



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

*а.а.а.*

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $b$  - первый член геом. прогрессии.  $q$  - её шаг (знаменатель)

тогда по усл.  $bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$bq^{12} = 5-x$

$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

( $bq^n$  -  $(n+1)$ -элемент прогрессии)

ОДЗ:  $bq^6 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(13x-35) \geq 0, x \neq -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{35}{13}, +\infty)$

1) если  $b$  или  $q \geq 0 \Rightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$

~~$bq^6 \geq 0$~~

$\Rightarrow \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 0 \Rightarrow$  при  $x=5$   ~~$x \neq 5$~~

2)  $b, q \neq 0 \Rightarrow 13x-35, x+1, 5-x \neq 0$ , т.к.  $bq^n \neq 0$

$\frac{bq^{14}}{bq^6} = q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(x+1)^4}{(x+1)^2}} = (x+1)$

~~$\frac{bq^{12}}{bq^6} = q^6 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(x+1)^4}{(x+1)^2}} = (x+1)$~~

$\begin{cases} q^4 = x+1 & (1) \\ q^4 = -x-1 & (2) \end{cases}$

$\frac{bq^{14}}{bq^{12}} = q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} \Rightarrow q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$

(1): т.к.  $x \neq -1 \Rightarrow \frac{13x-35}{(5-x)^2} = \frac{q^4}{x+1} = 1$

~~$\frac{13x-35}{5-x} = \frac{q^4}{x+1} \Rightarrow 13x-35 = \frac{q^4}{x+1}(5-x)$~~

Проверка:  $25 - 10x + x^2 = 13x - 35 \Rightarrow x^2 - 23x + 60 = (x-20)(x-3)$

(2):  $\frac{13x-35}{(5-x)^2} = \frac{q^4}{x+1} = -1$

$\begin{cases} x=20 \\ x=3 \end{cases}$

$x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2) = 0$

Проверка:

~~$x=20$~~   $x \neq 0$  ДЗ

2)  $x=2 \notin$  ОДЗ т.к.  $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{35}{13}, +\infty)$

т.к.  $bq^{12} = 5-x > 0, q > 0$

3)  $x=3$   $bq^6 = \frac{1}{4}, bq^{12} = 2, bq^{14} = 4 \Rightarrow$  это возможно при  $b = \frac{1}{32}, q = \sqrt{2}$

4)  $x=-5$   $bq^6 = \frac{10}{8}, bq^{12} = 10, bq^{14} = 20 \Rightarrow$  возможно при  $b = \frac{5}{32}, q = \sqrt{2}$

Ответ: 3, -5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2} & (2) \end{cases}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = |y+1| + |12-y| + |y-12| + |12-y| \geq \sqrt{169}$$

каждый член модуля  $\geq$  модуль суммы

- (2):
- $y \geq 12 \Rightarrow y+1+3y-36 = 4y-35 \geq 13 \Rightarrow 4y \geq 48 \Rightarrow y \geq 12$  (т.к.  $\sqrt{169-2^2} = 13$ )
  - $12 \geq y \geq 1 \Rightarrow 36-3y+y+1 = 37-2y \geq 13 \Rightarrow 24 \geq 2y \Rightarrow y \leq 12$
  - $y \leq -1 \Rightarrow 1-y+36-3y = 37-4y \geq 13 \Rightarrow 24 \geq 4y \Rightarrow y \leq 6$  противоречие

$z=0, y=12$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

кор:  $-3 \leq x \leq 4$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = a \\ \sqrt{4-x} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 7 \end{cases}$$

вообще:  $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 = 5+7 = 12$

$$(a-b)^2 = -2(a-b) + 12$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 6 = 0$$

а)  $a-b = +1 \Rightarrow 5+1 = 2ab \Rightarrow ab = 3$

б)  $a-b = -2 \Rightarrow 5-2 = 2ab \Rightarrow ab = 3/2$

$$\begin{cases} a-b = +1 & (3) \\ a-b = -2 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, b = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ a = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, b = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4): a - b = -2$$

$$a - b + \sqrt{5} = 3 = 2ab$$

$$a = b - 2 \quad 2(b-2)b - 3 = 2ab - 3 = 0 \quad \text{так как } D = 4^2 + 3 \cdot 8 = 40$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0 \quad \text{т.д. } 7 \pm 2\sqrt{13}$$

$$b = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \\ a = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Исходная задача! равносильна?  $x = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) - 3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1 + \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

$$\sqrt{x+3} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow x = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{1 + 2\sqrt{13} + 13}{4} - 3 = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4} - 3 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{7 + \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \rightarrow \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{x+3} \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{10} - 2}{2}\right)^2 - 3 = \frac{10 - 4\sqrt{10} + 4}{4} - 3 = \frac{14 - 4\sqrt{10}}{4} - 3 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} - 3 = \frac{7 - 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \rightarrow \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{x+3} \geq 0$$

Ответ:  $\left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 1, 0\right)$

если существует  $x$ , удовлетворяющей системе  $\Rightarrow$

$$\exists a, b: \begin{cases} a - b + \sqrt{5} = 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - \sqrt{5}$$

$(b^2 = 7 - a^2 \Rightarrow \text{если существует } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 9 + 6\cos x =$$

$$= p \Leftrightarrow 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad | \cdot 2$$

$$8\cos^3 x + 12\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 2p$$

$$(2\cos x + 1)^3 - 7 = 8\cos^3 x + (2\cos x)^2 \cdot 1 \cdot 3 + \cancel{1} (2\cos x)^2 \cdot 3 + 1 - 7 = 2p$$

$$2\cos x + 1 = \sqrt[3]{2p+7}$$

$$-1 \leq \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \leq 1 \quad \leftarrow \text{DZ}$$

$$-1 \leq \sqrt[3]{2p+7} \leq 3$$

$$-8 \leq 2p \leq 20$$

$$\underline{-4 \leq p \leq 10}$$

~~Ответ~~

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi n \\ x = -\arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ:  $\pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right), \quad p \in [4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

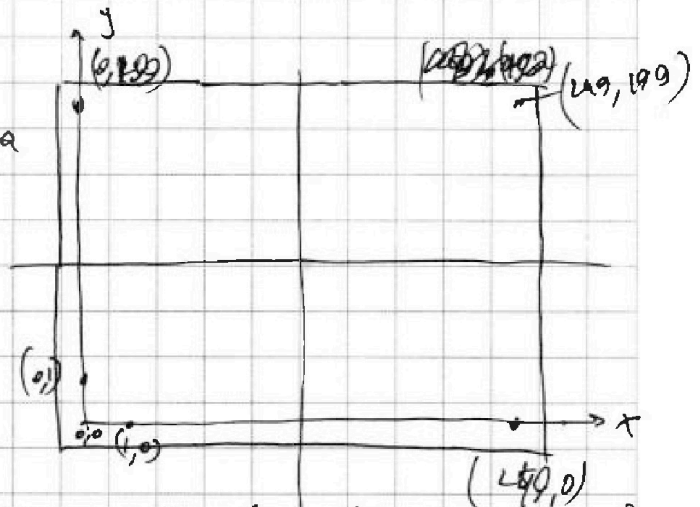
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем координаты как на рис:

0 - центр левого нижнего квадрата  
сторона квадрата = 1

Назовем пару верш  $(x, y)$  и  $(x, 249-y)$  В (вертикальной)



т.к.  $249 - y \neq y$  т.к. 249 нечетно  $\Rightarrow$  все ~~двое~~ клетки обходятся (не пересекаются), на пары

Аналогично назовем пару  $(x, y)$  и  $(199-x, y)$  Г (горизонтальной) и пару  $(x, y)$  и  $(199-x, 249-y)$  ЦС (центально симметричной)

Всего Г-пар, В-пар, ЦС-пар по  $\frac{200 \cdot 250}{2} = 25000$

Если мы-во центрально симметрично  $\Rightarrow$  в любой Ц-паре 0 или 2 закраш. клетки  $\Rightarrow$  всего ~~два~~ способа раскраски  $C_{25000}^4$  (всего 4 пары)  $8 = 2 \cdot 4$  Ц-пар

Аналогично если мы-во симметрично отн. вертикальной/горизонтальной ср. линии, то надо вобрать 4 В/Г пары и закрасить там обе клетки  $\Rightarrow$  по  $C_{25000}^4$  способов.

Но мы посчитали лишней раз варианты, когда мы-во симметрично отн. двух ср. линий или ср. линии и центра. В таком случае сум также разделим), Возвв закрасимую клетку, нетрудно убедиться в том, что все прямоугольные  $(x, y)$

из 4-ки:  $(x, y)$ ,  $(199-x, 249-y)$ ,  $(199-x, y)$ ,  $(x, 249-y)$  закрасит. (т.к. клетка участвует сразу в двух типах пар (В и Г, ЦС и Г или ЦС и В) закрасит 2 клетки из перемешанных в прямоугольнике  $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(пример, когда метка стоит в B-паре и уг-паре)

⇒ закрашена и 4-ая

и метка в южной на 2 прямоугольника.

Всего код клеток  $(x, y), (199-x, 249-y), (x, 249-y), (199-x, 249-x) - \frac{200 \cdot 250}{4} = 12500$

(и они не пересекаются (что, в целом, видно

из зарисовки) и каждая для Г или В или У с паре пересекаются (внутри их типа)

Всего таких раскрасок

$\binom{2}{12500}$

↑ выделяем 2 прямоугол.

красим все ~~такие~~ метки в них (остальные прямоугол.

должны быть пометены меткой) ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~

Каждая раскраска была посчитана 3 раза (при подсчете

В, Г, У с симметрией) → всего раскрасок  $\binom{4}{25000} \cdot 3 =$

$- 2 \binom{4}{12500}$  (или из формулы включения-исключения

или из  $\binom{4}{25000} \cdot 3$  считаем все попарные пересечения

(которые на самом деле пересечение всех 3-х или 2-х раскрасок) и прибавляем пересечение всех 3-х или 2-х.)

Ответ:  $\binom{4}{25000} \cdot 3 - \binom{2}{12500} \cdot 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b, a \neq b$   $(a-c)(b-c) = p^2, a+b^2 = 560$

Заметим, что если  $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \\ a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \\ a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases}$$

(т.к. по осн. Т. Арифметики разложения числа на простые слагаемые, а так же  $p^2$  лишь 2 простых множителя  $\Rightarrow$  либо оба слагаемых в одной скобке, либо в разных)

если  $a-c = \pm p = b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow a=b$

- (1)  $a-c = p^2, b-c = 1$  (иначе  $a-c = -p^2 < -1 = b-c \Rightarrow b > a$ )  
 (2)  $a-c = -1, b-c = -p^2$  (иначе  $a-c = 1 < p^2 = b-c \Rightarrow b > a$ )

$a+b^2 = 560 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ . Разобьем на пары делителей 560

- ~~(1, 560) (2, 280) (4, 140) (8, 70) (16, 35) (7, 80) (5, 112) (10, 56) (20, 28) (40, 14) (56, 10) (80, 7) (140, 4) (280, 2)~~

но  $(a-c)(b-c) = p^2$   
 все делители  $\neq 0$   
 $(a-c)(b-c) = 20$  (по формуле)  
 пар всего  $\frac{20}{2} = 10$

(1)  $a-c - (b-c) = a-b = p^2 - 1 \neq 0$  (иначе  $a=b$ )  
 (2)  $a-c - (b-c) = a-b = -1 + p^2 = p^2 - 1 \neq 0$

если  $a-b = 0 \Rightarrow a=b$

~~(1)  $a+b^2 = (p^2+1) + (1+c)^2 = 560 \Rightarrow p^2 + c^2 + 2c + 1 = 560$~~

~~(2)  $a+b^2 = (c-1) + (c-p^2)^2 = 560$~~

~~(1)  $4p^2 + 4c^2 + 12c + 4 = 560 \Rightarrow 4p^2 + (2c+3)^2 = 560 \Rightarrow 4 + x = 2345$~~

$p^2 - 1 \equiv 1 \pmod 3$  или  $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$ , но  $a^2 \equiv 1$  или  $0 \pmod 3 \forall a \in \mathbb{Z}$   
 $p^2 \equiv 2 \pmod 3$  - невозможно  $\Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow p \equiv 3 \pmod 3$  (если  $a \equiv 1, 2 \pmod 3 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod 3$ ,  $a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod 3$ )  
 $\Rightarrow a+b^2 = 560, a-b = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = b+8$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + b + 3 = 560$$

$$b^2 + b - 557 = 0 = (b + 24)(b - 23) = 0 \rightarrow \begin{matrix} b = 23 & a = 8 + b = 31 \\ b = -24 & a = -16 \end{matrix}$$

действительно  $a \neq b$ , т.к.  $a - b \equiv 8 \equiv 2 \pmod 3$  и  $a + b^2 = 560$   
 $a > b$ , т.к.  $a = b + 8$

Остаток от 3:  $\begin{cases} b - c \equiv 1, & a - c \equiv 9 \pmod 3 \rightarrow c = 22 \text{ или } c = -25 \\ a - c \equiv -1, & b - c \equiv 9 \pmod 3 \rightarrow c = -15 \end{cases}$

проверка:  $(31 - 22)(23 - 22) = 9 = 3^2$  или  $c = 32$

$$(-16 - (-15))(-24 - (-15)) = 3^2 = 9$$

$$(-16 - 25)(-24 - (-25)) = 3^2 \quad \text{ответ: } (31, 23, 22) \quad (31, 23, 32)$$

$$(31 - 32)(23 - 32) = 9 = 3^2 \quad (-16, -24, 25) \quad (-16, -24, 15)$$

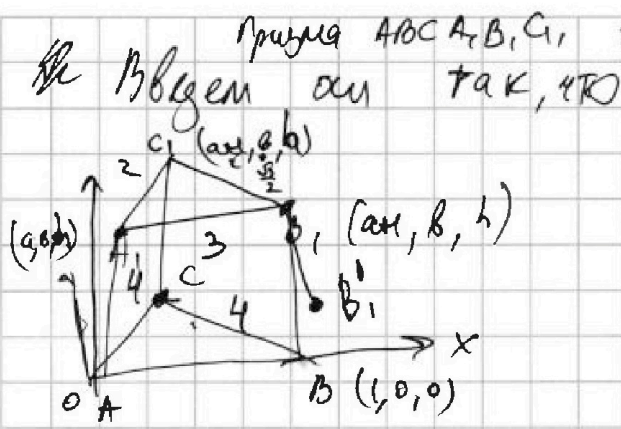


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

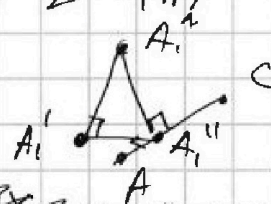
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пряма  $ABC A_1 B_1 C_1$  ~~и боковые~~ грани с ребром  $AA_1$  имеют  $S=4$   
 $A: 0, 0, 0$   
 $B: 1, 0, 0$   
 $C: \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$   
 $A_1: a, b, h$   
 $B_1: a+1, b, h$   
 $C_1: \frac{1}{2}+a, \frac{\sqrt{3}}{2}+b, h$   
 n-исковая вершина

$A_1'$  - проекция  $A_1$  на  $AC$   
 $A_1''$  - проекция  $A_1$  на  $BC$



Т. Пифагора  $A_1 A_1''^2 + h^2 = (A_1 A_1')^2 + AC^2$  (по т. о 3-х перпенд.)

$S_{ACC_1 A_1} = AC \cdot A_1 A_1'' = 4 \Rightarrow A_1 A_1''^2 = 16$

в  $(ABC)$ : найдем  $A_1 A_1''$ .

прямая  $AC$  - это  $y - \sqrt{3}x = 0$

$dist(A_1', AC) = \frac{|b - \sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}} = \frac{|b - \sqrt{3}a|}{2}$

получаем:  $(b - \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 16 \cdot 4 = 64$  (1)

Найдем аналогичное уравнение для двух других граней:

$B_1'$ :  $(a+1, b)$  AD (в. мн-ч  $ABC$ ) задается  $0 \cdot x + y = 0$   
 $dist(B_1', AB)^2 + h^2 = \left(\frac{|b|}{1}\right)^2 + h^2 = b^2 + h^2 = 4^2 = 16$  (проходит через  $(0,0)$  и  $(1,0)$ )

~~$C_1'$ :  $(a+1/2, b+\sqrt{3}/2)$   $dist(C_1', BC) = \frac{|(a+1/2) - \sqrt{3}(b+\sqrt{3}/2)|}{2} = \frac{|a+1/2 - \sqrt{3}b - 3/2|}{2} = \frac{|a - \sqrt{3}b - 1|}{2}$~~

$BC: (b \text{ мн } (ABC)): \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$  (проходит через  $(1,0)$  и  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ )

$\Rightarrow dist(B_1', BC) = \frac{|\sqrt{3}(a+1) + b - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|\sqrt{3}a + b|}{2}$   
 Аналогично  $4 dist(B_1', BC)^2 + 4h^2 = (\sqrt{3}a + b)^2 + 4h^2 = 4 dist(B_1', BC)^2 = 4 \cdot \left(\frac{S_{C_1 B_1 B}}{BC}\right)^2 = 36$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 (1): & \begin{cases} (b - \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 64 \\ b^2 + h^2 = 16 \quad h^2 = 16 - b^2 \end{cases} & \text{сложим (1) и (3):} \\
 (2): & \\
 (3): & \begin{cases} (b + \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 36 \\ 3a^2 + b^2 + 4h^2 = 50 = 3a^2 + b^2 + 64 - 4b^2 \\ 36^2 = 3a^2 + 14b^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(1) - (3): 4ab\sqrt{3} = -28$$

$$ab\sqrt{3} = -7 \quad a = -\frac{7}{b\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$(4), (5): 3a^2 + 14 = 3 \frac{49}{3b^2} + 14 = \frac{49}{b^2} + 14 = 3b^2$$

$$3b^4 - 14b^2 + 49 = (3b^2 + 7)(b^2 - 7) = 0 \quad \begin{cases} b^2 = 7 \\ b^2 = -\frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 7 \\ h^2 = 16 - 7 = 9 \end{cases}$$

$$b = \frac{7}{3}$$

$$h^2 = 16 - 7 = 9$$

$$h = 3$$



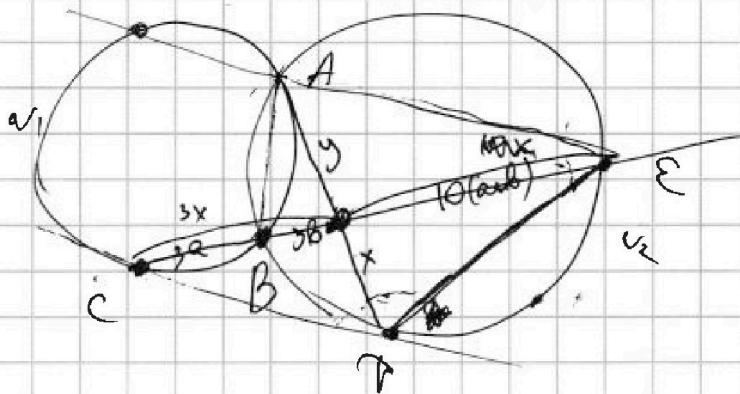
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

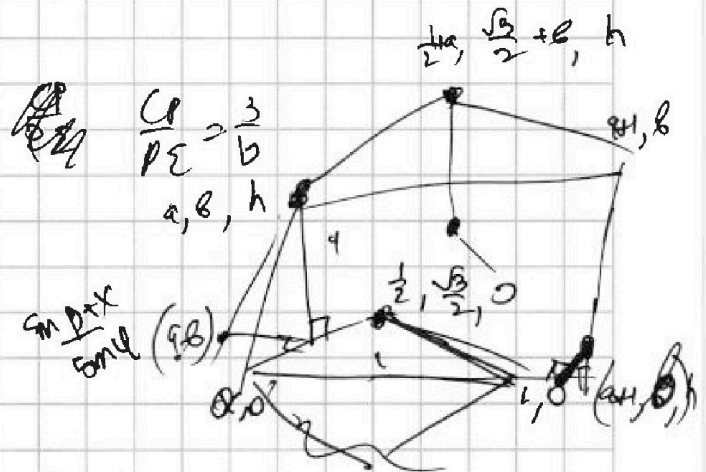
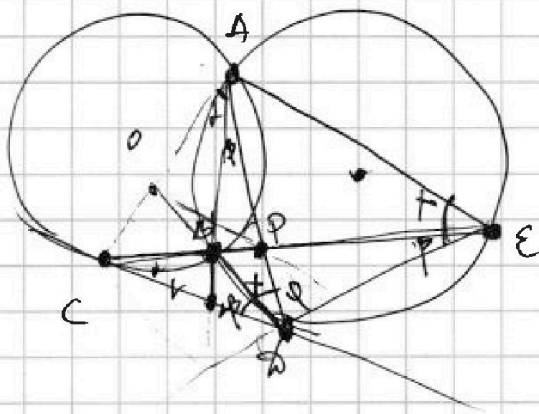


$\frac{CA}{CB}$   
 $\frac{14}{9}$   
 $\frac{14}{9}$   
 $14-14$   
 $196$   
 $14-9$   
 $49-36$   
 $13$

$$39a(a+b) = CD^2 = z$$

$$3a(10a+13b) = CD^2 = x(xy)$$

$$xy = 30b(a+b)$$



$$y - \sqrt{3}x = 0$$

$$\left(\frac{b - \sqrt{3}a}{2}\right)^2 + h^2 = 16$$

$$b^2 + h^2 = 16$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a + b}{2}\right)^2 + h^2 = 9$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4h^2 - 6h + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4a^2 = 36$$

$$a = 9$$

$$y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$x = 0$$

$$0 - x + y = 0$$

$$|b| + h$$

$$b^2 - 2ab\sqrt{3} + 3a^2 + 4h^2 = 64$$

$$3a^2 + 2ab\sqrt{3} + b^2 + 4h^2 = 36$$

$$b^2 + h^2 = 16$$

$$a = 3$$

$$b^2 - 6\sqrt{3}b + 4h^2 = 37$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

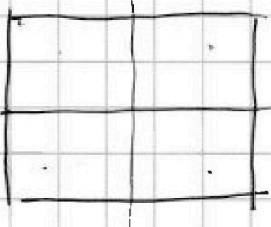
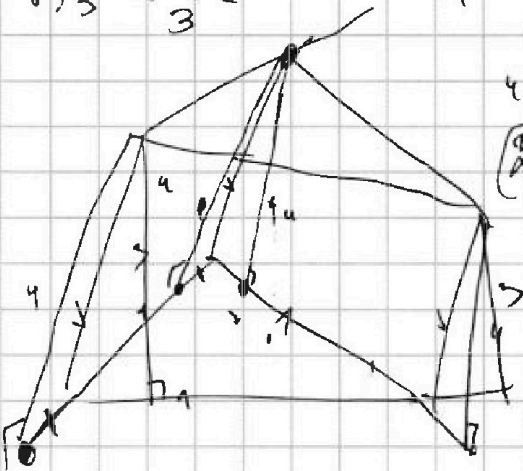
СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 560$$

$$a \times 3$$

$$b \div 3 \quad a \approx 2$$



$$(a-c) = p^2 \quad b-c=1$$

$$a + b^2 = 560 \quad \approx 2$$

$$a - b = p^2 - 1 \approx 0 \quad 1 \quad 2$$

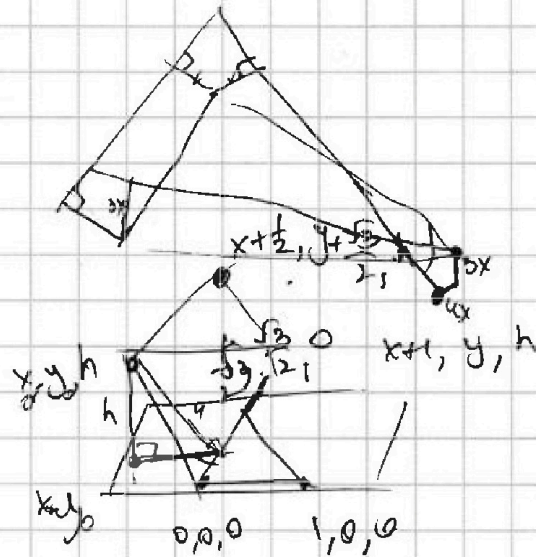
$$p^2 - 1 + b + b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 1 + p^2 = 560$$

$$4b^2 + 4b - 4 + 4p^2 = 560 - 4$$

$$(2b+1)^2 + 4p^2 = 560 - 4 + 1$$

$$\begin{array}{r} 24 \quad 23 \\ 124 \\ 144 - 4 \\ 560 \end{array}$$



$$C \begin{array}{l} 2 \\ 25 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} y = \sqrt{3} x$$

$$\sqrt{3} x - y = 0$$

$$-(\sqrt{3} x_0 - y_0)$$

$$\frac{y - \sqrt{3} x_0}{\sqrt{4}} = \frac{y - \sqrt{3} x_0}{2}$$

$$16 = h^2 + \left( \frac{y - \sqrt{3} x_0}{2} \right)^2$$



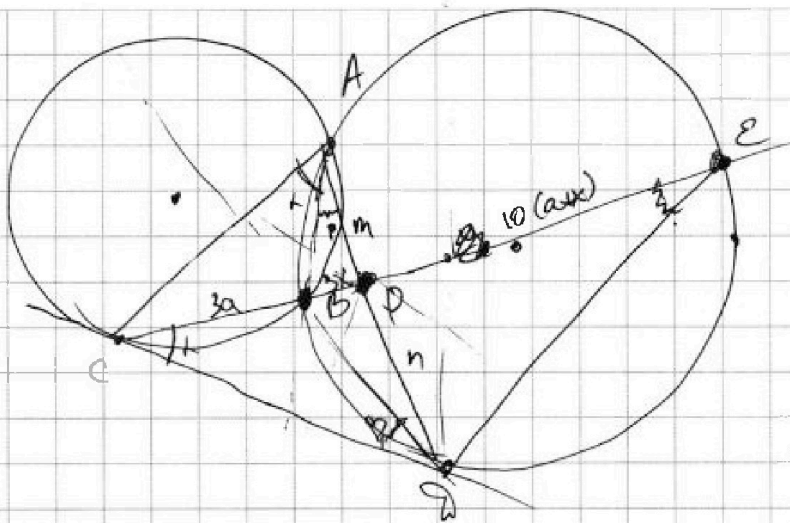


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{BE}$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CB}$$

$$CD^2 = 30a - 10a^2 \quad (a+x)$$

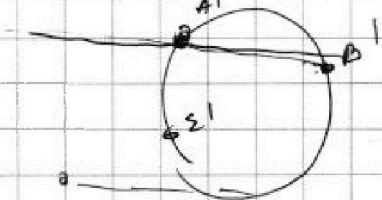
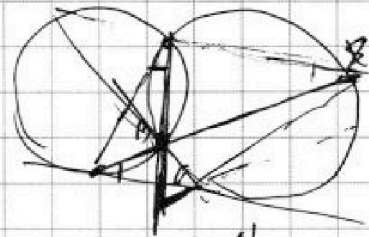
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{учк.} \quad \frac{\sin \alpha \cdot CA}{\sin \beta \cdot AB} = \frac{a}{x}$$

$$30x(10a+x)$$

$$30x(a+x) = mn$$

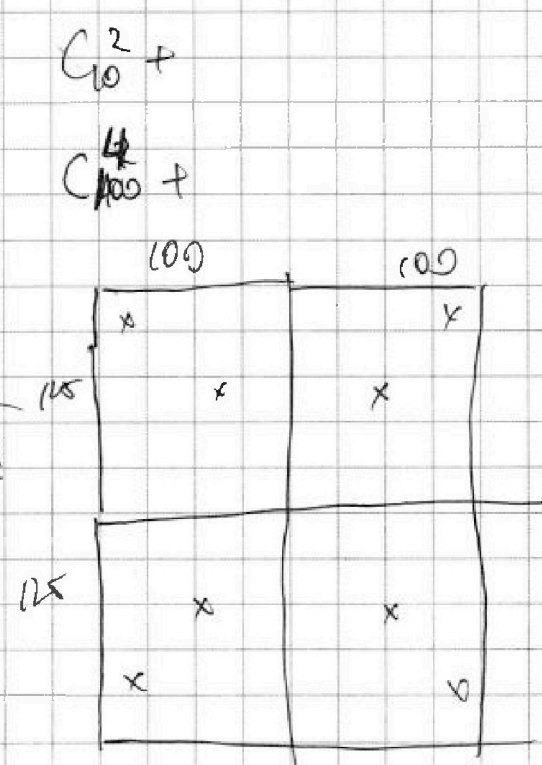
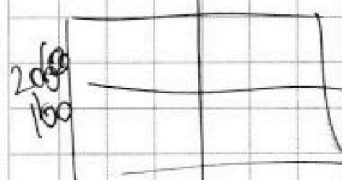
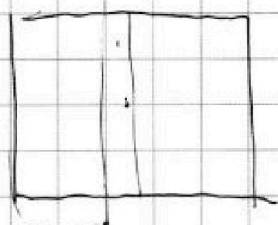
$$30a(a+x) = CD^2$$

$$\frac{13a}{10x} = CD$$



$$C_{100-2x}^4 + C_{200-12x}^4$$

$$+ C_{100-2x}^9$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

или cos

Черновик.  
 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

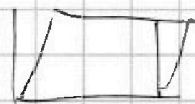
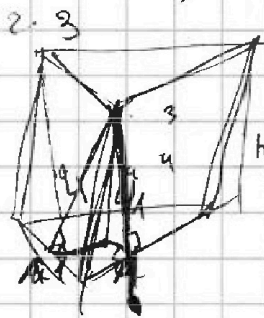
$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 2p$$

или  $4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$$8\cos^3 x + 12\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 2p$$

$$(2\cos^2 x + 3)^3 = 2p - 7 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3 = \sqrt[3]{2p-7} - 1 < 1$$



$$h = 1 = 4$$

$$a \neq b$$

$$a - c = p^2 \quad a - c = 1$$

$$b - c = 1 \quad b - c = p^2$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1 \cdot 1 = p^2$$

$$a - c = p \quad b - c = p$$

$$a = b$$

16 7. 20 42

$$(p^2 + c)(1 + c) = 560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$560 = 7 \cdot 8 \cdot 10 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7$$

1 2 2^2 2^3 2^4  
 5 2.5 2^2.5 2^3.5 2^4.5

1-560 2-280 4-140 8-70 16-35  
 5-112 10-56 20-28 40-14 80-7

7 2.7 2^2.7 2^3.7 2^4.7

(p^2 + c) | (1 + c) : 0

$$(p^2 + c) + (1 + c)^2$$

$$(c + \frac{3}{2})^2$$

2000  
24 0 5

p=2 3

$$c^2 + 2c + 1 + p^2 = (2c + 3)$$

$$9^2 \leq 4c^2 + 12c + 4 + 5 = 4 \cdot 560 + 5$$

$$10^2 + 30 + 1 = 560 \quad (2c + 3)^2$$

$$549 = 9 \cdot 61 = 81 + 7$$

$$c^2 + 3c + 1 = 549$$

9. 9. 7

1000  
196

22 21

2196

9 + 4.549

2000  
196

4005



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$6, 6q^2, 6q^4, 6q^6, 6q^8$   
 $q^2 = 2$   
 $2^6 = 64 \cdot \frac{1}{32}$   
 $5\sqrt{2} = 4 \cdot 138$   
 Черновик  
 $8 \cdot 3 \cdot 28$   
 $q = 0 \rightarrow x = 5$   
 $100 \cdot 4$   
 $240 + 64$   
 $244$   
 $24 + 12$

$\sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$   
 $5-x$   
 $(13x-35)(x+1)$   
 $(x+1)^2$   
 $q^4 = x+1$   
 $q^4 = -x-1$   
 $b = \frac{5-x}{x+1}$   
 $b = \frac{5-x}{(x+1)^3}$

$\frac{13x-35}{(x+1)^3} = b = \frac{5-x}{x+1}$   
 $(5-x)^2 = (13x-35)(x+1)$   
 $13x^2 - 22x - 35$   
 $12x^2 - 32x - 60 = 0$   
 $3x^2 - 8x - 15 = 0$   
 $-1 = 4 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cos 180 = -1$   
 $\cos 60 = \frac{1}{2}$   
 $q^8 = (x+1)^2 \cos 60 = \frac{1}{2}$   
 $q^4 = \pm(x+1)$

$13x - 35 = 25 - x$   
 $6q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$   
 $6q^{12} = 5-x$   
 $6q^{14} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$   
 $q^2 = \frac{13x-35}{(5-x)^2}$   
 $q^2 = \frac{13x-35}{(x+1)^2}$

$\frac{35}{15} > \frac{5}{2}$   
 $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$   
 $4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$   
 $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - (p+3) = 0$   
 $4x^3 + 6x^2 + 3x - (p+3) = 0$   
 $12x^2 + 12x + 3 = 0$   
 $4x^2 + 4x + 1 = 0$   
 $(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$   
 $p \geq 0$   
 $0 \leq p \leq 10$   
 $p < 0$   
 $4 \leq p \leq 0$