



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть b_1 - первый член этой прогрессии, а q - её знаменатель. $b_n, q \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} = b_1 \cdot q^{11}$$

~~$(15x+6)(x-3) \geq 0$~~ ~~$x > 3$~~ ~~$x < -\frac{2}{5}$~~ ~~$x > 3$~~

$(15x+6)(x-3) \geq 0$

+ - +
-2/5 3 x

$$x > 3: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(x-3)^8} \quad q = \sqrt[4]{x-3}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} \quad x+4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 10 = 15x + 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x^2 - 7x + 4 = 0 \quad D = 49 - 16 = 3^2 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$$

но $x=2$ не подходит. Так. $x > 3$ подходит, $x=5$.

$$x < -\frac{2}{5}: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{3-x}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)} \quad x+4 = \sqrt{-(15x+6)}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 10 = -15x - 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 23x + 16 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; 22 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x = -1$$

Ответ: $x = -1; 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 + 4\sqrt{2} > -1 \quad -1 + 4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к. } 4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается, $x = -1 + 4\sqrt{2}$ не подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 - \frac{7}{2} > -5 > -7, \quad -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{-3\sqrt{5}-2}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается, $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ подходит.

$$-1 + \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 \quad \frac{3\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$$

$$45 \vee 27 + 6\sqrt{3} < 18 \vee 6\sqrt{3} \quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}-2}{2} > \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

значит $x = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{5}$ не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернёмся в систему и найдём z :

$$\begin{cases} x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

~~Ответ: $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$~~

Ответ: $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = 35, z = 0.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (I) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (II) \end{cases}$$

Рассмотрим II: Правая часть имеет обычный график корня по z , принимает значения на $[0; 15]$ на $[-15; 15]$. При $[-15; 0]$ возрастает, в -15 минимум, мин. значение равно 0, в 0 максимум, макс. значение равно 15. При $[0; 15]$ убывает, в 15 минимум, мин. значение равно 0.

Левая часть гр-я имеет график по y , минимумы в 20 и 35 .



В точках 20 и 35 достигается максимум, если y не меньше, при $y < 20$ или $y > 35$.

График принимает миним. значение. $y=20$: $2|20-35| = 30$, $y=35$:

$|25-20| = 15$. \Rightarrow при $y=35$ макс. значение, и это 15. Заметим,

что левая часть гр-я имеет максимальное значение,

достигаемое в одной точке, равное максимуму значения

правой части, достигаемому в одной точке, а значения

y уравнения есть только единственное решение:

$y=35, z=0$. Вернемся в систему.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \\ y=35, z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)} \\ y=35, z=0 \end{cases}$$

Пусть $a = \sqrt{x+7}, b = \sqrt{5-x}$. $a, b \in \mathbb{R}$ $a \geq 0, b \geq 0$. Вернемся к системе



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Вариант 206~~ Выведем из системы, чтобы решить 1-е уравнение.

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{(5-x)(x+7)} - 3)$$

$x \in [-7; 5]$ всегда в этом диапазоне

$$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{5-x} \quad x+7 \geq 5-x \quad 2x \geq -2 \quad x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+7} < \sqrt{5-x} \text{ при } x < -1$$

$$\sqrt{(5-x)(x+7)} \geq 3 \quad -x^2 - 2x + 35 \geq 9 \quad x^2 + 2x - 26 \leq 0 \quad D_x = 1 + 104 = 105$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{105}}{2} < x < \frac{-2 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$x \in \left[\frac{-2 - \sqrt{105}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{105}}{2} \right]$$

$$x = \frac{-2 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

Получается, что либо $x \in [-7; \frac{-2 - \sqrt{105}}{2}]$, либо $x \in [\frac{-2 + \sqrt{105}}{2}; 5]$

$$\text{При } x \in [-7; \frac{-2 - \sqrt{105}}{2}] \cup [\frac{-2 + \sqrt{105}}{2}; 5]: 12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(5-x)(x+7) + 35 -$$

$$- 9 = 3 \cdot \sqrt{(x+7)(5-x)}. \text{ Пусть } t = \sqrt{(x+7)(5-x)}, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad D_t = 121 - 96 = 25 \quad t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0 \quad D_x = 1 + 124 = 125$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0 \quad D_x = 16 + 2116 = 2132$$

$$= 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$= 400 = (20\sqrt{5})^2$$

$$x = \frac{-1 \pm 4\sqrt{2}}{1} = -1 \pm 4\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 20\sqrt{5}}{4} = -1 \pm \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

Получившиеся корни функции попадают в $[-7; \frac{-2 - \sqrt{105}}{2}] \cup [\frac{-2 + \sqrt{105}}{2}; 5]$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -7 \quad -4\sqrt{2} < -6 - \sqrt{32} > -\sqrt{36} \quad -1 - 4\sqrt{2} < -\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -6 < \frac{-5-1}{2} < \frac{-2\sqrt{3}-1}{2}. \text{ Получается, } x = -1 - 4\sqrt{2} \text{ подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

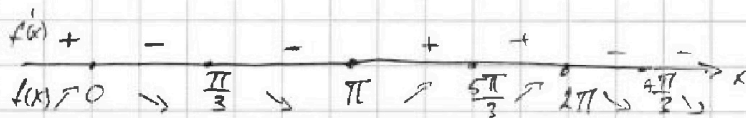
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p = 0 \quad p = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

Пусть $f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$

$$f'(x) = 12 \cos^2 \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 12 \cos x = -12 \sin x (\cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Получается, $f(x)$, хотя и не строго, но монотонно, убывает на

$[2\pi k; 2\pi k + \pi]$ и возрастает на $[2\pi k + \pi; 2\pi(k+1)]$, а $2\pi k$ и

$\pi + 2\pi k$ — это точки максимума и минимума, $k \in \mathbb{Z}$, и так

как $p = f(x)$, то чтобы было хотя бы одно решение, $f(\pi) \leq p \leq f(0)$

$$-4 - 6 - 3 + 3 \leq p \leq 4 + 3 - 6 + 3 \quad -10 \leq p \leq 4. \quad \text{Значит, всегда}$$

для все заданных значений p , при которых уже имеет хотя бы одно ре-

шение, и это: $p \in [-10; 4]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Знаем, что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то в нём есть и симметрия по центру. Это верно, потому что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то прямоугольник можно разрезать на 4 прямоугольника попарно симметричными средними линиями, и тогда точка из одной крайней половины будет соответствовать точке из соседней, и в свою очередь тоже, а это означает точки на краях с центром и первой взятой точкой. Как-то таких случаев соответствия к каждой стороне выбрать 2 точки в центре ~~каждой~~ прямоугольника, и это даёт
$$C_{1500}^2 = \frac{1500 \cdot 1499}{2} = 3750 \cdot 7499$$

Остальные как-то случаи для каждой средней линии это:

$$C_{1500}^4 - C_{750}^2, \text{ а значит всего случаев даёт: } 2C_{1500}^4 - C_{750}^2$$

Для выбора случаев несчётных можно тоже разрезать прямоугольник на 4 части для удобства, т.к. точки из одной половины проектируются в другую, все симметрии относительно центра — это концы для каждой точки кончается ~~тогда~~ в точке с такой же расстоянием до центра, но той же



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рядом, где лежат другие точки с центром, но не другие
лучи. Для центральной симметрии лучей всего будет

$$C_{15000}^4. \text{ Всего лучей будет: } (2C_{15000}^4 - C_{7500}^2) + C_{15000}^6 - C_{7500}^2 =$$

$$= 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - \frac{7500 \cdot 7499}{4}$$

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - 7500 \cdot 7499 \text{ лучей.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть p - простое число, тогда имеем следующие задачи:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} u > b \\ u \neq b \\ \text{или} \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a > b \\ u \neq b \Rightarrow c \pm p^2 \neq c \pm 1 \Rightarrow p^2 \neq 1 \\ \begin{cases} a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases}$$

$p = 3$
 $p = 3$, т.к.
простое

$$\begin{cases} a > b \\ a = y + c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - 9 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ y + c + c^2 + 1 = 820 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c^2 + 3c - 110 = 0 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c^2 - 18c - 740 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D = 9 + 440 = 57^2$$

$$D = 18 + 2900 = 57^2$$

$$\begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(-21; -29; -30)$, $(36; 28; 27)$, $(-21; -29; -20)$, $(36; 28; 37)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	4	-6	3	3
1	4	-2	1	4
2	4	2	2	4
3	4	-12	13	-10
4	4	-18		
5	4	-3	$\frac{3}{4}$	-
6	4	-3		$\frac{1}{2}$
7	4	-4	1	$\frac{1}{2}$
8	4	-8	2	$-\frac{1}{2}$
9	4	-5	$\frac{2}{3}$	-
10	4	-7	$\frac{2}{3}$	-

$$k_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + \dots + k_0 = 0 \quad (1, 1)^n$$

$$k_n a^n + \dots + k_0 b^n = 0 \quad \Rightarrow k_0 = a$$

$$L_n 1.5$$

$$\frac{19}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3299 \div 9 \\ -22 \\ \hline 34 \end{array} \begin{array}{r} 321 \\ -19 \\ \hline 35 \\ -19 \\ \hline 161 \\ -15 \\ \hline 11 \end{array} \begin{array}{r} 113 \\ -19 \\ \hline 94 \end{array}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = p^2 + c \\ a = c + 1 \end{cases}$$

Если $a > b > 0$:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = p^2 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times 4 \\ \hline 524 \\ + 16 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\frac{5}{4} - 35$$

$$\frac{9-110}{1}$$

$$p^2 \neq 1$$

$$p=3$$

$$a = c + 1$$

$$b = c + 1$$

$$a+b = 820$$

$$c+9 = c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$a-c > b-c$$

$$c > 6$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 3299 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27$$

$$(-24; -29; -30), (36; 28; 27)$$

$$\sqrt{225-22} \in [0; 10] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+220 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 22 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

Если $0 > a > b$:

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$$

$$p^2 \neq 1$$

$$p=3$$

$$a = c-1$$

$$b = c-9$$

$$a(1-b) + b(1-a)$$

$$x+2$$

$$(5-x)(x+1) = 5x+35-x^2-x \Rightarrow y > 35: 3y-55 = \sqrt{225-22}$$

$$5-x-35$$

$$-x^2 + x + 35: 25-55 = 30$$

$$y-2x-x^2 = 2$$

$$\sqrt{a-b} + 6 = 2\sqrt{ab}$$

$$(y-20) \times 2(9-55) = 15$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$$

$$\frac{36}{5} \div \frac{1}{20}$$

$$30 < y < 20: y-20-2y+10 = 9+50 = 15$$

$$y > 35: 3y - 95 = 15$$

$$y = \frac{205}{3} \approx 35$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{5-x} + 6 \Rightarrow 35-2x-x^2+10 = 9+50 = 15$$

$$y < 20: 20-y-2y+10 = 90-3y = 15$$

$$a+b = b(2a+1) \quad | \cdot 2$$

$$30-9 = 5$$

$$2a+12 = 2b(2a+1) \quad (2b-1)(2a+1) = 11$$

$$4ab - 2a - 2b = 5 = 25$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \quad \frac{b_{12}}{b_1} = q^9 = \sqrt{(x-3)^9} \quad q = \sqrt{x-3}$$

$$b_{10} > b_1 \cdot q^9 = x+9 \quad x+9 = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3} \cdot (15x+6)(x-3)} = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \quad b_9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \quad q^4 = (x-3) \quad q = \sqrt[4]{\frac{15x+6}{x-3}}$$

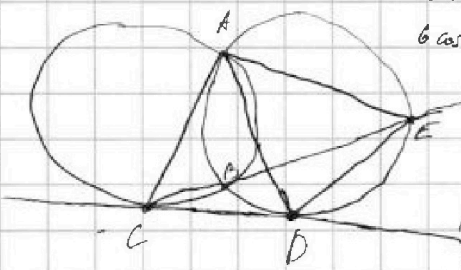
$$b_{10} = x+9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}(x-3)} \quad x+9 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 - 8x + 16 = 15x + 6 \quad x^2 - 23x + 10 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 40}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{489}}{2}$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos 2x \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 \cos x = 3 \cos 2x + p$$



$$- \cos x \cos 2x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x + \cos 2x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \sin x (2 \sin x \cos x)$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad 4 \cos^3 x + 3 \cos x = 8 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) + 3 - p = 0$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 3 \right) + 3 - p = 0 \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + 3 - p = 0 \quad p = \frac{3}{16} + 3 = \frac{25}{16}$$

$$f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x$$

$$f'(x) = -12 \cos^2 x \sin x + 12 \cos x \sin x - 3 \sin x = -3 \sin x (4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1)$$

$$= -3 \sin x (2 \cos x - 1)^2 \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = -1(4 + 6 + 3) + 3 - p = 0 \quad f(x) = 1(4 - 6 + 3) + 3 - p = 4 - p \quad p = 4$$

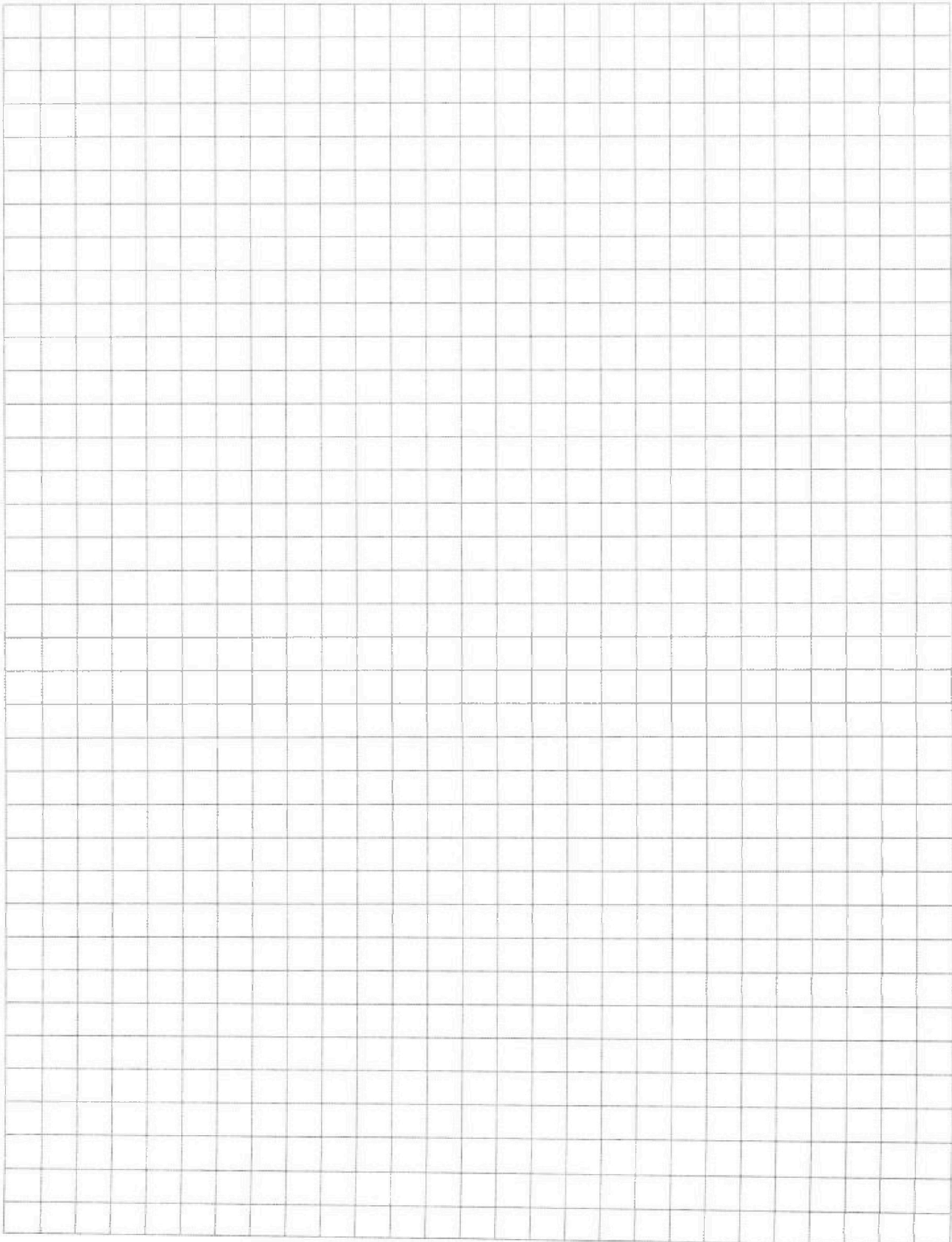


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть a, b, c — натуральные числа, p — простое число: $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к. $a > b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, p — простое: $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ Из условия $(a-b) \div 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \not\equiv b \Rightarrow p^2 + c \not\equiv 1 + c \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3$, и т.к. p — простое

число, то $p = 3$, а значит $\begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ $a + b^2 = 820$ а значит

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \quad c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 3240 = 3249 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27$$

$a = 36, b = 28, c = 27$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } a > b \geq 0$$

2) Пусть $0 > a > b$: Пусть p — простое число, тогда $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к. $a > b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, p — простое: $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$ $a \not\equiv b \Rightarrow c - 1 \not\equiv c - p^2 \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3$, т.к. простое

$$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases} \quad a + b^2 = 820 \quad c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \quad D = 289 + 2960 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{17 \pm 57}{2} =$$

$$= -20; 37$$

$$\begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -20 \end{cases}$$

$a = -21, b = -29, c = -20$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } 0 > a > b$$