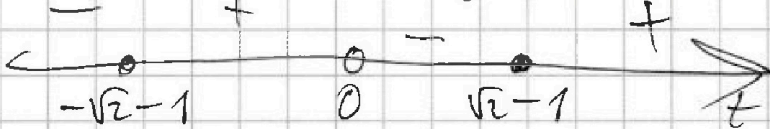
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} = a$$

$$a^2 = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$a^2 = 6 - 2\sqrt{9-8} = 4; \quad a = \pm 2$$

$$(3t^2 - 3t + 1)' = 6t - 3$$

$$\frac{(t-1)^2 - 2}{t^4} = \frac{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}{t^4}$$



$t \in [-1; 1]$ :  $t \in [-1; 0]$  - возрастающее

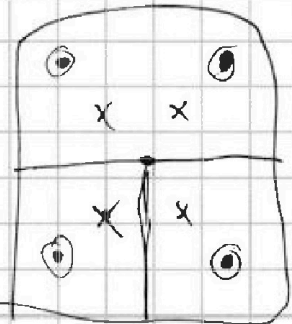
$t \in [0; \sqrt{2}-1]$  - убывающее

$t \in [\sqrt{2}-1; 1]$  - возрастающее

Handwritten calculations for the derivative of  $f(t) = \sqrt{1-\sqrt{2}}$ :

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{2}}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2}}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(1-2)} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$Pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0; \quad Pt^3 = 3t^2 - 3t + 4;$$

$$P = \frac{3t^2 - 3t + 4}{t^3} = \frac{3}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^3}$$

$$= 3t^{-1} - 3t^{-2} + 4t^{-3} = f(t);$$

$$g(k) = k^a; \quad g'(k) = a k^{a-1};$$

$$f'(t) = -3t^{-2} + 6t^{-3} - 12t^{-4} = \frac{-3}{t^2} + \frac{6}{t^3} - \frac{12}{t^4} =$$

$$= \frac{-3}{t^2} \left( \frac{2}{t} - \frac{4}{t^2} \right) = \frac{-3}{t^2} \left( \frac{2t - 4}{t^2} \right) =$$

$$= \frac{-3(2t - 4)}{t^4} = \frac{12 - 6t}{t^4} \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{2-t}{t^4} > 0; \quad \frac{2-t}{t^4} > 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \\ \circ \quad \circ \\ 0 \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow t$$

go  $t=2$  возвращаеме.  $f(2) = 4 = P$   
 $f(-1) = \frac{6+4}{-1} = -10 = P.$

$$t = \frac{1}{10}: \quad \frac{3 \cdot 0,01 - 3 \cdot 0,1 + 4}{0,001} = \frac{0,03 - 0,3 + 4}{0,001} =$$

$$= 30 - 300 + 4000 = ??$$

$$t = \frac{1}{2}: \quad 3 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 32 - 12 + 6 = 26.$$

$$t = 2: \quad \frac{12 - 6 + 4}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

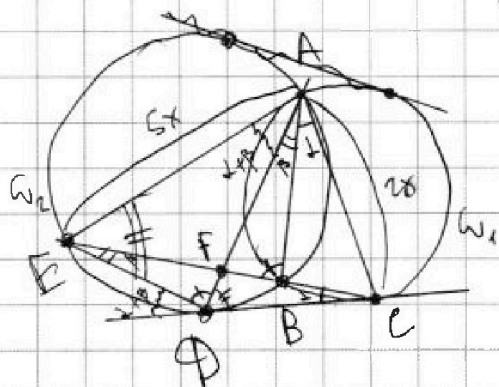
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$\angle + \beta + \alpha + \theta = 180^\circ$$



$\triangle ACD \sim \triangle EFD$

$$\frac{AD}{5x} = \frac{2x}{10x} = \frac{CD}{DE}$$

$$AD = 10x^2$$

$$\frac{AD}{5x} = 2x$$

$$\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = \frac{CD}{DE}$$

$\angle EFD = 5/12$

$$\frac{AD}{5x} = \frac{10x^2}{5x} = 2x$$

$$2x = \frac{2}{5x}$$

$$\frac{10x^2}{5x} = \frac{2x}{10x} = 2x = \frac{2}{5x}; \quad \frac{2x}{10x^2} = \frac{2}{10x} = \frac{1}{5x}$$

$$AD = x\sqrt{10}$$

~~$x\sqrt{10}$~~

$$\frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{x\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} a=b & \leftarrow \\ b-a \neq 3 & \leftarrow \\ (a-d)(b-d) = p^2 & \leftarrow \\ a^2+b = 710 & \leftarrow \\ a^2+c \neq (b-d) = db-bc-ac+c^2 = p^2 & \leftarrow \end{cases}$$

~~$a \neq 710 \geq a^2$~~   
 $b = 710 - a^2$   
 $b - a > 0$   
 $b - a \neq 3k$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x}; \quad \sqrt{x+5} = a, \sqrt{1-x} = b.$$

$$a - b + 4 = 2ab; \quad 2ab - a + b - 4 = 0;$$

$$a + 2b = 4; \quad [4 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{5}]; \quad a - b + 4 = 2ab \Rightarrow a - b = 2ab - 4;$$

$$a(2b - 1) + b - 4 = 0; \quad a(2b - 1) = 4 - b; \quad a^2 = 2ab + b^2 = (2ab - 4) + b^2;$$

$$a = \frac{4 - b}{2b - 1}; \quad x + 5 = a^2; \quad \sqrt{1 - x} = b^2.$$

$$a^2 = \frac{16 - 8b + b^2}{4b^2 - 4b + 1}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x}, \quad -5 \leq x \leq 1.$$

$$x = -3: \sqrt{2} - 2 + 4 = \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2 \cdot 4} = 4\sqrt{2};$$

$$x = -4: 1 - \sqrt{5} + 4 = 5 - \sqrt{5};$$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10;$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cos^3 x - 2 \cos x =$$

$$-2(1 - \cos^2 x) \cos x = 2 \cos^3 x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \cos x = t;$$

$$p(4t^3 - 3t) + 3(p+4)t = 6(2t^2 - 1) + 10;$$

$$4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t = 12t^2 - 6 + 10;$$

$$4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0; \quad pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0;$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

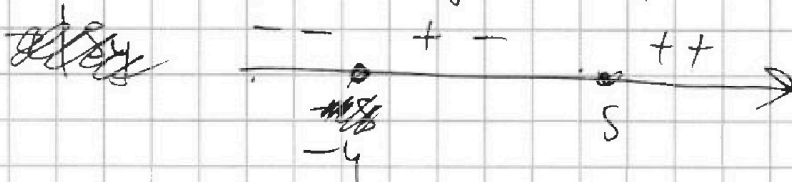
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

② (2):  $|y+4| + 4|y-5| = |y+4| + |4y-20| \geq$



1)  $-y-4 - 4y+20 = -5y+16 = t;$

$5y = 16-t; y = \frac{16-t}{5}; y \leq -4; \frac{16-t}{5} \leq -4;$

$16-t \leq -20; t-16 \geq 20; \boxed{t \geq 36}$

$$\begin{array}{r} 28 \\ -29 \\ \hline 15 \\ -20 \\ \hline -5 \end{array}$$

2)  $y+4 - 4y+20 = 24-3y = t; -4 \leq y \leq 5;$

$-12 \leq 3y \leq 15;$

$3y = 24-t; -12 \leq 24-t \leq 15;$

$-36 \leq -t \leq -9; \boxed{9 \leq t \leq 36}$

3)  $5y+4-20 = 5y-16 = t;$

$5y = t+16; y \geq 5; 5y \geq 25; t+16 \geq 25;$

$\sqrt{81-t^2} \leq \sqrt{81} = 9; \boxed{t \geq 9}$

$\boxed{z=0}; \boxed{y=5}$

$5-4x-x^2 = -x^2-4x-4+9 = 9-(x+2)^2$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{9-(x+2)^2}$

$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{3}-\sqrt{3}+4=6; \\ 4-\sqrt{6}=0; \\ 4+\sqrt{6}=0; \end{cases}$

$\sqrt{5}-1+4 = \sqrt{5}-3 = 2\sqrt{5}$

$(3-x-2)(3+x+2) = (1-x)(5+x)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\textcircled{1} a_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \quad a_9 = x+3, \quad a_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a_7 = a_1 q^6, \quad a_9 = a_1 q^8, \quad a_{15} = a_1 q^{14}$$

$$\begin{cases} a_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ a_1 q^8 = x+3 \\ a_1 q^{14} = \frac{1}{x-6} \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

$$a_1 \neq 0; \quad a_1^2 q^{14} = (x+3)$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} = a_1 \cdot \frac{1}{x-6} \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\sqrt{25x-9} = k, \quad \sqrt{x-6} = m.$$

$$\begin{cases} a_1 q^6 = km \\ a_1 q^8 = x+3 \\ a_1 q^{14} = \frac{k}{m^3} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 q^{14} = km(x+3) = a_1 \cdot \frac{k}{m^3}; \\ k \neq 0; \quad m(x+3) = \frac{q}{m^3}; \end{cases}$$

$$a_1 q^6 \cdot q^2 = x+3 = q^2 \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$a_1 q^{14} = a_1 q^8 \cdot q^6 = \frac{x+3}{q^2} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^8 \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} \\ q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \frac{1}{(x-6)^2} \end{cases}$$

$$q^4 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)}; \quad \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6}; \quad x-6 \neq 0;$$

$$q^4 = \frac{1}{x-6}; \quad (x+3)^2 = 25x-9; \quad x^2 + 6x + 9 = 25x - 9;$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0;$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик. упражнение №1

$$x^2 - 19x + 18 = 0; \begin{cases} x=1 \text{ - не в} \\ x=18 \end{cases} \quad (1)$$

$$2) \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = -\frac{1}{x-6}$$

$$\sqrt{4-4x-4x-8} = \sqrt{4x-8} = \sqrt{4x-2\sqrt{4x}}$$

$$\sqrt{4x-8} = \sqrt{4x-2\sqrt{4x}}$$

$$(x+3)^2 = -25x+9; \quad x^2+6x+9 = -25x+9;$$

$$x^2+31x=0; \begin{cases} x=0 \quad (2) \\ x=-31 \quad (3) \end{cases} \quad \text{Оц. на } x: (25x-9)/(x-6) \geq 0$$

$$(1): \sqrt{(25 \cdot 18 - 9) + 4x}$$

$$= \sqrt{9(50-1) + 4x} = 3 \cdot 7 \cdot 4\sqrt{3} = 84\sqrt{3}, 21,$$

$$\sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12 \cdot \sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 7}{48\sqrt{3}} = \frac{7}{16\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} a_1 q^6 = 84\sqrt{3} \\ a_1 q^8 = 21 \\ a_1 q^{14} = \frac{7}{16\sqrt{3}} \end{cases} \quad q^2 = \frac{21}{84\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}; \quad q^8 = \frac{1}{4^4 \cdot 9} = \frac{1}{2^8 \cdot 9};$$

$$q_1 \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9} = 21; \quad a_1 = 21 \cdot 2^8 \cdot 9$$

$$\sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}; \quad 3; \quad \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\begin{cases} a_1 q^6 = 3\sqrt{6} \\ a_1 q^8 = 3 \\ a_1 q^{14} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{cases} \quad q^2 = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad q^8 = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36};$$

$$a_1 = 3 \cdot 36; \quad 36 q^6 = \sqrt{6};$$

$$q^6 = \frac{\sqrt{6}}{36^4} = \frac{1}{6\sqrt{6}}; \quad q^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$[4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}]; \quad [1, 5; 6, 5]$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab;$$

$$a-b+4 = 2ab;$$

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2;$$

$$a-b+4 = a^2 + b^2 - (a-b)^2;$$

$$a-b=t. \quad t^2 + t + 4 = a^2 + b^2 = x + 5 + 1 - x = 6. \quad t^2 + t + 4 = 6;$$