



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ b q^8 = x+3 \\ b q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

, где b - первый член прогрессии, а q - знаменатель.

$$b > 0 \Rightarrow b q^8 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \begin{matrix} \text{---} \\ -3 & \frac{9}{25} & 6 \\ \text{---} \end{matrix} x$$

Разделим 3-е на 1-е и 2-е:

$$\begin{cases} q^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow q^{\frac{8}{6}} = \frac{1}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^6 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \Rightarrow (x+6) \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{x+3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x-9 = x^2+6x+9 \Rightarrow x^2-19x+18=0 \Rightarrow x = \sqrt[18]{1} \Rightarrow x=18$$

Подстановками можно убедиться, что 18 подходит:

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x - 2 \cos x p + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^3 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^3 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos 3x - 3 \cos^3 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = t : (t-1)^2 = t^3(1-p) \quad \text{при } t=0 \text{ реш. нет } \Rightarrow t \neq 0$$

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \sqrt[3]{1-p} = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$1 - \sqrt[3]{1-p} = 0 \text{ может не выполняться}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

При каких p решений будет бесконечно много.

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty)$$

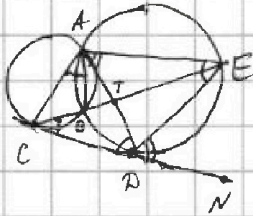


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NY

$\angle AED = \angle ADC = x$, $\angle EAD = \angle EDN = y$, $\angle EAB = \angle ECD = z$ как
углы, опирающиеся на одну дугу.
 $\angle CED = 180 - (180 - y) - z = y - z = \angle BAD$ (одна дуга) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle CAT = \angle BAD + \angle CAB = y - z + z = y$$

$\angle CAT = y = \angle TAE$
 $\angle ADC = x = \angle AED$ $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$ по 2-м углам \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}; \quad \text{т.к. } AT - \text{биссектр. } \frac{AE}{AC} = \frac{TE}{TC} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AD \cdot AC}{AE} \Rightarrow AC^2 = AD^2 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow AD = AC \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Если $(a-c)(b-c)$ - квадрат простого числа p , то

возможны случаи: $a-c=b-c=p$ или $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

Умножив первую условие, получаем, что 2-ой случай не подходит. Рассмотрим первый: $a-c=b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2+a=710 \Rightarrow D=1+4 \cdot 710=2841, \text{ что не явл. квадратом } \Rightarrow$$

$\Rightarrow a$ будет не целое \Rightarrow 1 случай не подходит.

Остался 3-ий: $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow (p+1)^2+p^2+c=710 \Rightarrow D=9-4p^2+4 \cdot 709 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \leq 26 \Rightarrow p \in \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}. \text{ Из 2-го условия:}$$

$$b-a = p^2 - 1 \Rightarrow \text{Каждо число } (p-1)(p+1) \text{ не делится на 3,}$$

а т.к. $p-1$ и $p+1$ взаимно просты, то каждое число $p-1$ и $p+1$ не делится на 3 $\Rightarrow p \in \{3\} \Rightarrow a=1+c$ и $b=9+c$.

$$\text{Рассмотрим (1): } c^2+3c+p^2-709=0 \Rightarrow c^2+3c-700=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-3 \pm 53}{2} = \begin{cases} 25 \\ -28 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (26; 34; 25) \text{ и } (-27; -19; -28)$$

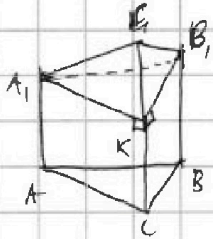


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

Пусть $A_1A = x$, $C_1C = y$, $B_1B = z$, $AC = BC = AB = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2}a = 3 \\ \frac{y+z}{2}a = 3 \\ \frac{x+z}{2}a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+ay = 6 \\ ay+az = 6 \\ ax+az = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}a \\ z = \frac{2}{3}a \\ y = \frac{4}{3}a \end{cases}$$

Проведем $B_1K \parallel BC \Rightarrow B_1K \perp KC \Rightarrow CK = y - z$ и $B_1K = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1K} = \frac{a \cdot \frac{4}{3}a - x^2}{2} = 1$$

Не трудно заметить, что высота $A_1B_1C_1K$ - высота пирамиды

$$A_1, C_1, B_1, K \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow V_{A_1B_1C_1K} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{A_1B_1C_1K} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{h \cdot a}{2} = 1 \text{ по укл} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{A_1B_1C_1K} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{т.к. } A_1A = KC = B_1B, \text{ то } V_{A_1B_1C_1K} = x \cdot S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Суммарный объем: } \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

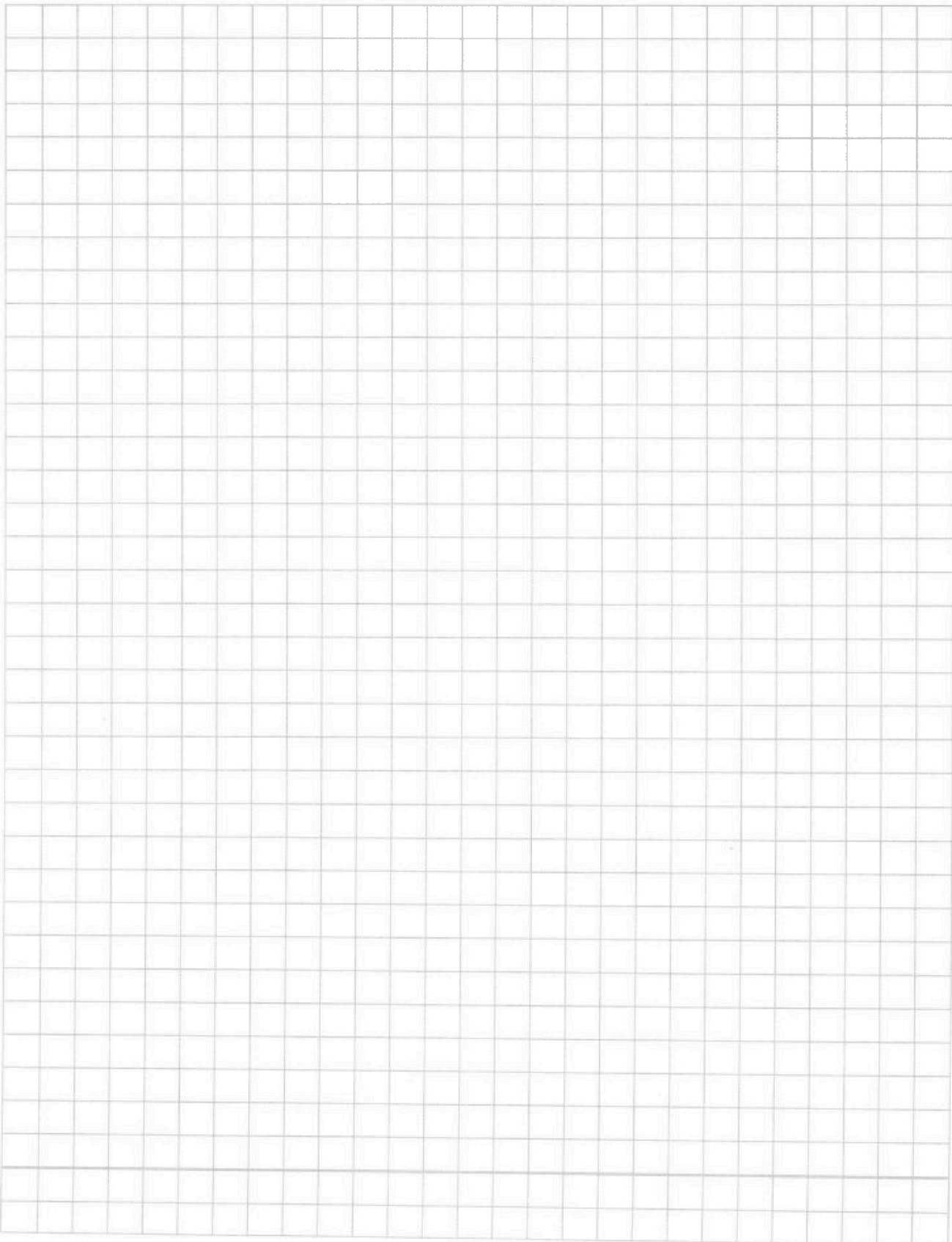
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

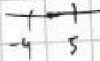
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b-c=1$$

$$a-c=p^2$$

$$(p^2+c)^2 + 1+c = 710$$

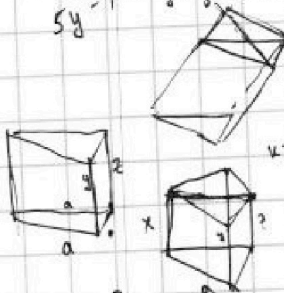
9 ≤ 259



$$-5y+1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{5} \Rightarrow y \leq 0.2$$

$$-3y+9 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y \leq 3$$

$$5y-1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{5} \Rightarrow y \geq 0.2$$



$$\frac{x+1}{2} a = 3$$

$$\frac{4x+2}{2} a = 3$$

$$\frac{4x+2}{2} a = 2$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$4x+2 = 2$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 1$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 1$$

$$f(x) = \sqrt{25x-9} \cdot (x-6)$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{25x-9}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{25x-9}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{4\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{8\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{1}{16\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(7)}(x) = \frac{1}{32\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(8)}(x) = \frac{1}{64\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(9)}(x) = \frac{1}{128\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{256\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(11)}(x) = \frac{1}{512\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(12)}(x) = \frac{1}{1024\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(13)}(x) = \frac{1}{2048\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(14)}(x) = \frac{1}{4096\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(15)}(x) = \frac{1}{8192\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(16)}(x) = \frac{1}{16384\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(17)}(x) = \frac{1}{32768\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(18)}(x) = \frac{1}{65536\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(19)}(x) = \frac{1}{131072\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(20)}(x) = \frac{1}{262144\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(21)}(x) = \frac{1}{524288\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(22)}(x) = \frac{1}{1048576\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(23)}(x) = \frac{1}{2097152\sqrt{25x-9}}$$

$$f^{(24)}(x) = \frac{1}{4194304\sqrt{25x-9}}$$

$$25x-9 = x^2+6x+9$$

$$x^2-19x+18=0$$

$$19^2-4 \cdot 18 = 289$$

$$\sqrt{289} = 17$$

$$x = \frac{19 \pm 17}{2}$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$x = 18$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{x+5} + 4 \geq \sqrt{7-x-42}$$

$$x+5 + 8\sqrt{x+5} + 16 \geq 7-x-42$$

$$8\sqrt{x+5} \geq -20-2x-42$$

$$c+1 < c+p^2$$

$$1 < p^2$$

$$p^2 + c < 7 + c$$

$$p^2 < 7$$

$$\frac{709}{4} - \frac{2644}{21}$$

$$\frac{2836}{9}$$

$$\frac{712845}{9}$$

$$\frac{2840}{9}$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$2841$$

$$(7+c)^2 + p^2 + c = 710$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 710$$

$$c^2 + 3c + p^2 - 709 = 0$$

$$9 - 4p^2 + 4 \cdot 709 \geq 0$$

$$9 + 4 \cdot 709$$

$$2809$$

$$(p-1)(p+1)$$

$$2809$$

$$2809$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq' = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$bq'' = x+3$$

$$bq''' = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$$

$$(bq''')^2 = (x+3) \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

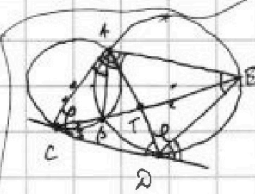
$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$x > \frac{9}{25}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\frac{1}{(x-6)^3} = x+3$$

$$1 = (x+3)(x-6)^3$$



$$\frac{CT}{TE} = \frac{2}{5}$$

$$CE = 2x$$

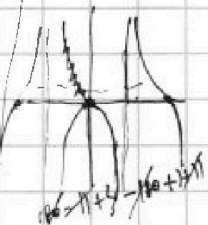
$$CB \cdot CE = CE^2$$

$$\frac{AE}{CA} = \frac{5}{2} = \frac{54}{24}$$

$$\frac{ED}{AB} = \frac{TD}{BT} = \frac{ET}{AT}$$



$$\begin{aligned} (180-11) &= 11 \\ (120-11) &= 11 \\ (180-110+11) &= 11 \\ 11 &= 3 \\ 11 & \end{aligned}$$



$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt{1-p} \quad \frac{t-1}{t} = \sqrt{1-p}$$

$$\frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{t-1}{t-1} = \frac{2x}{t-1}$$

$$1 - \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p$$

$$\frac{t^3 - (t-1)^3}{t^3} = \frac{(t-t+1)(t^2+t(t-1)+t-1)}{t^3}$$

$$\frac{t^3 - t^2 + t + t^2 - 2t + 1}{t^3} = p$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} = p$$

$$0 < 1 \leq (1-\sqrt{1-p})^3 \leq 1$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 26 \\ 15c \\ \hline 52 \\ 626 \\ \hline 6729 \end{array}$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$(a-1)(a+710) = 0$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a^2 + 3c + 1 = 710 + p^2$$

$$31 - p \leq 0$$

$$9 - 4p^2 + 710 \geq 0$$

$$719; 715; 8 \leq 1 + p \leq 4$$

710	51	719
240	51	126
241	51	23
538	51	49
295	51	4
169	51	198
676	51	
414	51	
235	51	

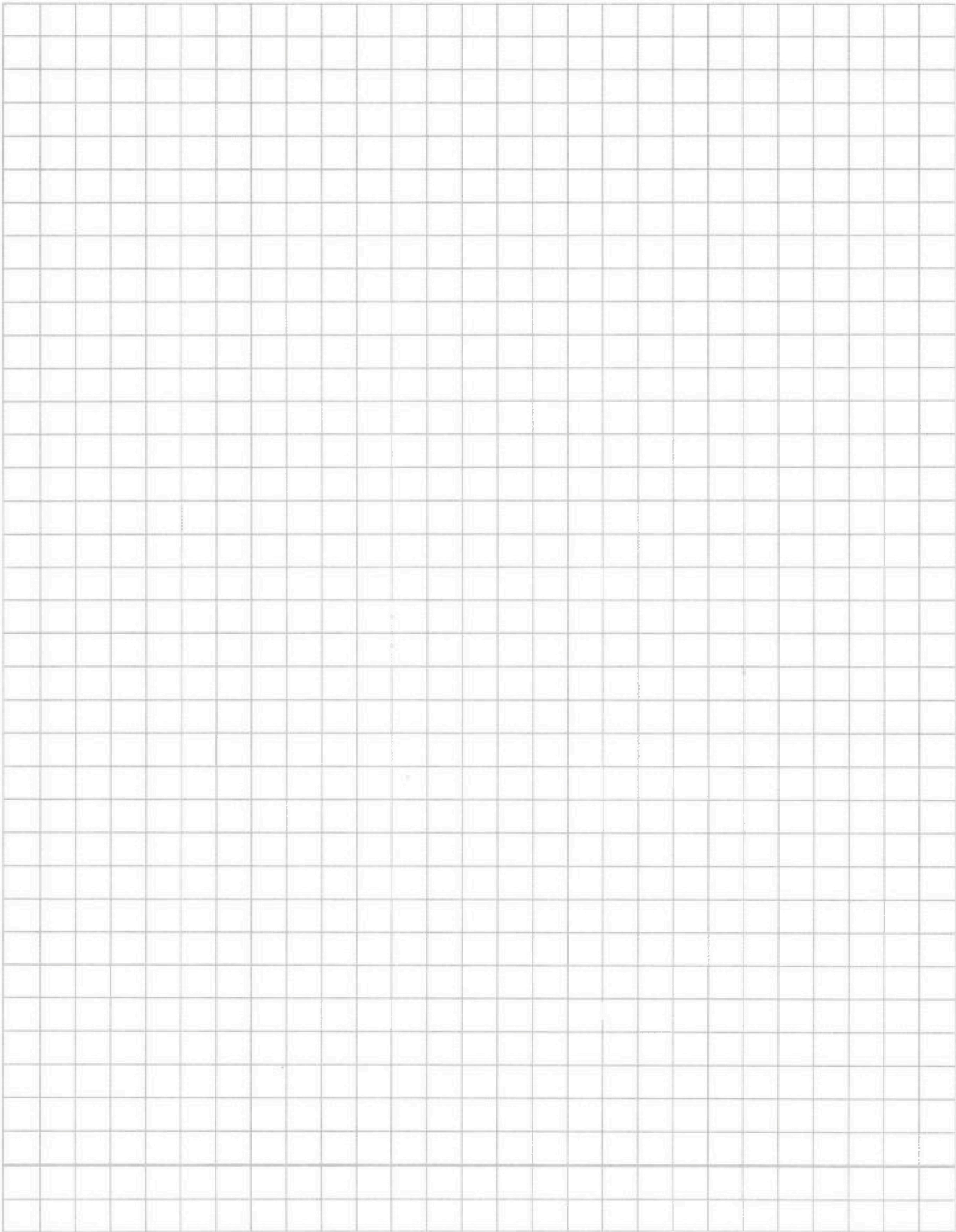


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

