



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть  $b_1, b_2, \dots$  - эта геом прогрессия с дел.  $q \neq 0$

Прогрессия состоит из действ. чисел  $\Rightarrow q^2 > 0$

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}; \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$b_9 = b_7 \cdot q^2; \quad b_7 \neq 0, \quad q^2 > 0 \Rightarrow b_9 > 0 \Rightarrow x > -3.$$

$$b_{11}^2 = b_7 \cdot b_{15} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{(x-6)^{3/2}} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \left| \frac{25x-9}{x-6} \right| = \frac{25x-9}{x-6},$$

т.к. числа  $(25x-9)$  и  $(x-6)$  - одного знака,

потому что  $(25x-9)(x-6) > 0 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$ , т.к.  $b_{11} = b_7 \cdot q^4 > 0$

$$b_9^2 = b_7 \cdot b_{11} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = \sqrt{(25x-9)^2} = |25x-9|$$

$$(x+3)^2 = |25x-9|$$

Случай 1:  $x < \frac{9}{25}; \quad 25x-9 < 0$

$$(x+3)^2 = 9-25x$$

$$x^2 + 31x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -31 \text{ (не подходит, т.к. } x > -3).$$

Случай 2:  $x > \frac{9}{25}; \quad 25x-9 > 0$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \Rightarrow x_3 = 1; \quad x_4 = 18.$$

$x_3$  не подходит, т.к.  $(25x_3-9)(x_3-6) = -5 \cdot 16$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:

•  $x_1 = 0$

- подходит

$$b_7 = \sqrt{(-9) \cdot (-6)} = 3\sqrt{6}; \quad b_9 = 3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{(-9)}{(-6)^3}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}; \quad q = \pm \sqrt[4]{6}$$

•  $x_4 = 18$

- подходит.

$$b_7 = \sqrt{\frac{784 \cdot 12}{12^3}} = \sqrt{441 \cdot 12} = 21\sqrt{12}; \quad b_9 = 21; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{441}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}; \quad q = \pm \sqrt[4]{12}$$

В решении не рассматривались случаи  $q=0$ ,  $(25x-9)=0$ ,  $(x-6)=0$ , т.к. тогда геом. прогрессия не имеет смысла.

Ответ:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\rho \cos^3 x + 3(\rho + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\rho(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3\rho \cos x + 12 \cos x - 6(2 \cos^2 x - \overset{1}{\cancel{\sin^2 x}}) - 10 = 0$$

$$4\rho \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$\rho \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 = (1 - \rho) \cos^3 x$$

$$1 - \rho = \frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x} \quad \cos^3 x \neq 0, \text{ т.к. иначе } -1 = 0$$

$$\rho = 1 - \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

Рассмотрим функцию  $F(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$ . На отрезке

$[-1; 0)$  она убывает,  $F(-1) = -7$ . Значит на этом отрезке

она принимает все значения  $(-\infty; -7]$

и на отрезке  $(0; 1]$  она убывает, принимая все значения

на  $[1; +\infty)$ , т.к.  $F(1) = 1$ .

Значит, если  $\rho \in (-7; 1)$ , то у уравнения нет корней,

а при всех остальных значениях — есть хотя бы один.

(т.к. функция непрерывна на отрезках  $[-1; 0)$  и  $(0; 1]$  и для

каждого значения  $\rho \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$  найдётся такое

$-1 \leq t \leq 1$ , что  $F(t) = \rho \Rightarrow$  найдётся и  $x$ , такой, что  $\cos x = t$ ).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\cos x - 1)^3 = (1-p)\cos^3 x$$

$$(1 - \cos x)^3 = (p-1)\cos^3 x$$

$$1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos x$$

$$\cos x (1 + \sqrt[3]{p-1}) = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решение для каждого

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Покажем, что  $-1 \leq \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1$

Пусть  $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} < -1 \Rightarrow \frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt[3]{p-1} < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8 < p-1 < -1 \Rightarrow -7 < p < 0$ , это неверно

Пусть  $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} > 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} > 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[3]{p-1} < 0 \Rightarrow$

$-1 \leq p-1 < 0 \Rightarrow 0 < p < 1$ , это тоже неверно

Ответ:  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ ;

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_9 = x+3$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$b_{11} = b_7 \cdot b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3} \cdot (25x-9)(x-6)} =$$

$$= \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = \frac{\sqrt{25x-9}}{x-6}$$

$$b_{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$$

$$(x+3)^2 = b_9^2 = b_7 \cdot b_{11} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{x-6}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)(x-6) \cdot \frac{25x-9}{(x-6)}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2$$

$$b_7^2 = 25x-9$$

$$(x+3)^2 = \sqrt{25x-9} = 25x-9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$(x-18)(x-1) = 0$$

18, 1

$$(x+3)^2 = \sqrt{25x-9} = 9 - 25x$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x(x+31) = 0$$

0, -31

$$b_7 = 21\sqrt{12}$$

$$b_9 = 21$$

$$b_{15} = \frac{21}{12}\sqrt{12}$$

$$b_7 > 0 \quad b_9 = 9^2 \cdot b_{15} > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$25x-9 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x \in (3, 18) \cup (18, +\infty) \quad (3, 18) \cup (18, +\infty)$$

$$-784, -37$$

1) > 0	> 0	18
2) < 0	< 0	31

$$-784$$

$$18$$

$$31$$

$$21^2 = 3 \cdot 49 = 21^2 \checkmark$$

$$3) > 0 < 0$$

$$-31, 0, 1, 18$$

$$b_7 = \sqrt{784 \cdot 37} = 28\sqrt{37}$$

$$b_9 = 28$$

$$b_{15} = \frac{28}{3} \sqrt{37}$$

$$b_7 = 3\sqrt{6}$$

$$b_9 = 3$$

$$b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{6} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_7^2 = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$$b_9^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_{15}^2 = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$b_7 = \sqrt{x-6}$$

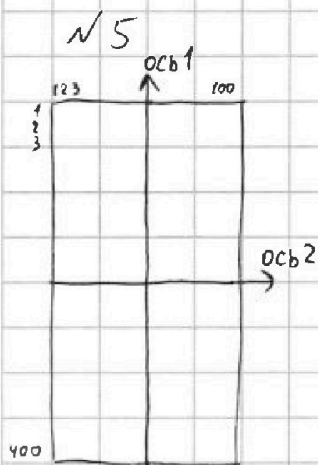


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сначала докажем, что если ~~какая~~ закрашенное множество ~~симметрично~~ обладает двумя из 3-х симметрий - то оно обладает и третьей. Для этого введём систему координат, где в координаты левой верхней клетки -  $(1, 1)$ ; правой нижней -  $(100; 400)$ . Будем называть вертикальную

~~ось~~ ~~ось 1~~ ~~ось 2~~ среднюю линию осью 1, горизонтальную - осью 2. Заметим, что если клетки симметричны относительно оси 1 - они имеют координаты  $(x; y)$  и  $(101-x; y)$ . Если симм. относительно оси 2:  $(x; y)$  и  $(x; 401-y)$ . Если относ. центра:  $(x; y)$  и  $(101-x; 401-y)$ . Тогда если, например, множество симметрично относительно оси 1 и оси 2 и закрашена клетка  $(x; y)$ , то закрашена и клетка  $(101-x; y)$  <sup>(из сим. 1)</sup>, а значит и клетка  $(101-x; 401-y)$  из сим. 2  $\Rightarrow$  закрашена и центрально-симм. клетка. Аналогично доказывается, что если симметричны центральная и осевая, то и другая ~~из~~ осевая тоже:  $((x; y) \Rightarrow (101-x; 401-y) \Rightarrow (101-x; 401-(401-y)) \Rightarrow (101-x; y))$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем кол-во множеств <sup>(из 8 клеток)</sup>, которые симметричны относительно оси 1. Для этого поставим 4 клетки в "левый" прямоугольник  $50 \times 400$ , а затем в "правый" прямоугольник  $50 \times 400$  отметим 4 клетки, симметричные им относительно оси 1. ( $C_{20000}^4$  способов). Очевидно, что такие множества не будут совпадать, т.к. "левые" прямоугольники разные. А также это будут все симм. относительно оси 1 множества, т.к. в каждом таком множестве ровно по 4 клетки в "левом" и "правом" прямоугольниках  $50 \times 400$ . Аналогично доказывается, что симметричных относительно оси 2 и симм. относительно центра множеств также по  $C_{20000}^4$ , с точностью до преобразования, переводящее 4 поставленные клетки в 4 добавленные. (в симм. относительно оси 2 следует брать "верхний" и "нижний" прямоугольники  $100 \times 200$ , а в центральном - любую из пар прямоугольников)

Теперь найдем кол-во множеств симметричных относительно оси 3-х объектов  $\Rightarrow$  симметричных относительно всех 3-х.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для этого поставим 2 кетки из 8 в «верхний левый» прямоугольник  $50 \times 200$  ( $C_{10000}^2$  способов), а затем отметим оставшиеся 6, отразив их поочерёдно относительно каждой из осей и точки центра. Аналогично, это будут все «трёхкратно симметричные» множества по одному разу. Но в каждом из случаев одиночной симметрии мы также считали эти «трёхкратно симметричные» множества  $\Rightarrow$  2 раза их посчитали зря

Итого, к-во способов равно  $C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - 3 \cdot C_{10000}^2 + C_{10000}^2 = 3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$

Ответ:  $3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6  $(a; b; c)$  такие, что

$$a < b; (b-a) \div 3; (a-c)(b-c) = p^2, a^2 + b = 710$$

$p^2 \div (a-c) \Rightarrow (a-c)$  может принимать одно из этих

значений:  $1, p, p^2, -1, -p, -p^2$ . Рассмотрим 6 случаев:

Случай 1:  $(a-c) = p \Rightarrow (b-c) = p \Rightarrow a = b$  Противоречие

Случай 2:  $(a-c) = -p \Rightarrow (b-c) = -p \Rightarrow a = b$  Противоречие.

Случай 3:  $(a-c) = p^2 \Rightarrow (b-c) = 1 \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0$ , т.к.

$p \geq 2$ . Противоречие

Случай 4:  $(a-c) = -1 \Rightarrow (b-c) = -p^2 \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0$ . Противоречие

Случай 5:  $(a-c) = 1 \Rightarrow (b-c) = p^2 \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ .

Если  $p \neq 3$ , то одно из чисел  $p-1$  и  $p+1$  - делится на 3 ~~н~~,

значит и  $b-a \div 3$ , что не так  $\Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow b-c = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b-a = 8 \Rightarrow b = a+8 \Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-26)(a+27) = 0$$

- $a = 26 \Rightarrow b = a+8 = 34 \Rightarrow c = a-1 = 25. \quad (26; 34; 25)$

- $a = -27 \Rightarrow b = a+8 = -19 \Rightarrow c = a-1 = -28 \quad (-27; -19; -28)$

Случай 6:  $(a-c) = -p^2 \Rightarrow (b-c) = -1 \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = 8$

(Аналогично со случаем 5)  $\Rightarrow (a-26)(a+27) = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\bullet a = 26 \Rightarrow b = a + 8 = 34 \Rightarrow c = b + 1 = 35 \quad (26; 34; 35)$$

$$\bullet a = -27 \Rightarrow b = a + 8 = -19 \Rightarrow c = b + 1 = -18 \quad (-27; -19; -18)$$

Для каждой из троек все условия выполняются  $\Rightarrow$  все подходит

Ответ:  $(a; b; c) = (26; 34; 25), (26; 34; 35), (-27; -19; -28), (-27; -19; -18)$

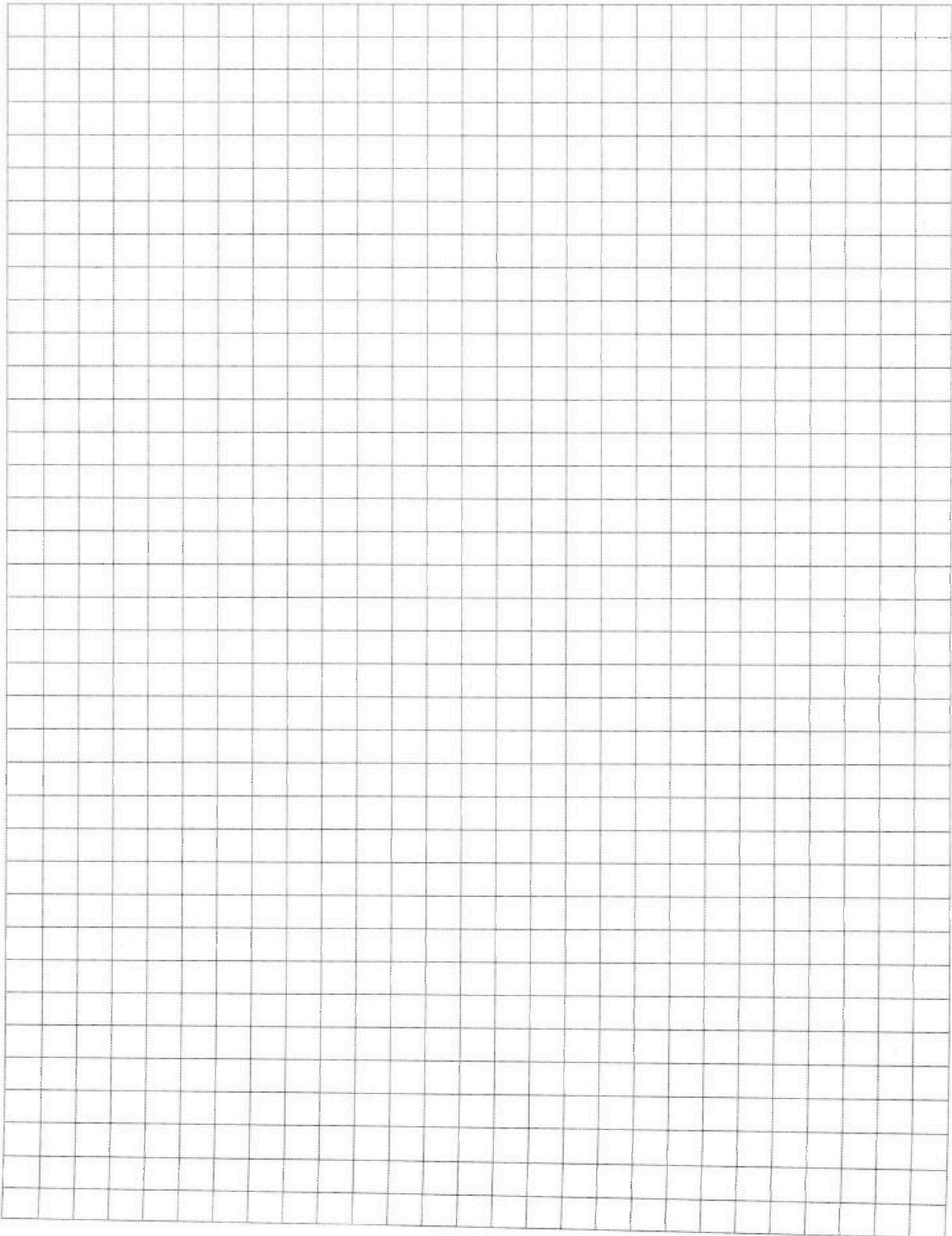


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3)  $a - c = -1$   
 $b - c = -p^2$

$b - a = 1 - p^2 \leq 0$

$(a - c)(b - c)$

$\cos x = -p$

4)  $a - c = -p^2$   
 $b - c = -1$

$b - a = p^2 + 1 \Rightarrow p = 3$

$p < 1$

$\cos x > 0$

$a - c = -9$

$c - a = 9$

$a - b = 9$

$\cos x - 1 = x \cos^2 x$

$b - c = -1$

$c - b = 1$

$a - b = 9$

$1 - \cos x =$

$b - a = 8$

$(1 + p)^2 = 4p^2$

$a - c = -p^2$

$-1 \cdot \sqrt{p-1} < 0$

$\cos x - 1 = \frac{1}{2} \cos^2 x$

$b - c = -1$

$26, 34, 35$

$1 < p - 1 < 0$

$b - a = 8$

$-23, -19, -18$

$1 < \frac{a}{b} < 1$

$1/1 \text{ perm} \rightarrow \text{Opem?}$

$b - c = -1$

$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10 \quad (\frac{1}{2} - 1)^2 = \frac{1}{2} t^2$

$1 - p = \frac{\cos x - 1}{\cos x^3}$

$\leq 16$   
 $\leq 4(p+3)$

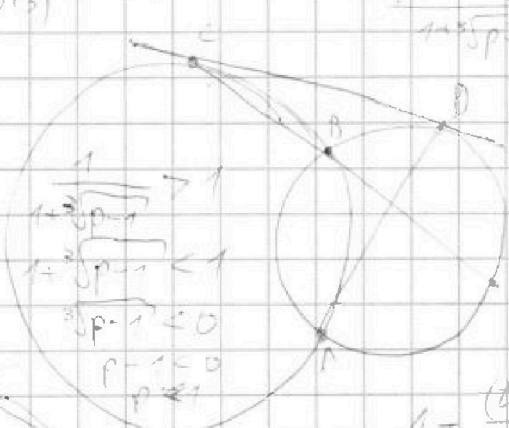
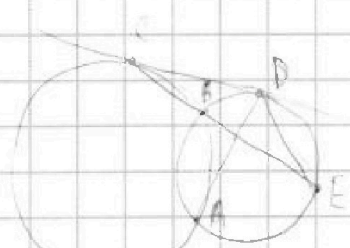
$1 < \cos x < 16$

$\frac{1}{2} t^2 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

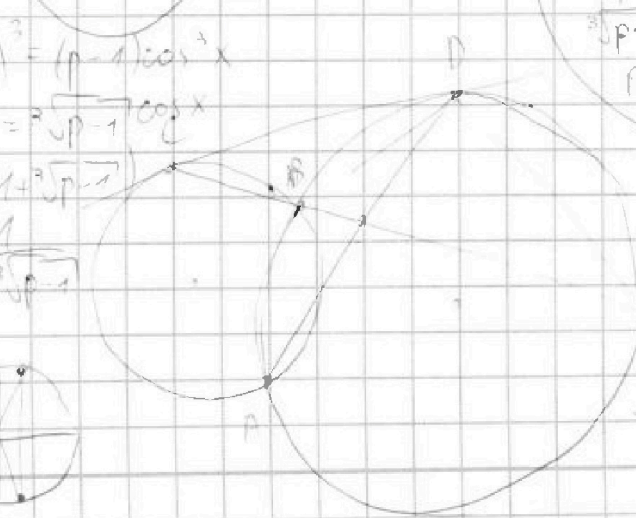
$(1 - \cos x)^2 = \cos^3 x$

$\geq -4(p+3)$

$1 - \frac{1 - \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} > 0$



$\frac{\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 0$   
 $1 - \frac{1 - \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 0$   
 $1 - \frac{1 - \sqrt[3]{p-1}}{2\sqrt[3]{p-1}}$



$1 - \frac{(t-1)^2}{2t}$

$1 - (1 - \frac{1}{t})^2$

$(1 - \cos x)^3 = (p-1) \cos^3 x$   
 $1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos x$   
 $1 = \cos x (1 + \sqrt[3]{p-1})$   
 $\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$   
 $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$   
 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$   
 $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including trigonometric identities, geometric diagrams, and algebraic manipulations.

**Top Left:** A circle with points A, B, C, D, E on its circumference. A vertical line segment is drawn from the center to the bottom. Various angles and lengths are marked.

**Top Right:** A 3D diagram of a pyramid with a square base. The height is labeled  $a = \frac{p}{\sqrt{3}}$ . A circular cross-section is shown to the right.

**Middle Left:**

$$\cos 3x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot 3 \pm$$

$$9 - 8 \cdot 2$$

**Middle Right:**

$$3(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= 3 \cos x - 3 \cos^3 x$$

**Bottom Left:**

$$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x - 2 \sin^2 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos x$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cos(3x)}{\cos x} = \frac{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x}{\cos x} = \frac{\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x}{\cos x} = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos x} = 4 \cos^2 x - 3$$

**Bottom Right:**

$$\frac{(t-1)^3}{t^3} = \frac{3(t-1)^2 t^2 - 3(t-1)^2 t^3}{t^6} = \frac{3(t-1)^2 (t^2 - t^3)}{t^6} = \frac{3(t-1)^2 (1-t)}{t^4}$$

$$= \frac{3(1-t)^3}{t^4}$$

**Algebraic Manipulations:**

$$p-1 = -\frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x}$$

$$p-1 = \frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

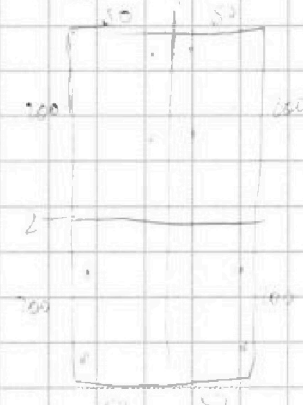
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

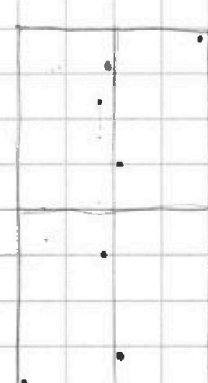
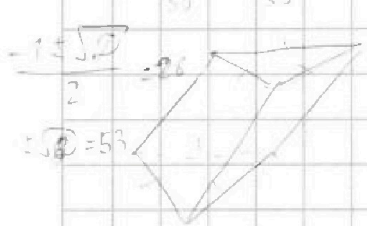
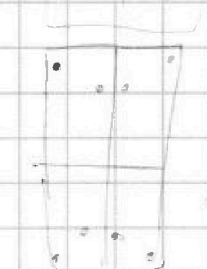
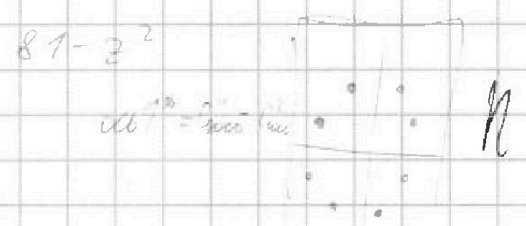
$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$3C_{10000}^4 - 2C_{10000}^2$$

$$(y+4)^2 + 16(y-5)^2 + 8|(y+4)(y-5)| = 81-z^2$$



суб 1:  $C_{10000}^{84}$   
 суб 2:  $C_{10000}^7$   
 центр:  $C_{10000}^4$   
 суб 1 + суб 2:  $C_{10000}^2$   
 суб 1 + центр:  
 суб 2 + центр:  
 суб 1 + суб 2 + центр:



$C_{16}^4$   
 $C_{16}^4$   
 $C_{16}^4$

$C_8^2$

$$(x, y) \rightarrow (104-x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (281-x, 401-y)$$

$$(x, y) \rightarrow (101-x, 401-y)$$

$a < b$   
 $a \neq b$   
 $(a-c)(b-c) = p^2$   
 $a^2 + b^2 = 710$   
 $a-c = p^2$   
 $b-c = 1$   
 $a-b = p^2$   
 1)  $a = b = c - p$      $a-b = 0 = 3$   
 2)  $a-c = 1$ ;  $b-c = p^2$   
 ~~$a-b = p^2 - 1$~~   
 $a-c = 1$      $b-c = 9$

$5600 - 300 = 1$      $1 + 2808$   
 $p > 1$      $2804$   
 $85 = b - c > a - c$      $53 ?$   
 $6000 + 1000 = 5$      $a = c ?$   
 $720$      $100 + 100 = 49$   
 $26^2 = 400 + 140 + 36$   
 $876$



$$b = a + 8$$

$$a^2 + a + 8 = 710$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$(a-26)(a+27) = 0$$

37

400 + 280 = 49

129

