



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть во-седьмой член геом-ти, в которой q -
отношение соседних членов \Rightarrow 9-ый член $= b_0 q^2$,

15-ый $= b_0 q^8$

$$b_0 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}$$

$$x \neq 6$$

$$x = \frac{9}{25} \text{ - решение не является}$$

$$b_0 q^2 = x+3$$

$$b_0 q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$25x-9 \neq 0 \text{ (т.к. } b_0=0 \Rightarrow b_0 q^2=0 \Rightarrow x+3 = \frac{9}{25} + 3 = 0)$$

$$\frac{b_0 q^8}{b_0} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = |x-6|$$

$$q^2 = \sqrt{|x-6|}$$

$$x+3 = b_0 q^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \sqrt{|x-6|}$$

$$\text{I } x > 6 \Rightarrow |x-6| = x-6$$

$$25x-9 > 0 \Rightarrow x+3 = \sqrt{25x-9}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$(x-18)(x-1) = 0$$

$$x > 6 \Rightarrow \boxed{x=18}$$

$$b_0 = \sqrt{21^2 \cdot 12} = 21\sqrt{12}$$

$$b_0 q^2 = 21$$

$$b_0 q^8 = \sqrt{\frac{21^2}{12^3}} = \frac{21}{12\sqrt{12}}$$

$$\text{II } x < 6 \Rightarrow x-6 < 0 \Rightarrow 25x-9 < 0$$

$$x+3 = \sqrt{9-25x} \quad (x+3 > 0)$$

$$x=0 \text{ не подходит}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x \Rightarrow x^2 + 31x = 0 \Rightarrow x = -31$$

$$x=0 \Rightarrow b_0 = 3\sqrt{6}$$

$$b_0 q^2 = 3$$

$$b_0 q^8 = \frac{3}{6\sqrt{6}}$$

$$x_0 = -31 \text{ не подходит, т.к. } x+3 = -\sqrt{9-25x}, \text{ а не } \sqrt{9-25x}$$

Ответ: $\{0, 18\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

Заметим, что $|y+4| + 4|y-5| \geq 9$

пусть $y+4 = a$?

$$f(a) = |a| + 4|a+9| \geq 9$$

$$I \ a \geq 0 \Rightarrow a+9 \geq 9 \Rightarrow f(a) \geq 9$$

$$II \ -9 \leq a < 0 \Rightarrow f(a) = 4a + 36 - a = 3a + 36 \geq 36 - 3 \cdot 9 = 9$$

$$III \ a < -9 \Rightarrow f(a) = -5a - 36 \geq (-5) \cdot (-9) - 36 = 9$$

Тогда $|y+4| + 4|y-5| \geq 9$, причем $f(a) = 9$ - когда $a = 9$,
т.е. $y = 5$

$$\sqrt{81-z^2} \leq 9 \Rightarrow \text{если } |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$y = 5, z = 0$$

$$\text{Тогда } \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 4$$

$$\text{пусть } \sqrt{x+5} = a, \sqrt{1-x} = b \Rightarrow \sqrt{5-4x-x^2} = a-b$$

$$a-b+4 = 2(a-b)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 16$$

$$a^2 + b^2 = 6$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{5-4x-x^2} = 4(5-4x-x^2) + 16 + 16\sqrt{5-4x-x^2}$$

пусть

$$\sqrt{5-4x-x^2} = b \geq 0$$

$$4b^2 + 18b + 10 = 0$$

$$4b^2 - 14b + 10 = 0$$

$$2b^2 + 9b + 5 = 0$$

$$2b^2 - 7b + 5 = 0$$

$$2b^2 + 6b + 17 = 0$$

$$-D = 19 - 40 = 9$$

$$b = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$b = \frac{7 \pm 3}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

$$D = 81 - 40 = 41 \Rightarrow b = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$b = \frac{7 \pm 3}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

~~... $\sqrt{5-4x-x^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5-4x-x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow 4x^2 + 20x + 15 = 0$...~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b=1 \Rightarrow 5-4x-x^2=1 \Rightarrow x^2+4x-4=0 \quad x=\pm 2\sqrt{2}-2$$
$$(x+2)^2=8 \Rightarrow$$

$$b=5/2 \Rightarrow 5-4x-x^2=\frac{25}{4}$$

$$x^2+4x+\frac{5}{4}=0$$

$$(x+2)^2 = \frac{4}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{11}{4}} - 2$$

$$\text{Ответ: } (\pm 2\sqrt{2}-2, 5, 0), (\pm \sqrt{\frac{11}{4}}-2, 5, 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = \sqrt{3} \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 2x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x -$$

$$- \sin x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) -$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{Пусть } a = \cos x$$

$$p(4a^3 - 3a) + 3(p+4)a = 6(2a^2 - 1) + 10$$

$$4a^3 p + 12a = 12a^2 + 4 \quad | :4$$

$$a^3 p + 3a - 3a^2 - 1 = 0$$

$$(a-1)^3 + a^3(p-1) = 0 \quad \text{Если } a=1, p=1$$

$$p-1 = -\frac{(a-1)^3}{a^3} \quad \text{Если } a=0, \text{ выражение} = -1 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\sqrt[3]{p-1} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1$$

$$f(b) = \frac{1}{b} - 1 \quad \text{при } b \in [-1, 1] \text{ принимает любые}$$

$$\text{значения, кроме } (-2, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{p-1} \notin (-2, 0) \quad (\text{Тогда решение есть, ведь } \exists \text{ такое } a \text{ та: } |a| \leq 1 \Rightarrow \text{ищем } x)$$

$$p-1 \notin (-8, 0)$$

$$p \notin (-7, 1)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

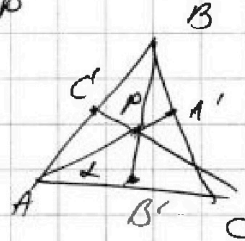
54

Вспользуемся синусовой теоремой Чебы:

В Δ -ке ABC $AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = P$

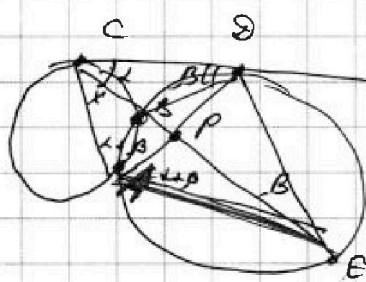
$$\frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle BAA'} \cdot \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle CBB'} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle ACC'} = 1$$

Что верно и следует из обобщенной теоремы Чебы



$$\left(\frac{AC'}{CB} \cdot \frac{BA'}{AC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \right) = 1, \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{ABB'}}{S_{BCC'}} = \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{AB}{AC}$$

~~Это следует из условия и для случая, когда P вне~~



Пусть $P = CE \cap AD$

$CP : PE = 2 : 5$ из условия

Пусть $\angle DCB = \alpha, \angle CDB = \beta$

Тогда $\angle DBP = \angle BCD + \angle BDC =$

$$\angle DAE = \alpha + \beta \text{ по впис-ти } ABDE$$

$\angle CAB = \angle BCD = \alpha$ по теореме о хорде и касательной
 $\angle BAD = \angle CDB = \beta \Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta \Rightarrow AP$ - бис-ца ΔCAE
 $\Rightarrow CP : PE = CA : AE = 2 : 5$ по теореме о бис-се в ΔCAE

Пусть $\angle ACE = x \Rightarrow \angle CEA = 180 - 2\alpha - 2\beta - x$

$\angle BDE = \angle BAD = \beta$ по впис-ти $ABDE \Rightarrow \angle AED = 180 - 2\alpha - \beta - x$

по теореме синусов в ΔACE и ΔADE :

$$\frac{CD}{DE} = \frac{\sin \beta \cdot AE}{\sin \alpha \cdot AC} = \frac{\sin x}{\sin(180 - 2\alpha - 2\beta - x)}$$

по синусовой теореме Чебы для ΔACE и ΔADE

$$\frac{\sin(x + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(x + \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(180 - 2\alpha - \beta - x)} = 1 \Rightarrow \frac{\sin(x + \beta)}{\sin(180 - 2\alpha - 2\beta - x)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме синусов и теореме Чевы для
4-ка $CAED$ и точки пересечения B диагоналей:

$$\frac{\sin B}{\sin 2} \cdot \frac{\sin X}{\sin 2} \cdot \frac{\sin B}{\sin \angle BDA} = 1 \quad \angle BDA = \angle BEA \text{ из}$$

вписанности $ABDE$
 $\angle BEA = 180 - 2\alpha - 2\beta - X$

$$\frac{\sin X}{\sin 180 - 2\alpha - 2\beta - X} = \frac{\sin^2 2}{\sin^2 B}$$

3) $\frac{CD}{DE} = \left(\frac{DE}{CD}\right)^2$

2) " $\frac{AE}{AC} = \frac{5}{2}$

$\frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сопоставим каждой точке прямоугольника 3 ^{из} C_{400}^2

симметричные точки (отн. средней линии и центра) образует прямоугольник

Пусть S_1 - кол-во вариантов с симметрией отн. ср. линии

Пусть S_2 - кол-во вариантов с симметрией отн. горизонт. ср. линии

S_3 - кол-во симметрий с центральной симметрией.

Заметим, что если ~~симметрия~~ ^{тип симметрии для точек} входит в 2 из этих 3

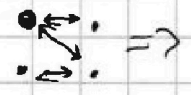
групп, то она входит и во все.

Центр. сим. + вертик.

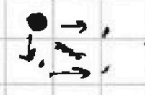
гориз. + верт.

центр. + гориз.

пусть
ее взяли



\Rightarrow есть и горизонтальная



- есть горизонт.



- есть вертик.

(Пусть \bullet мы взяли, тогда \rightarrow означают, что из этого следует, что и группу тогда мы тоже выбрали.)

$$100 \times 400 = 40000$$

$$S_1 = C_{20000}^4 \leftarrow \text{кол-во вариантов выбрать 4 точки в левой половине (тогда 4 точки мы возьмем}$$

$$S_2 = C_{20000}^4 \text{ аналогично}$$

$$S_3 = C_{20000}^4 \text{ - аналогично}$$

и из каждой пары берем 1 ^{представитель}

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = C_{10000}^2 \leftarrow \text{как мы поняли, берем 2 прямоуголь-}$$

ника из этих 8 точек. Всего их $\frac{40000}{4} = 10000$ выбрать

$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ считали дважды 2 раза \Rightarrow вычтем ^{нужно 2} его столько же

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{10000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

~~Решение~~ в $a-b=3$

$$a^2 + b = 710 \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{3}, \text{ т.к. ищем } a^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a-b=3$$

$$b \equiv 1 \pmod{3} \quad (710 - 1 \equiv 1 \pmod{3})$$

$$(a-c)/(b-c) = p^2$$

$a-c, b-c$ — целые \Rightarrow

Пусть $a-c \geq 0$

$$\Leftrightarrow b-c > a-c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1 \end{cases}$$

~~Пусть $a-c < 0$~~
 ~~$(a-c) = 1$~~
 ~~$(b-c) = p^2$~~

Пусть $a-c < 0$ } $c-a > 0$
 $b-c < 0$ } $c-b > 0$

$$\text{Тогда } (c-a)/(c-b) = p^2$$

$$c-a > c-b$$

Но заметим, что

$$\text{Тогда } p^2 - 1 = b-a \equiv 0 \pmod{3}$$

где $p \neq 3$

$$p=3 \Rightarrow b = a+3$$

$$a = c+1$$

$$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + 2 + c = 710$$

$$c^2 + 3c = 700$$

$$(c-25)(c+28) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ c=25 & c=-28 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=26 & a=-27 \\ b=34 & b=-19 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & a = c - p^2 \\ & \Leftrightarrow b > a \\ & c - a = p^2 \rightarrow c - p^2 > a \\ & c - b = 1 \rightarrow b = c - 1 \end{aligned}$$

$$b - a = p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ при } p \neq 3$$

$$p=3$$

$$a = c - 9$$

$$b = c - 1$$

$$a^2 + b = (c-9)^2 + c - 1 = c^2 - 17c + 80 = 710$$

$$c^2 - 17c = 630$$

$$c = \frac{17 \pm 53}{2} \rightarrow 35$$

$$c=35 \rightarrow \begin{matrix} a=26 \\ b=34 \end{matrix}$$

$$c=-18 \rightarrow \begin{matrix} a=-27 \\ b=-19 \end{matrix}$$

Ответ: ~~(26, 34, 35)~~
~~(-27, -19, -18)~~
~~(25, -28, -27)~~

(26, 34, 35)
(-27, -19, -18)

(-27, -19, -18) (26, 34, 35)
(-27, -19, -18) (26, 34, 35)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Состави таблицу из чисел $(a, a^2, b = 710 - a^2, b \pmod 3)$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

$a < b$
 $a^2 + b = 710$
 $a^2 + a < 710$
 $a \leq 26$
 $a < 0$
 $a^2 + b = 710 \Rightarrow b = 710 - a^2 > a$
 $710 > a^2 + a$
 $a \leq -27$
 $a - b \not\equiv 3 \Rightarrow \text{т.к. } a^2 + b \equiv 2 \pmod 3$
 $a \equiv 0 \text{ или } 2, \text{ т.к. } a^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a - b \equiv 3$
 $(a-c)(b-c) = p^2 \rightarrow \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ противоречие}$
 $\rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \text{ (т.к. } a-c < b-c)$
 $a-c=1$
 $b-c=p^2$
 т.е. если $b-a = p^2 - 1$

Тогда $c = a - 1$ (единица в меньшем)

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
$710 - a^2 = b$	710	709	706	701	694	685	674	661	646	629	610	589	566	541	514	485

Но $b-a = p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, или $p \not\equiv 3$
 Но тогда $b-a \equiv 8 \pmod 3 \Rightarrow$ единица в меньшем

Вариант - ~~если~~ $p=3 \Rightarrow b-a=8 \Rightarrow b=8+a \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a = 702 \Rightarrow a = 26$
 В этом случае $b = a + 8 \rightarrow 34$, $c = a - 1 \rightarrow 25$
 $(26, 34, 25)$
 $(-27, -19, 28)$



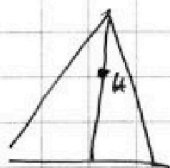
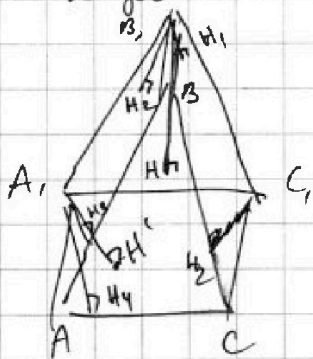
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.ч. площади двух параллелограммов равны
они симметричны относительно биссектрисы
м-ты для этих двух точек на окружн ABC - хорды



Δ -ик, $S_{AA_1B_1} = S_{BB_1C_1} = 3$
Тогда перпендикуляр из B_1 на (ABC)
попадает на бис-су Δ -ка

Δ -во: $S_{AA_1B_1} = AB \cdot B_1H_1$
где $H_1 \in AB, H_1 \in (AB)$

Аналогично $S_{BB_1C_1} = BC \cdot B_1H_2$
где $H_2 \in BC, H_2 \in (BC)$

\Downarrow

$$B_1H_2 = B_1H_1 \Rightarrow$$

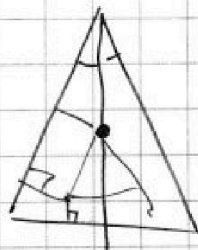
\Rightarrow По теореме о 3 перпендикулярах

B_1H_1 и H_1H_2 - перпендикуляры к одной стороне

$$H_1H_2 = \sqrt{B_1H_1^2 - B_1H_2^2} = H_1H_2 \Rightarrow H \in \text{бис-се } \Delta\text{-ка}$$

аналогично определим H_3 и H_4 - как перпендикуляры из A_1 на AB и AC , $H_3 \in \perp(ABC)$

$$\text{Т.р. } V_{ABCA_1B_1C_1} = B_1H_1 \cdot S_{ABC} = B_1H_1 \cdot H_3C$$



$$AH_3 = \frac{3}{AB} = \frac{3}{a}$$

Пусть $AB = a \Rightarrow BC = CA = a$
 $AH_3 = x$

$$A_1H_4 = \frac{2}{a} \quad \text{Тогда } H_3H_4 \perp (ABC)$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{9}{a^2}}, \quad H_4H_1 = \sqrt{x^2 - \frac{4}{a^2}}$$



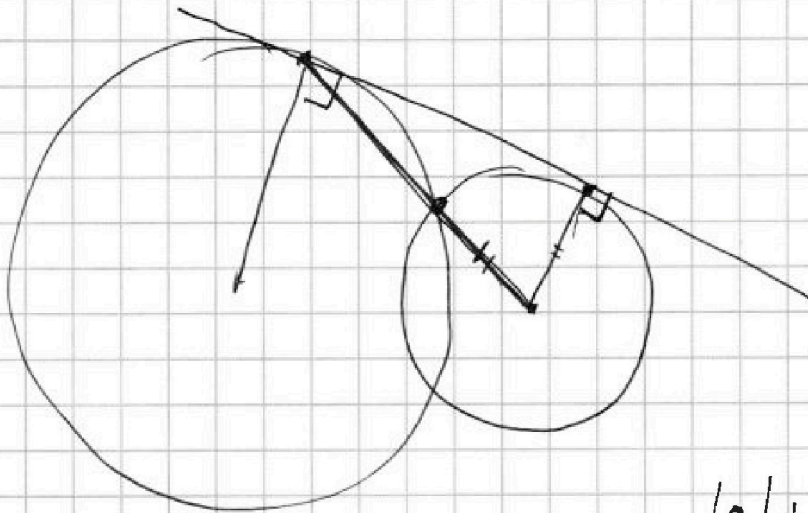
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи



$$|a| + 4|a+9|$$

$$x+5 \geq 0$$

g

$$1-x-4z \geq 0$$

$$z \geq \frac{x-1}{4}$$

$$y-4x-x^2+z \geq 0$$

$$y+z \geq x^2+4x \quad 1-4z \geq x$$

$$1-4z \geq x$$

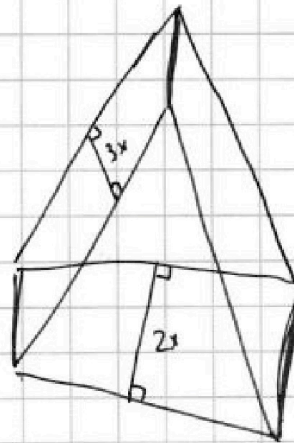
$$(x+2)^2 - 4$$

$$-4x - x^2 - 4zx \geq 20z$$

$$y+z - 4x - x^2$$

$$20z \geq 4zx + x^2 + 4x$$

$$y+z \geq x^2 + 4x$$



$$4 \quad 20000 \cdot 19999 \cdot 19998 \cdot 19997$$

4!

-3 - *g*

$$10000 \cdot 99999$$

$$10000 \cdot 99999$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6
7

$6a^2$

$6a^8$

7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 1 2 3 4 5 6 7 8



9

$$(x-6)^2 = 9^8$$

$$\frac{1}{|x-6|} = 9^4 \Rightarrow 9^2 = \sqrt{|x-6|}$$

$$4a^3p + 12a = 12a^2 + 4$$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$a^3p + 3a = 3a^2 + 1$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$a^3p - 3a^2 + 3a - 1 = 0$$

$$(a-1)^3 = a^3(p-1)$$

$$p(4a^3 - 3a) + 3(p+4)a = 6(2a^2 - 1) + 10$$

$$4a^3p - 12a^2 + (2p+12)a - 4 = 0$$

$$2a^3p - 6a^2 + (p+6)a - 4 = 0$$

$$2a^2(ap-3) + (ap-3) + 21 = \sqrt{25-18} - 9$$

$$4ap(2a^2+1)ap$$

$$(21+4)(21-3)$$

a
a^2

33
x33

$$9-121 =$$

$$22-22 = 4 \cdot 121 = 484$$

$$25-18$$

$$50-9$$

$$27 = 729$$

$$\frac{28}{28} = 1$$

$$450 \cdot 12$$

2

$$(30-2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$$

0 20

$$25-18 \cdot 12$$

21

1 21

2 21

$$5 \cdot 3 \cdot 24$$

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$30\sqrt{6} \quad 21$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x-4z} + 9 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

$$\text{Реш} \quad 6-4z - 2\sqrt{(x+5)(1-x-4z)} = 4y-16x-4x^2+4z+16 - 16\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

$$\cos 3x + \cos x$$

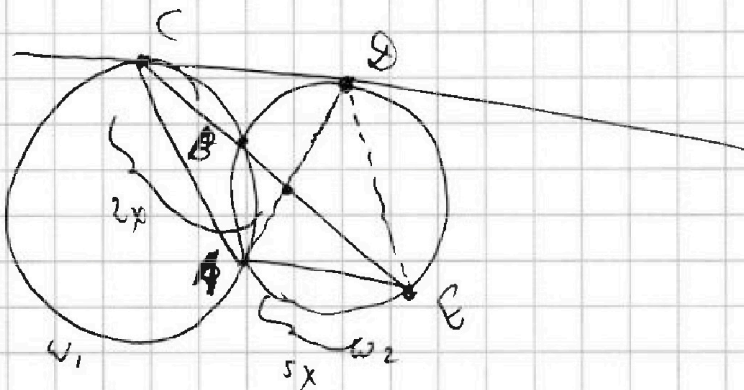
$$\cos 2x + x + \cos 2x - x$$

$$2 \cos 2x - \cos x \quad \text{Реш}$$

$$\begin{array}{r} 539 \\ + 539 \\ \hline 1078 \\ + 2809 \\ \hline 3887 \end{array}$$

$$2p \cos 2x - \cos x + 2p \cdot \cos x = 6 \cos 2x - 12 \cos x + 10$$

$$2p \cos x (\cos 2x + 1) = 6(\cos 2x - 2 \cos x) + 10$$



$$630 = 3 \cdot 210$$

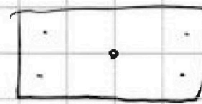
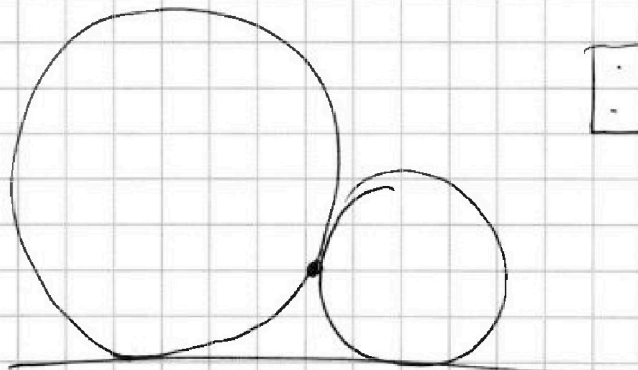
$$3021$$

~~1000~~

$$17 \cdot 17$$

$$289 + 2520$$

$$2809$$



$$3 (26-3)^2$$

$$400 - 120 + 9$$

$$289$$

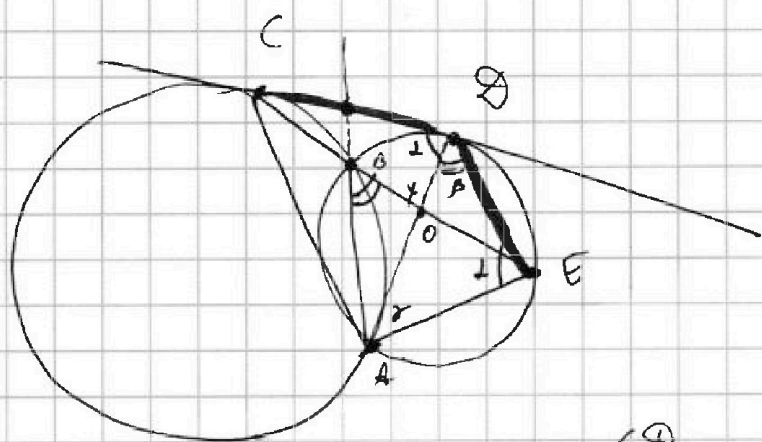


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

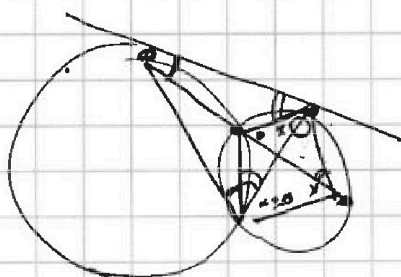
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



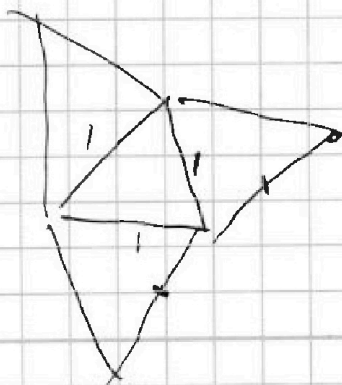
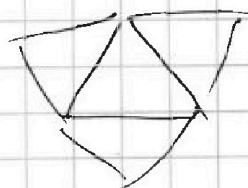
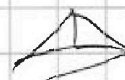
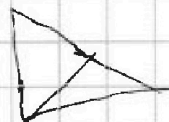
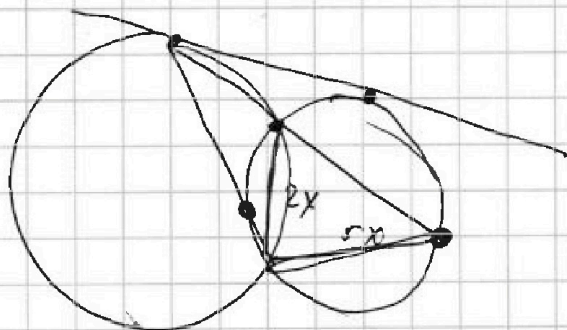
$$\frac{AE}{\sin x} = \frac{OE}{\sin \theta}$$

$$\frac{CE}{\sin x} = \frac{CO}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}$$



$$180 - \alpha - 2\beta$$



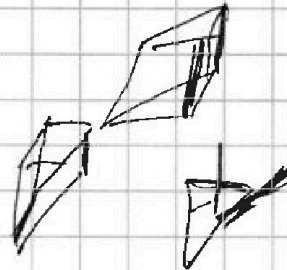
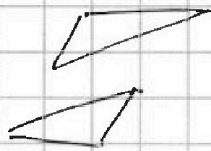
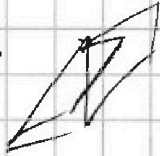
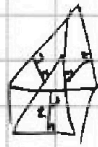
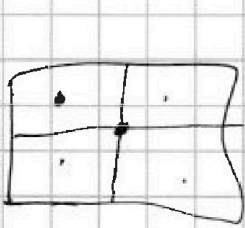


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ρ

~~2224~~

1 2
0 2

$a, b > 0 \Rightarrow b^2 + b^2 \leq 10$

$2a^2 + 2b$

~~222~~

$2b^2 + 2b$

~~22~~ $2b \cdot 2b$

$2b$

$\frac{2b}{162}$

$+54$

$\frac{702}{2}$

$(a-c, b-c)$

or ~~22~~



~~1(1) \sin 60~~ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{a^2 - \sqrt{3}}{4} = 1$

$\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$4+y \geq (x+2)^2$
 $y \geq x^2$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cdot 4$

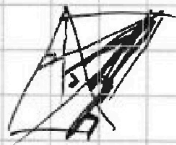
$a^2 - b$
 $a^2 - a + 10$

$2b^2$

$x^2 - 5$
 $x + 5 \geq 0$
 $1 - x - 4z \geq 0$
 $1 \geq 4z + x$
 $1 - 4z \geq x$

$y - 4x - x^2 + z \geq 0$

$4 + y + z \geq (x+2)^2$



$b^2 - a^2 = d^2 - c^2$
 $b^2 - d^2 = c^2 - a^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

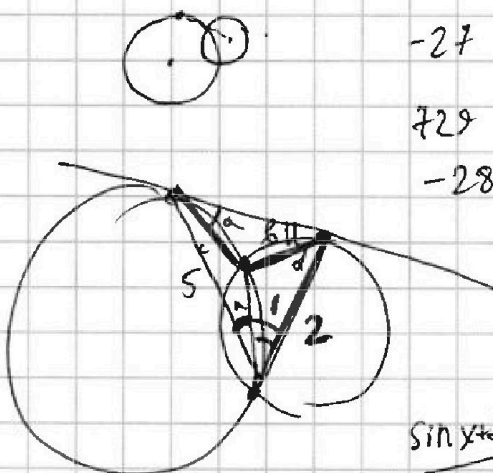
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+5 + 1-x-4z$$

$$6-4z = 4(y-4x-x^2+z) + 16 - 8\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

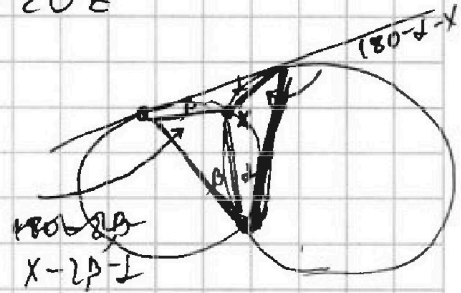
$$2\sqrt{x-x^2-4zx+5-5x-20z}$$

$$-x^2 - 4x - 4zx - 20z$$



$$\begin{array}{r} -27 \\ 729 \\ -28^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ 224 \\ 56 \\ 784 \end{array}$$



$$\frac{2}{\sin x} = \frac{a}{\sin 2}$$

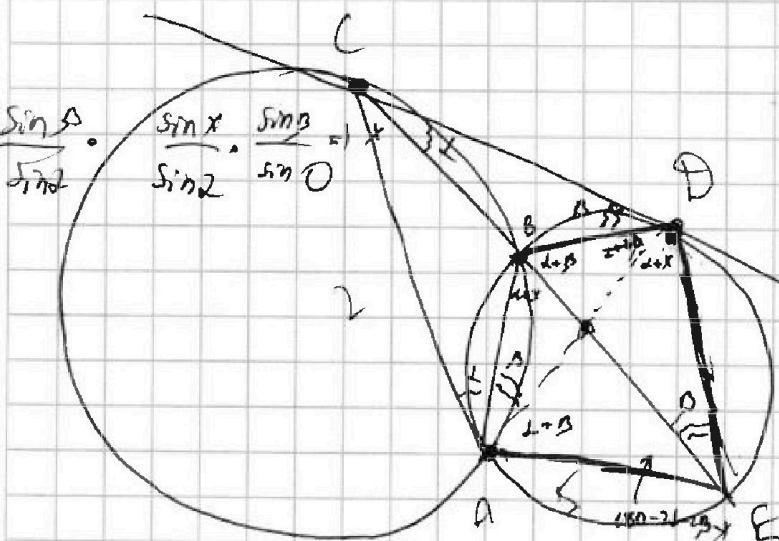
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin x - (2-\beta)}$$

$$\begin{array}{r} 26^2 + 26 \\ 26 \cdot 27 \\ 27 \\ \times 26 \\ 162 \\ 54 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 702 \\ a + 27 \end{array}$$

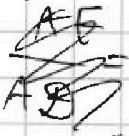
$$\frac{\sin b}{\sin a} \cdot \frac{\sin c}{\sin a} \cdot \frac{\sin e}{\sin d} = 1$$

$$\frac{\sin x + \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha + \beta + x} = 1$$



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin x}{\sin 2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE - AB}{AD \cdot AC}$$



$$\frac{CB}{CD} = \frac{BD}{DE}$$

$$\frac{CB}{BD}$$

$$\frac{CB}{BD}$$

$$\frac{\sin x}{\sin 2\alpha + 2\beta + x}$$

$$\frac{\sin 2\alpha + \beta + x}{\sin \alpha + x} = 1$$

$$\frac{CB}{BD}$$