



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x - 2 \cos x p + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos 3x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = t : (t-1)^2 = t^3(1-p) \quad \text{при } t=0 \text{ реш. нет } \Rightarrow t \neq 0$$

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \sqrt[3]{1-p} = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$1 - \sqrt[3]{1-p} = 0 \text{ может не выполняться}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

При каких p решений будет бесконечное число.

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty)$$

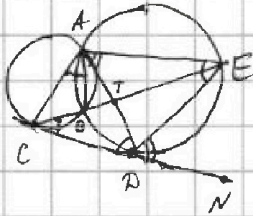


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NY

$\angle AED = \angle ADC = x$, $\angle EAD = \angle EDN = y$, $\angle EAB = \angle ECD = z$ как
углы, опирающиеся на одну дугу.
 $\angle CED = 180 - (180 - y) - z = y - z = \angle BAD$ (одна дуга) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle CAT = \angle BAD + \angle CAB = y - z + z = y$$

$\angle CAT = y = \angle TAE$
 $\angle ADC = x = \angle AED$ $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$ по 2-м углам \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}; \quad \text{т.к. } AT - \text{биссектр. } \frac{AE}{AC} = \frac{TE}{TC} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AD \cdot AC}{AE} \Rightarrow AC^2 = AD^2 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow AD = AC \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Если $(a-c)(b-c)$ - квадрат простого числа p , то

возможны случаи: $a-c=b-c=p$ или $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

Умножив первую условие, получаем, что 2-ой случай не подходит. Рассмотрим первый: $a-c=b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2+a=710 \Rightarrow D=1+4 \cdot 710=2841, \text{ что не явл. квадратом } \Rightarrow$$

$\Rightarrow a$ будет не целое \Rightarrow 1 случай не подходит.

Остался 3-ий: $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow (p+1)^2+p^2+c=710 \Rightarrow D=9-4p^2+4 \cdot 709 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \leq 26 \Rightarrow p \in \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}. \text{ Из 2-го условия:}$$

$$b-a = p^2 - 1 \Rightarrow \text{Каждо число } (p-1)(p+1) \text{ не делится на 3,}$$

а т.к. $p-1$ и $p+1$ взаимно просты, то каждое число $p-1$ и $p+1$ не делится на 3 $\Rightarrow p \in \{3\} \Rightarrow a=1+c$ и $b=9+c$.

$$\text{Рассмотрим (1): } c^2+3c+p^2-709=0 \Rightarrow c^2+3c-700=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9+2800}}{2} = \begin{cases} 25 \\ -28 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (26; 34; 25) \text{ и } (-27; -19; -28)$$

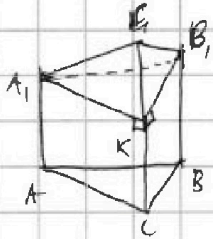


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

Пусть $A_1A = x$, $C_1C = y$, $B_1B = z$, $AC = BC = AB = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2}a = 3 \\ \frac{y+z}{2}a = 3 \\ \frac{x+z}{2}a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+ay = 6 \\ ay+az = 6 \\ ax+az = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}a \\ z = \frac{2}{3}a \\ y = \frac{4}{3}a \end{cases}$$

Проведем $B_1K \parallel B_1C \Rightarrow B_1K \perp KC \Rightarrow C_1K = y - z$ и $B_1K = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{C_1AK} = \frac{a \cdot \frac{4}{3}a - x}{2} = 1$$

Не трудно заметить, что высота $A_1B_1C_1$ - высота пирамиды

$$A_1, C_1, B_1, K \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow V_{A_1, C_1, B_1, K} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{C_1AK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{h \cdot a}{2} = 1 \text{ по укл} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{A_1, C_1, B_1, K} = \frac{1}{4\sqrt{27}}$$

$$\text{т.к. } A_1A = KC = B_1B, \text{ то } V_{A_1B_1C_1, KA_1} = x \cdot S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Суммарный объем: } \sqrt{3} + \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

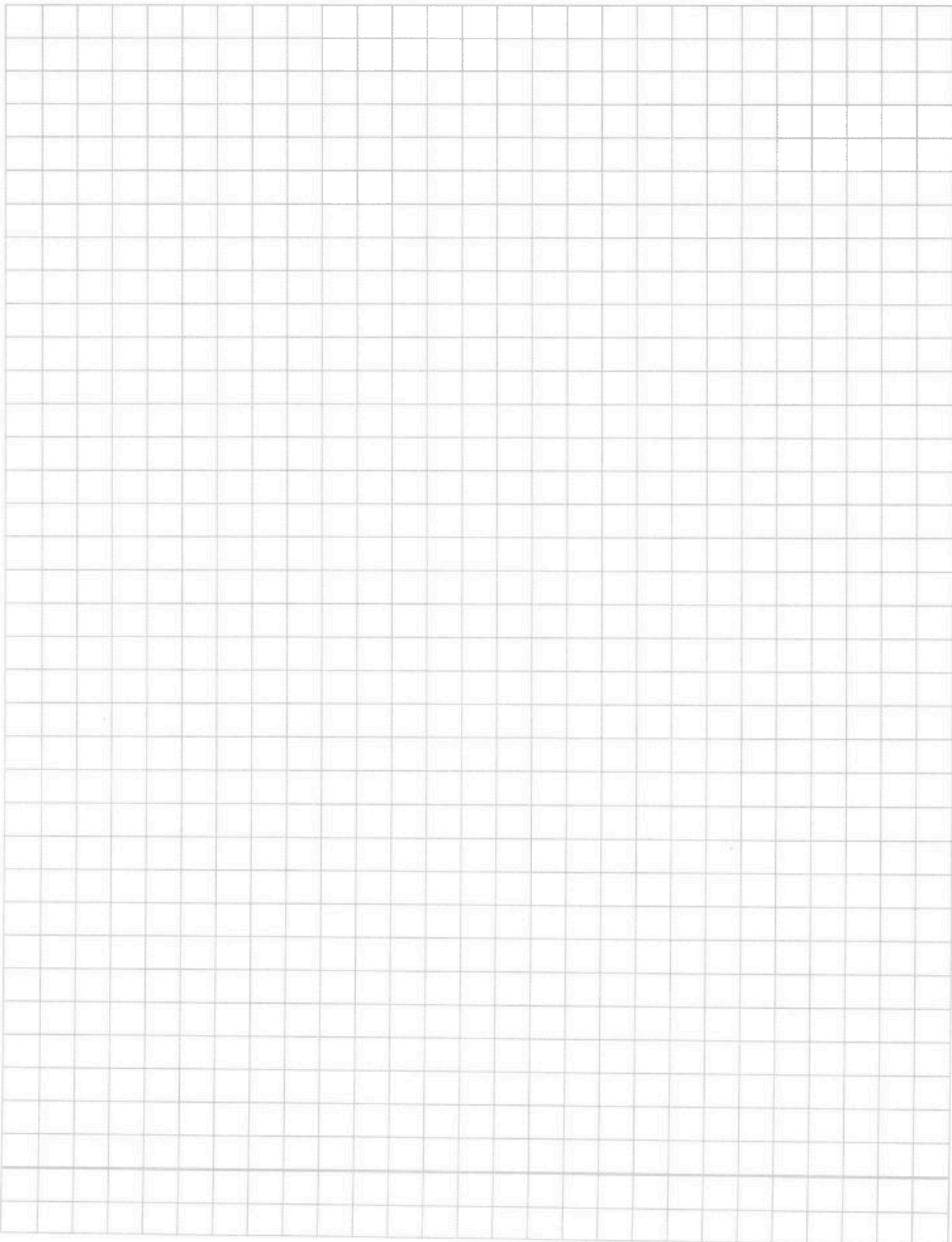


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq' = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$bq'' = x+3$$

$$bq''' = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$$

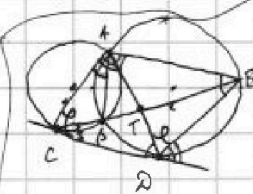
$$(bq''')^2 = (x+3) \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\frac{1}{(x-6)^3} = x+3$$

$$1 = (x+3)(x-6)^3$$



$$\frac{CB \cdot CE}{CB \cdot CE} = \frac{CE^2}{CB \cdot CE}$$

$$\frac{AE}{CA} = \frac{5}{2} = \frac{54}{24}$$



$$\frac{ED}{AB} = \frac{TD}{BT} = \frac{ET}{AT}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

$$AD = \sqrt{10y^2} = y\sqrt{10}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a = 1 + 4 \cdot 710$$

$$39 - p \leq 0$$

$$1 \leq p$$

$$9 - 4p^2 + 710 \geq 0$$

$$719; 715; 2 \leq p \leq 13$$

$$(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x = p + 3p\cos^2 x + 12\cos x$$

$$= 12\cos^3 x - 6 + 10$$

$$4p\cos^3 x - 12\cos^3 x + 12\cos x - 4 = 0$$

$$p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$p t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$p t^3 + (t-1)^3 = t^3$$

$$(t-1)^3 = t^3(1-p)$$

$$1 - \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p$$

$$\frac{t^3 - (t-1)^3}{t^3} = \frac{(t-t+1)(t^2 + t(t-1) + (t-1)^2)}{t^3}$$

$$\frac{t^3 - t^2 + t + t^2 - 2t + 1}{t^3} = p$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} = p$$

$$0 < 1 \leq 1 - 3t - p$$

$$\frac{710}{4} = 177.5$$

$$\frac{2840}{241} = 11.78$$

$$\frac{538}{295} = 1.82$$

$$\frac{51}{51} = 1$$

$$\frac{51}{51} = 1$$

$$\frac{719}{626} = 1.148$$

$$\frac{198}{198} = 1$$

$$\frac{719}{626} = 1.148$$

$$\frac{198}{198} = 1$$

$$\frac{719}{626} = 1.148$$

$$\frac{198}{198} = 1$$

$$\frac{719}{626} = 1.148$$

$$\frac{198}{198} = 1$$

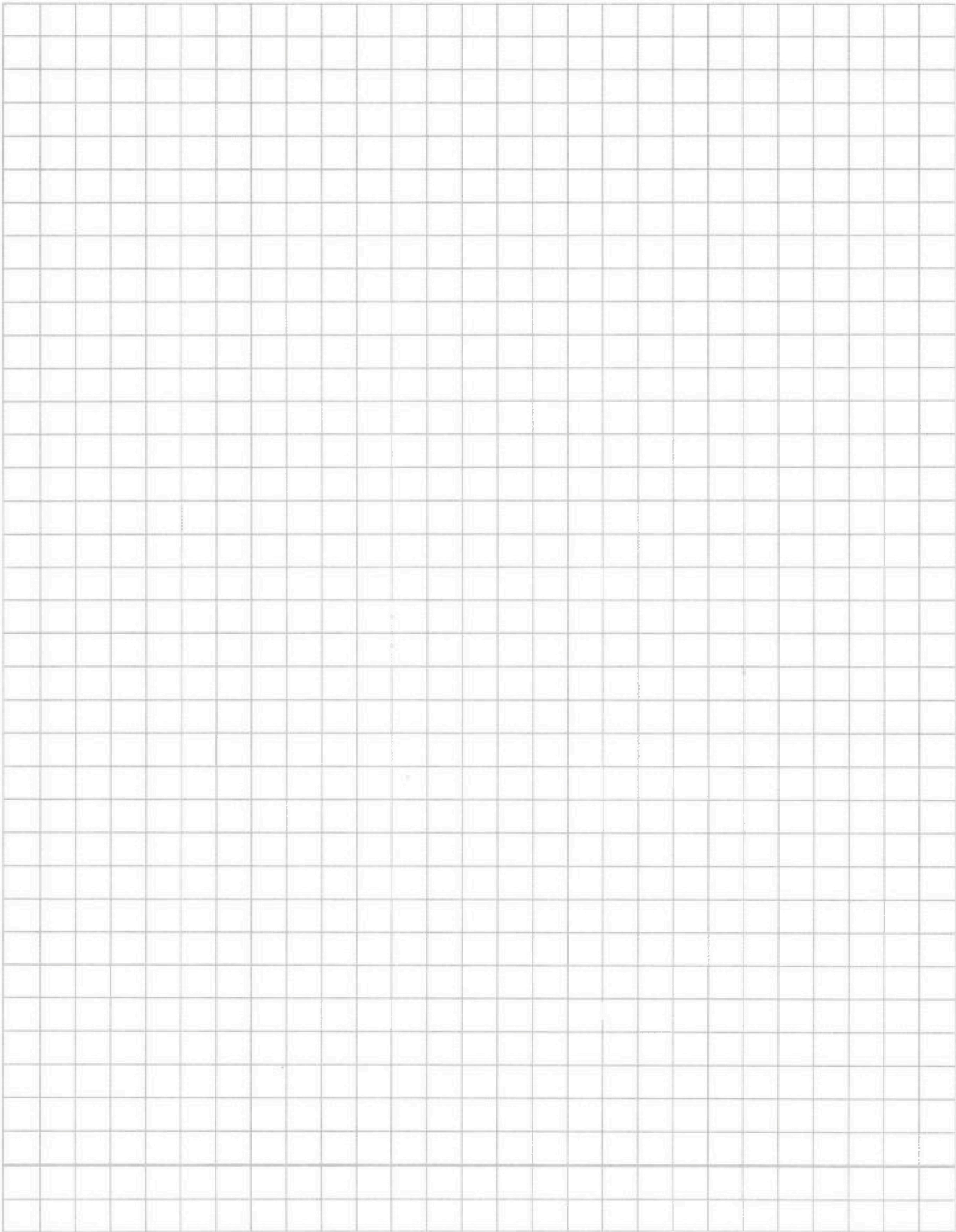


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

