



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $a = -q^4$   $\begin{cases} b = 6 - a & (1) \\ b^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \Rightarrow b^2 = 73q^4 + 48 \end{cases}$

(1):  $b = 6 + q^4$   $36 + 72q^4 + q^8 = 73q^4 + 48$   $a = -q^4 \Rightarrow q^4 = -a$

$a^2 - 72a + 36 = -73a - 48$

$a^2 + a + 84 = 0$   $D = 7 - 4 \cdot 84 < 0$  корней нет.

Ответ:  $x = 3, x = 20$

Проверим случаи:  $a_1 = 4, a_2 = 27$

1)  $a_1 = 4$  - подходит по ОДЗ (иногда по что под корнем  $> 0$ )

и при  $a_1 = 4$   $b > 0$  и  $b^4 > 0$ ,  $b \cdot \frac{1}{q^4} > 0 \Rightarrow 4 = x + 7$   $x = 3$

2)  $a_2 = 27$  - подходит по ОДЗ, но  $b = 6 - a < 0 \Rightarrow$  все члены

происходят отрицательные (и.к.  $q > 0$ ), но 7-ой и 13-ой члены положительны - противоречие?!  $\otimes$

2)  $a = -q^4$   $\begin{cases} b = 6 - a & \text{стр 26} \\ b^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \Rightarrow b^2 = 73q^4 + 48 & q^4 = -a \end{cases}$

$36 - 72a + a^2 = -73a + 48$

$a^2 + a - 72 = 0$

$a_1 = -4$   $-4 + 3 = -1$

$a_2 = 3$   $-3 + 3 = 0$

и.к.  $a = -q^4 < 0$ , но  $a_2 = 3$   $\times$

$a_1 = -4$  - проверим по ОДЗ:

1)  $\frac{73a - 48}{a^2} > 0 \quad \otimes$

2)  $(73a - 48) a > 0 \quad \otimes$   $b > 0 \Rightarrow a = -4$  проверим.

$-4 = x + 7 \Rightarrow \frac{x = -4 - 7}{x = -11}$

Ответ:  $x \in \{3; -5\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b + 5 = 2ab \quad a, b \geq 0$$

$$a = \sqrt{x+3}$$

$$a - b = 2ab - 5$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} + 4-x = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$\text{Пусть } d = \sqrt{(x+3)(4-x)} = ab, \quad d \geq 0$$

$$3 - 2d + 4 = 4d^2 - 20d + 25$$

$$7 - 2d = 4d^2 - 20d + 25$$

$$4d^2 - 18d + 18 = 0$$

$$2d^2 - 9d + 9 = 0$$

$$D_d = 81 - 8 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$d_1 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3 > 0 \quad \textcircled{1}$$

$$1) \quad d=3: \quad (x+3)(4-x) = 9$$

$$-x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

- корни.

Проверим по ОДЗ (!):  $3 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{4} \leq 4$

$$(!) \quad 7 + \sqrt{13} \leq 16$$

$$(!) \quad \sqrt{13} \leq 9 \quad \textcircled{1}$$

$x_1$  - подходит.

$$(!) \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \geq -3$$

$$(!) \quad 1 - \sqrt{13} \geq -6$$

$$(!) \quad 7 \geq \sqrt{13} \quad \textcircled{1}$$

$$2) \quad d = \frac{3}{2} \quad -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x + 39 = 0$$

$$x_1 = \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8}$$

$$x_2 = \frac{4 - 8\sqrt{70}}{8}$$

Проверим по ОДЗ!

$$(!) \quad \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8} \leq 4$$

$$(!) \quad 6\sqrt{70} \leq 32 - 4 = 28$$

$$(!) \quad 2\sqrt{70} \leq 7$$

$$(!) \quad 40 \leq 49 \quad \textcircled{1}$$

$$(!) \quad \frac{4 - 8\sqrt{70}}{8} \geq -3 \quad (!) \quad -8\sqrt{70} \geq -28$$

$x_2$  - не подходит.

Ответ:  $y = 12, z = 0, x \in \left\{ \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$   $\textcircled{1}$

$\textcircled{1}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{22} \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+7| + 3|y-72| = \sqrt{73^2 - z^2} & (2) \quad \sqrt{73^2 - z^2} \leq \sqrt{73^2} = 73 \end{cases}$$

из (2) получим:  $|y+7| + 3|y-72| \leq 73$

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{+} \quad \text{---} \quad \text{+} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ -7 \quad \quad \quad 72 \quad \quad \quad y \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) y \geq 72 \\ 4y + 7 - 36 \leq 73 \end{array}$$

$$4y \leq 73 + 35$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 72 \Rightarrow \boxed{y = 72}$$

$$2) -7 \leq y < 72 \quad \text{то } y+7-3y+36 \leq 73$$

$$-2y + 37 - 73 \leq 0$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12 \quad \emptyset$$

$$3) y < -7 \quad -y-7-3y+36 \leq 73$$

$$4y \geq 35 - 73$$

$$4y \geq -38$$

$$y \geq \frac{-38}{4} > -7 \quad \emptyset$$

Значит (2) может выполняться только в случае:

$$y = 72 \quad \text{и} \quad z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{и} \quad y = 72 \quad \text{поэтому в (1)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-0} + 5 = 2\sqrt{72+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+72}$$

Заметим, что:

$$-x^2+x+72 = (x+3)(4-x)$$

Пусть  $\sqrt{x+3} = a, a \geq 0$

$\sqrt{4-x} = b, b \geq 0$

тогда:  $a - b + 5 = 2ab$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13)  $\cos x = t \quad -\pi \leq t \leq \pi$

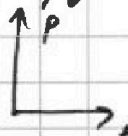
$\cos 2x = 2t^2 - 1$

$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$

$\cos 3x = 4t^3 - 3t$

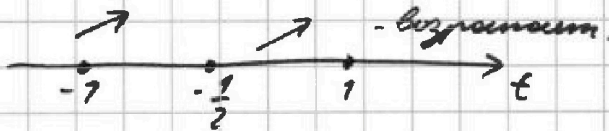
$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

выразим  $p$  от  $t$   $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$



$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$



$\forall t \neq -\frac{1}{2} \quad f'(t) > 0$

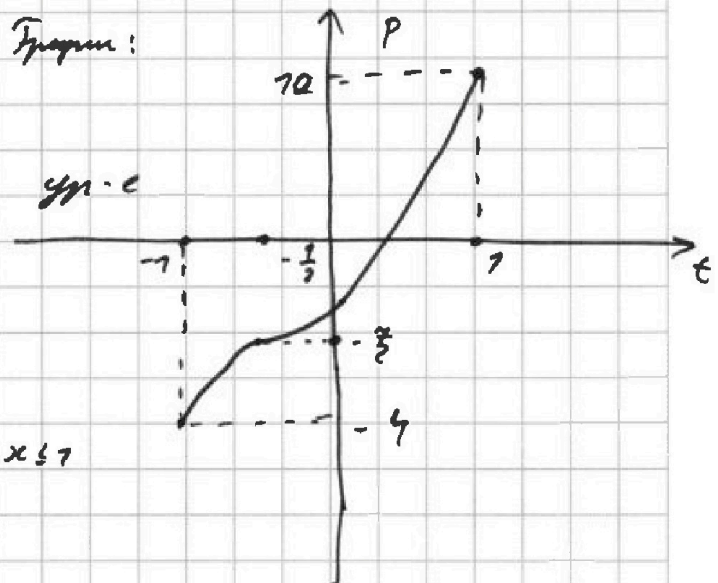
Значит,  $-\frac{1}{2}$  - точка перегиба, а  $f(t)$  монотонно возрастает;

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{2^2}{2^3} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$

$f(-1) = -4 + 6 + 3 - 3 = -4$

График:

$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$



Из графика видно, что при  $t$  от  $-1$  до  $1$  (а следовательно и от  $\cos x = -1$  до  $\cos x = 1$ )  $p$  принимает все значения от  $-4$  до  $10$ .

**Ответ:**  $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем, что функция монотонно возрастает и имеет решение только при  $p \in [-4; 10]$ , при этом решение относительно  $t$  - единственное (при  $p \in [-4; 10]$ )

Ответ: есть решение только при  $p \in [-4; 10]$



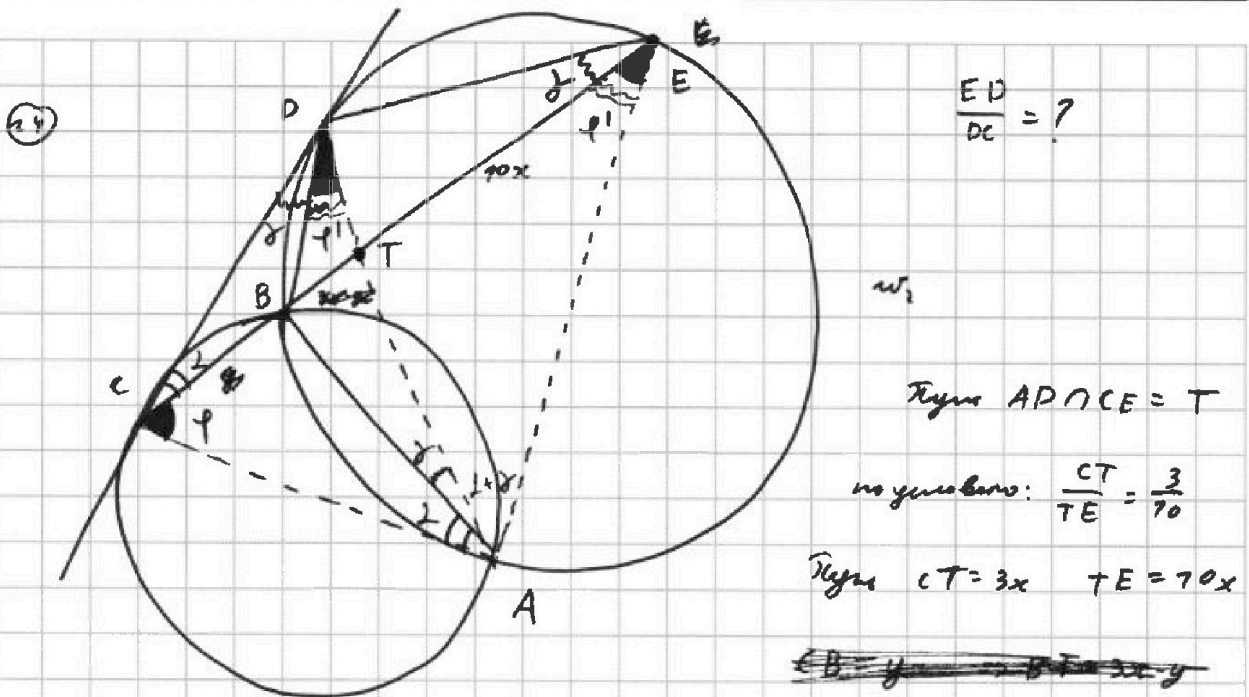


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Поиск угла  $\alpha$  и  $\delta$  по теореме синусов~~

~~$ED^2 = 8 + 15x$~~

$\angle CDB = \alpha = \angle DEB = \angle DAB$   
 $\angle DCB = \beta = \angle BAC$

Т. синусов  $\triangle CBP$ :  $\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{CB}{\sin \alpha}$

$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BD}{BC}$

Т. синусов  $\triangle CDE$ :  $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{ED}{DC} = ?$

Значит:  $\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

$\angle DBE = \angle DAE = \beta + \alpha = \angle DAC = \beta + \alpha$

Значит  ~~$AT = 3x$~~   $AT$  - медиана  $\triangle ACE$ :

по свойству медианы имеем:  $\frac{CT}{TE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{70}$

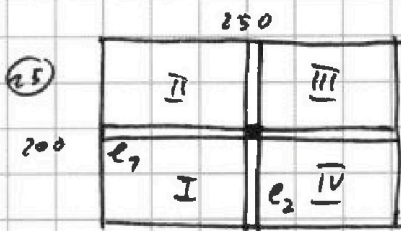


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) посчитаем кол-во монет, лежащих относительно симметрии этого центрального уродливого монет e<sub>1</sub> (горизонтальной) клетки

~~Аналогично считаем кол-во монет в раз-~~

дваются по паре. Достаточно выделить 4 клетки из верхнего прямоугольника 700 x 250, а остальные восстановиваются симметрично.

Всего клеток в прямоугольнике 700 x 250: 25000 клеток.

$C_{25000}^4$  - кол-во вариантов таких монет.

2) посчитаем кол-во монет, лежащих относительно симметрии этого центрального уродливого монет e<sub>2</sub> в клетке

аналогично, они разбиваются по паре, и нам достаточно выделить 4 клетки в прямоугольнике 200 x 725: клеток: 200 x 725 = 145000

Всего монет:  ~~$C_{145000}^4$~~   $C_{25000}^4$

3) посчитаем кол-во монет, лежащих относительно симметрии этого центрального уродливого монет

~~7.7) Все клетки симметричны в III и I клетках монет.~~

~~Значит, что эти случаи никак не учитываются, а именно~~

~~даны (7) и (2). Но кол-во случаев выделяется 4 клетки,~~

~~из I (в III они восстановиваются симметрично) равно:~~

~~$C_{77500}^4 = C_{77500}^4$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) посчитаем кол-во клеток, симметричных относительно центра, разобьем доску на 4 области.

700	2 $l_1$	$l_2$ 7
700	7'	2'
	125	125

Зам., что области 7' симметричны по области 7. Аналогично с 2 и 2'.  
~~Значит симметрично выделены~~

Выберем некоторую расстановку из способа (1).

Выберем, где ставить выделенные в областях 7' и 2' и

симметрии их относительно  $l_1$  (при этом они

могут быть там или везде). Очевидно, что мы

получим расстановку, симметричную относительно

центра таблицы. Это аналогично способу (2). Зам., что таким образом мы

получим всевозможные расстановки вида (3).

Заметим, что некоторые расстановки мы посчитали некоего раз, а именно те, которые симметричны относительно  $l_1$  и  $l_2$ .

Их мы посчитали 4 раза. ~~З~~ значит надо отнять 3 умножения на кол-во таких расстановок.

Рассчитаем их количество.

область 7

Заметим, что ~~симметрично выделены~~ 2 клетки в ~~области 7~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и остальные восстанавливаются однозначно.

I: 200 и 775. Значит количество машин составляет:  $C_{77500}^2$

Всего изобретений можно изобрести:

$$C_{25000}^4 + C_{23000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2 =$$

$$= 2 \cdot C_{25000}^4 + 2 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2 = 4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2$$

Ответ:  ~~$4 \cdot C_{25000}^4$~~   $4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} a-c=7 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=7 \Rightarrow -c=7-a \\ b-c=9 \Rightarrow b+7-a=9 \Rightarrow a=b-8 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+b-8=560 \\ b^2+b-568=0 \end{cases}$$

$$D_0 = 7 + 4 \cdot 568 = 2273 \quad 47^2 < 2273 < 48^2 \Rightarrow D_0 \text{ не кв} \Rightarrow \Rightarrow \text{нет целых решений.}$$

$$6) \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-7 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=-9 \Rightarrow -c=-9-b \\ b-c=-7 \Rightarrow -c=-7-b \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow a-b=-8 \Rightarrow a=b-8$$

$$b^2+b-568=0 \quad \text{аналогично случаю (5) нет целых решений.}$$

Значит найдем все возможные тройки:

(a, b, c)  
(37, 23, 32)  
(-16, -24, -75)  
(37, 23, 22)  
(-16, -24, -25)

~~Ответ: (a, b, c)  
(37, 23, 32)  
(-16, -24, -75)~~

Ответ: (a, b, c):  
(37, 23, 32), (37, 23, 22)  
(-16, -24, -75), (-16, -24, -25)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$   $a > b$

$$\begin{cases} 3 + a - b \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad p \in \mathbb{P}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$$

X

~~Решаем, как обычно~~

$$2) \begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$$

X

~~или другим~~

$$3) \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 7 \end{cases} \quad -c = 7 - b$$

Возьмем, как обычно, 3 случая

при делении на 3

возьмем:	$x$	$x^2$	если $3 \mid x$	$x^2 \equiv 0$
	0	0		
	1	1		
	2	1	если $3 \nmid x$	$x^2 \equiv 1$

(МТФ для 3)

$$a - b = p^2 - 7$$

$\Rightarrow$  если  $p \neq 3$ , то  $p \nmid p^2 - 7$   
и значит  $p^2 - 7 \equiv 0 \pmod{3}$   
 $\Rightarrow 3 \mid a - b$  X

$$b^2 + b + 8 = 560 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

$$D_b = 2209 = 47^2 \Rightarrow b_1 = 23 \Rightarrow a_1 = 37$$

$$c_1 = b_1 - 7 = 22 \quad b_2 = -24 \Rightarrow a_2 = -16$$

$$c_2 = b_2 - 7 = -25$$

Эти тройки подходят

(37, 23, 22)  
(-16, -24, -25) ✓

значит  $p = 3$

$$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 7 \end{cases} \Rightarrow -c = 7 - b$$

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ a = 8 + b \end{cases} \Rightarrow a + b^2 = 560 \Rightarrow 10 - b + b^2 = 560$$

~~и так далее, но в итоге~~

~~$\Rightarrow a = 23, b = 23, c = 23$~~

~~$a = 23, b = 23, c = 23$~~

~~и так далее~~

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$b_1 = 23, b_2 = -24$$

$$c_1 = 22, c_2 = -25$$

$$D_b = 2209 = 47^2$$





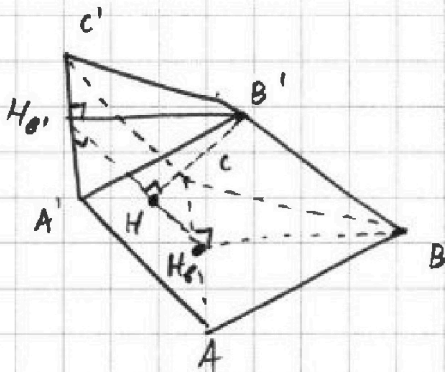
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⊛ Введите обозначения как показано на рисунке.



$$AB = BC = AC = A'B' = A'C' = B'C' = 7$$

по условию.

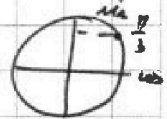
$$\text{Плош } S_{A'B'B'} = S_{B'B'C'C'} = 4$$

$$S_{A'C'C'} = 3$$

⊛ Опустим высоту  $BH_0$  в  $\triangle ABC$ .  
 $\beta$ -плоскость  $(B'B'H_0')$

Заметим, что плоскость симметрична относительно  $\beta$ .  $\Rightarrow S_{A'A'H_0H_0'} = \frac{3}{2}$  ( $H_0' = \beta \cap A'C'$ )

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\text{Плош } h \text{ - высота призмы } \Rightarrow V_{A'B'B'} = V_{A'B'C'} = V_{A'B'C'C'} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Плош  $\alpha$  - высота из точки  $A'$  на плоскость  $(B'B'C'C')$

В силу симметрии высота из  $C'$  на плоскость  $(A'A'B'B')$  тоже равна  $\alpha$ .

Плош  $\beta$  - высота из  $B'$  на плоскость  $(A'A'C'C')$ .

$$V^{\text{тр}} \text{ - объем тригранника } ABCB': V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \alpha \cdot 2$$

$$V = \frac{2}{3} \alpha \quad \text{т.к. } S_{A'B'B'} = \frac{S_{A'B'C'}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$$

т.к.  $B'H_0' \parallel (ABC)$

$$S_{A'H_0'C} = \frac{S_{A'C'C'}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$V_{A'B'C'H_0'} = V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \beta = 2\beta$$

$$2\beta = \frac{2}{3} \alpha \Rightarrow 3\beta = \alpha$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{2}{3} \cdot 3\beta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} h = 2\beta$$

$$h = \frac{24\beta}{\sqrt{3}}$$

Плош  $H$  - площадь в силу симметрии  
↑  
высота  $B'H = \beta$   $H \in H_0H_0'$



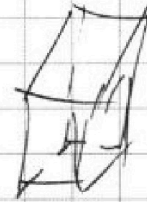
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\theta - 73$   
 $\frac{\theta}{9^6} = \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}}$   
 $\theta = 6 - \alpha$   
 $\theta^2 = \sqrt{(73\alpha - 48)\alpha}$   
 $\theta = \sqrt{\frac{(73\alpha - 48)\alpha}{9^2}}$



$x + 1 = \alpha$

$73x - 35 = 73\alpha - 48$

$36 - 73x - x = -35$   
 $x = 46$

$\theta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48)$

$\theta = 9^6 \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}}$

$\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3} = \frac{73\alpha - 48 \cdot \alpha}{60 \cdot 9^9}$

$|y + 1 + 3|y - 72| \leq 73$

$9 > 72$   
 $4y - 35 \leq 73$   
 $4y \leq 108$   
 $y \leq 27$

$9^{16} = \alpha^9 \Rightarrow \alpha = 9^4$

$7) \alpha = 9^4$

$\theta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48)$

$\alpha \in \mathbb{O}$

$-2y + 1 + 36 \leq 73$

$36 - 72\alpha + \alpha^2 = 73\alpha - 48$

$\theta = 6 - \alpha$

$\alpha^2 - 25\alpha + 84 = 0$



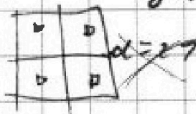
$-4y + 35 \leq 73$

$\alpha_1 = 27$

$\alpha_2 = 7$

$27 \cdot 4 = 108$

$27 \cdot 4 = 108$



$\theta \in \mathbb{O}$

$4 - 73 > 48$

$7) \alpha = 9^4 \quad 9^4 = -\alpha \Rightarrow \alpha \in \mathbb{O}$

$\theta = 6 - \alpha$

$\theta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48)$

$-(36 + 72\alpha + \alpha^2) = 73\alpha - 48$

$\theta = 6 + 4 > 0$

$\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$

$\alpha_1 = -4$

$9^4 = 4$

$\alpha = 5 \sqrt{4}$

$-4 = x + 1$

$\alpha_2 = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ 48 \\ \hline 383 \\ 792 \\ \hline 233 \\ 568 \\ \hline 2272 \end{array}$$

$$7 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 81 = 0 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$t_2 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x \in [-3; 4]$$

$$1) -x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 x_2 = -3$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leq 4$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \geq -3$$

$$2 + \sqrt{13} \leq 8$$

$$\sqrt{13} \leq 9 \quad \text{①}$$

$$2) -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$D = 16 + 612 = 628 \quad 4^2 \cdot 40 = 4^2 \cdot 4 \cdot 10 \quad \sqrt{4^2 \cdot 4 \cdot 10} = 4 \cdot 2 \sqrt{10} = 8\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4 + 8\sqrt{10}}{8} \leq 4$$

$$4 + 8\sqrt{10} \leq 4 \cdot 8$$

$$7 + 2\sqrt{10} \leq 8$$

$$2\sqrt{10} \leq 1$$

$$x_2 = \frac{4 - 8\sqrt{10}}{8} \geq -3$$

$$\frac{4 - 8\sqrt{10}}{2} \geq -3 \cdot 2$$

$$40 \leq 49$$

$$7 - 2\sqrt{10} \geq -6$$

$$2\sqrt{10} \leq 13$$

$$7t^2 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$-4 + 3 - 3 + 6 - 6 = -4$$

$$40 \leq 49$$

$$7t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p$$

$$f(-1) = -4 + 6 + 3 - 3 =$$

$$= -4$$

$$f(t) = 7t^3 + 72t^2 + 72t + 3 = 3(2t+7)^2$$

$$t = -\frac{7}{2}$$

$$7 - 3 + 6 + 3 + 6 = 20$$

$$f(7) = 4 - 3 - 3 = 20$$

$$= 20$$

$$4t^3 -$$

$$4 \cos^3 x + 3(\cos 2x + \cos x)$$

$$(-16 + 25) - (-24 + 15)$$

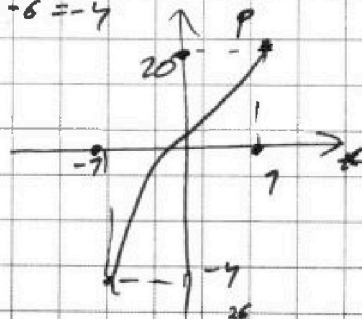
$$(37 - 22) - (23 - 22)$$

$$9$$

$$7$$

$$9$$

$$7$$



$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ 48 \\ \hline 384 \\ 752 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$49 \cdot 8 = 392$$

$$49$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \in \mathbb{R}$   $\frac{552}{4} = 138$   $\frac{550}{4} = 137.5$   $\frac{2200}{4} = 550$

$\theta, \theta_1, \dots, \theta_6, \dots, \theta_{12}$

$\sqrt{\frac{73x-35}{(x+7)^3}}$

$\frac{6}{9^4}, \frac{6}{9^3}, \frac{6}{9^2}, \frac{6}{9}, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{12}$

$\frac{6}{9^6} = \sqrt{\frac{73x-35}{(x+7)^3}}$

$\theta = 5-x$   $550 = 5 \cdot 770 = 5 \cdot 70 \cdot 77$

$\theta_1^2 = \sqrt{(73x-35)(x+7)}$   $D = 7+$

$71\alpha = 9^4$   $\theta = 6 - 9^4$   $\theta_1^2 = x^2 \sqrt{734^2 - 4^2}$

$\frac{29}{43} \frac{24}{77} = \sqrt{764 - 2^2} \leq 73$

$|y+7| + 3|y-72| = \sqrt{764 - 2^2} \leq 73$

$121 \leq 73$   $HYD \theta_1 > \theta$   $\alpha = c = p^2$   $\theta - c = 7$   $9^{76} = \alpha^4$   $\alpha = \pm 9^4$

$y \geq 72$   $y+7+3y-36 \leq 73$   $4y+7 \leq 49$   $-4y+35 \leq 73$   $4y \leq 48$   $4y \geq 71$   $y \leq 72 \Rightarrow y = 72$

$\alpha \neq \beta$   $\frac{84}{27} | 4$   $\frac{7 \cdot 72}{48} = 10.5$   $\frac{36}{84} = 0.428$   $x_1, x_2 = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$(\alpha-c)(\beta-c) = p^2$   $-754 \leq 72$   $y+7-3y+36 \leq 73$   $-2y+37-73 \leq 0$   $2y \geq 2$   $(x+3)(4-x) = -x^2 + 4x - 3x + 12$

$\alpha-c = p$   $\beta-c = p$

$x_1 x_2 = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$(x+3)(4-x) = -x^2 + 4x - 3x + 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

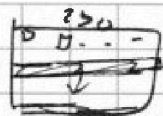
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$27-3 \\ x \leq 4$$

$$\alpha - \theta + 5 = 2\alpha\theta \leq 2 \cdot 7 = 14$$

$$\alpha + \theta \leq 9$$



$$\sqrt{x+3} \leq \sqrt{7}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 \leq \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \leq 2x$$

$$\sqrt{4-x} \leq \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

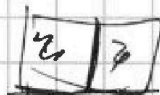
$$\alpha^2 - 2\alpha\theta + \theta^2 = 25 - 20\alpha\theta + 4\alpha^2\theta^2$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} \geq 7 \Leftrightarrow \alpha\theta$$

$$\sqrt{x+3} \leq 9$$

$$x+3 \leq 81$$

$$x \leq 78$$



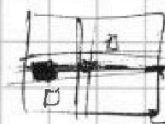
$$DB = t$$

$$\sqrt{x+3} + 5 \leq \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2$$

$$x+3 \leq 4$$

$$x \leq 1$$



$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$\alpha - \theta + 5 \leq \alpha^2 + \theta^2$$

$$\frac{t}{8} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\alpha^2 - \alpha + \theta^2 + \theta - 5 \geq 0$$

$$\frac{DB}{DE} = \frac{4}{\sqrt{73xy}} = Da \geq 0$$

$$7 - 4\theta^2 - 4\theta + 20 \geq 0$$

$$= \sqrt{\frac{4}{73x}}$$

$$4\theta^2 + 4\theta - 27 \leq 0$$



$$-\frac{2}{3} + \frac{x-3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$$

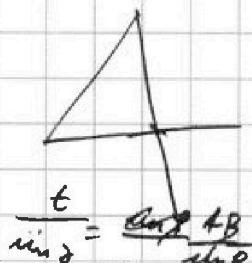
$$= -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} = -\frac{x}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

$$x_1 =$$

$$D = 7 + 4 \cdot 3 = 73$$



$$\cos x = t$$

$$\cos 2x = 2t^2 - 7$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin 2x =$$

9

$$\frac{t}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot AB}{\sin \beta}$$

$$t(2t^2 - 7) - 2(7-t^2)t =$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \phi}$$

$$\sin^2 x = 7 - t^2$$

3-p

$$\frac{78}{39}$$

$$\text{tg } \phi = t'$$

$$2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$-24 - 4$$

$$D = 76 + 76 \cdot 39 =$$

$$= 76(40) = 4^2 \cdot 8 \cdot 5 =$$

$$= 4^2 \cdot 4 \cdot 70$$

$$\sqrt{D} = 4 \cdot 2 \sqrt{70} = 8\sqrt{70}$$

$$x_1 =$$

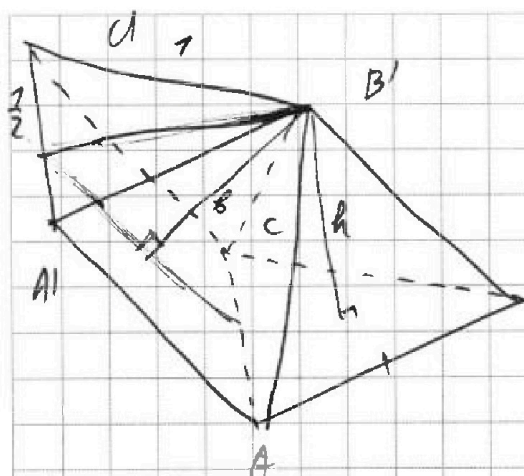


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

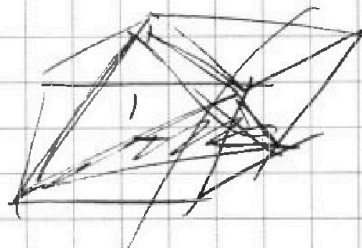
- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$V = \frac{1}{3} A \cdot S$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.7)

$\beta$  - 73й этаж

$q$  - высота

$q \neq 0$

$\frac{\beta}{q^6}$  - 7й этаж

Хочу  $x + 7 = \alpha$

$\beta q^2$  - 75й этаж

$$73x - 35 = 73\alpha - 48$$

$$5 - x = 6 - \alpha$$

По условию:

$$\begin{cases} \beta = 6 - \alpha & (1) \\ \frac{\beta}{q^6} = \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}} & (2) \\ \beta q^2 = \sqrt{\alpha(73\alpha - 48)} & (3) \end{cases}$$

$$(3): \beta^2 = \frac{\alpha(73\alpha - 48)}{q^4}$$

$$(2): \beta^2 = q^{12} \cdot \frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}$$

$$q^{16} = \frac{(73\alpha - 48)}{(73\alpha - 48)} \cdot \alpha^4$$

$$7) \alpha = q^4 \begin{cases} \beta = 6 - \alpha & (1) \\ \beta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48) & (4) \end{cases}$$

$$q^{16} = \alpha^4 \Rightarrow \alpha = \pm q^4$$

$$(4): \beta^2 q^4 = q^4(73q^4 - 48)$$

$$(6 - q^4)^2 = 6 \cdot 73q^4 - 48$$

$$(1) \beta = 6 - \alpha = 6 - q^4$$

$$(6 - \alpha)^2 = 73\alpha - 48$$

$$36 - 12\alpha + \alpha^2 = 73\alpha - 48$$

$$\alpha^2 - 25\alpha + 84 = 0$$

по т. Виетта:  $\alpha_1 = 4$

$\alpha_2 = 27$

~~$4 = 2 + 2$~~

~~$27 = 20 + 7 = 2x + 7$~~

~~$\beta = 6 - \alpha$   
 $\beta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48)$~~

~~Проверим 3 возможных варианта.~~

~~1.  $\alpha_1 = 4$   $4 \cdot (73 \cdot 4 - 48) = 70 \cdot 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 = x + 7$   $x = 3$~~

~~2.  $\alpha_2 = 27$   $27 \cdot (73 \cdot 27 - 48) = 70 \cdot 27 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 27 = x + 7 \Rightarrow x = 20$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AC}{EA} = \frac{3}{70}$$

$$\angle ECA = \varphi \cdot \angle BDA = \angle BFA = \varphi'$$

Т. треугол.  $\triangle ACE$ :  $\frac{AC}{\sin \varphi'} = \frac{AE}{\sin \varphi}$   $\frac{AC}{EA} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{3}{70}$

Т. треугол.  $\triangle CBA$ :  $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{CB}{\sin \angle C}$  (1)

Т. треугол.  $\triangle ABD$ :  $\frac{AB}{\sin \varphi'} = \frac{BD}{\sin \angle D}$  (2)

(1) / (2):  $\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \cdot \frac{CB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{BD}{BC} = t, t = ?$

$t = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \Rightarrow \frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}$

$t^2 = \left(\frac{3}{70}\right)^{-1} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{70}{3}}$

$t = \frac{ED}{DC} = \left(\sqrt{\frac{3}{70}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{70}{3}}$

Ответ:  $\sqrt{\frac{70}{3}}$

Ответ:  $\sqrt{\frac{70}{3}}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \begin{cases} a-c = -7 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \quad (\text{укажите решение тем в силу } a > b)$$

$$a-b = -7+p^2$$

стационарно ~~сущее~~  
случаю (3) получили  $p=3$

$$\begin{cases} a-c = -7 \Rightarrow c = a+7 \\ b-c = -9 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a-7 = -9 \Rightarrow a = b+8 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow b+8+b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2 \quad b_1 = \frac{-1+47}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

$$b_2 = \frac{-1-47}{2} = \frac{-48}{2} = -24$$

$$1) b_1 = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 32$$

$$a-b = 31-23 = 8 \cdot 3 \quad \text{D}$$

$$31^2 + 23^2 = 560 \quad \text{D}$$

подходит

2) 2) 2)

$$2) b_2 = -24 \Rightarrow a = -76 \Rightarrow c = -75$$

$$-76 + 24 = 8 \cdot 3 \quad \text{D}$$

$$-76 + 24^2 = 560 \quad \text{D}$$

подходит.

~~Ответ: 1)  $a = -76$   $b = -24$   $c = -75$   
2)  $a = 31$   $b = 23$   $c = 32$~~