



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√1

Пусть b_1, b_2, \dots - эта геом прогрессия с дел. $q \neq 0$

Прогрессия состоит из действ. чисел $\Rightarrow q^2 > 0$

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}; \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$b_9 = b_7 \cdot q^2; \quad b_7 \neq 0, \quad q^2 > 0 \Rightarrow b_9 > 0 \Rightarrow x > -3.$$

$$b_{11}^2 = b_7 \cdot b_{15} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{(x-6)^3} = \sqrt{\frac{(25x-9)^2}{(x-6)^2}} = \left| \frac{25x-9}{x-6} \right| =$$

$$= \frac{25x-9}{x-6}, \quad \text{т.к. числа } (25x-9) \text{ и } (x-6) \text{ - одного знака,}$$

потому что $(25x-9)(x-6) > 0 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$, т.к. $b_{11} = b_7 \cdot q^4 > 0$

$$b_9^2 = b_7 \cdot b_{11} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = \sqrt{(25x-9)^2} = |25x-9|$$

$$(x+3)^2 = |25x-9|$$

Случай 1: $x < \frac{9}{25}; \quad 25x-9 < 0$

$$(x+3)^2 = 9-25x$$

$$x^2 + 31x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -31 \text{ (не подходит, т.к. } x > -3).$$

Случай 2: $x > \frac{9}{25}; \quad 25x-9 > 0$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \Rightarrow x_3 = 1; \quad x_4 = 18.$$

x_3 не подходит, т.к. $(25x_3-9)(x_3-6) = -5 \cdot 16$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:

• $x_1 = 0$

- подходит

$$b_7 = \sqrt{(-9) \cdot (-6)} = 3\sqrt{6}; \quad b_9 = 3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{(-9)}{(-6)^3}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}; \quad q = \pm \sqrt[4]{6}$$

• $x_4 = 18$

- подходит.

$$b_7 = \sqrt{\frac{784 \cdot 12}{12^3}} = \sqrt{441 \cdot 12} = 21\sqrt{12}; \quad b_9 = 21; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{441}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}; \quad q = \pm \sqrt[4]{12}$$

В решении не рассматривались случаи $q=0$, $(25x-9)=0$, $(x-6)=0$, т.к. тогда геом. прогрессия не имеет смысла.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\rho \cos^3 x + 3(\rho + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\rho(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3\rho \cos x + 12 \cos x - 6(2 \cos^2 x - \overset{1}{\cancel{\sin^2 x}}) - 10 = 0$$

$$4\rho \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$\rho \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 = (1 - \rho) \cos^3 x$$

$$1 - \rho = \frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x} \quad \cos^3 x \neq 0, \text{ т.к. иначе } -1 = 0$$

$$\rho = 1 - \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

Рассмотрим функцию $F(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$. На отрезке

$[-1; 0)$ она убывает, $F(-1) = -7$. Значит на этом отрезке

она принимает все значения $(-\infty; -7]$

и на отрезке $(0; 1]$ она убывает, принимая все значения

на $[1; +\infty)$, т.к. $F(1) = 1$.

Значит, если $\rho \in (-7; 1)$, то у уравнения нет корней,

а при всех остальных значениях — есть хотя бы один.

(т.к. функция непрерывна на отрезках $[-1; 0)$ и $(0; 1]$ и для

каждого значения $\rho \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ найдётся такое

$-1 \leq t \leq 1$, что $F(t) = \rho \Rightarrow$ найдётся и x , такой, что $\cos x = t$).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\cos x - 1)^3 = (1-p)\cos^3 x$$

$$(1 - \cos x)^3 = (p-1)\cos^3 x$$

$$1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos x$$

$$\cos x (1 + \sqrt[3]{p-1}) = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решение для каждого

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Покажем, что $-1 \leq \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \leq 1$

Пусть $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} < -1 \Rightarrow \frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} < 0 \Rightarrow -2 < \sqrt[3]{p-1} < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8 < p-1 < -1 \Rightarrow -7 < p < 0$, это неверно

Пусть $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} > 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt[3]{p-1}}{1 + \sqrt[3]{p-1}} > 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[3]{p-1} < 0 \Rightarrow$

$-1 \leq p-1 < 0 \Rightarrow 0 < p < 1$, это тоже неверно

Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$;

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_9 = x+3$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$b_{11} = b_7 \cdot b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3} \cdot (25x-9)(x-6)} =$$

$$= \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = \frac{\sqrt{25x-9}}{x-6}$$

$$b_{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}}$$

$$(x+3)^2 = b_9^2 = b_7 \cdot b_{11} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{x-6}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)(x-6) \cdot \frac{25x-9}{(x-6)}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2$$

$$b_7^2 = 25x-9$$

$$(x+3)^2 = |25x-9| = 25x-9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$(x-18)(x-1) = 0$$

$$18, 1$$

$$(x+3)^2 = |25x-9| = 9-25x$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x(x+31)$$

$$0, -31$$

$$25 \cdot 18 - 9$$

$$b_7 = 21\sqrt{12}$$

$$b_9 = 21$$

$$b_{15} = \frac{21}{12}\sqrt{12}$$

$$b_7 > 0 \quad b_9 = 9^2 \cdot b_7 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$25x-9 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$x < 3 \Rightarrow 25x-9 < 0 \Rightarrow \sqrt{25x-9} = -\sqrt{25x-9}$$

$$-784 \cdot -37$$

1) > 0	> 0	$\frac{1}{18}$
2) < 0	< 0	$\frac{0}{31}$

$$-784$$

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{31} = \frac{1}{558}$$

$$21^2 = 3 \cdot 49 = 21^2 \checkmark$$

$$3) \quad > 0 \quad < 0$$

$$-31, 0, 1, 18$$

$$b_7 = \sqrt{784 \cdot 37} = 28\sqrt{37}$$

$$b_9 = -28$$

$$b_{15} = \frac{28}{3} \sqrt{37}$$

$$b_7 = 3\sqrt{6}$$

$$b_9 = 3$$

$$b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{6} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_7^2 = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$$b_9^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_{15}^2 = \frac{b_9}{b_7} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$b_7 = \sqrt{x-6}$$

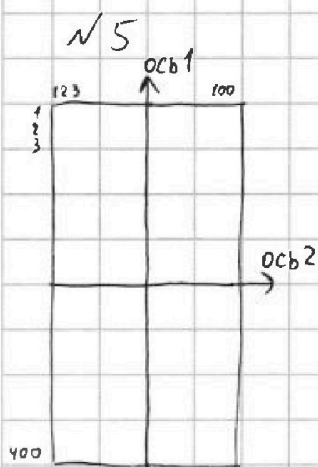


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сначала докажем, что если ~~каждое~~ закрашенное множество ~~симметрично~~ обладает двумя из 3-х симметрий - то оно обладает и третьей. Для этого введём систему координат, где в координаты левой верхней клетки - $(1, 1)$; правой нижней - $(100; 400)$. Будем называть вертикальную

~~ось~~ ~~ось 1~~ ~~ось 2~~ среднюю линию осью 1, горизонтальную - осью 2. Заметим, что если клетки симметричны относительно оси 1 - они имеют координаты $(x; y)$ и $(101-x; y)$. Если симм. относительно оси 2: $(x; y)$ и $(x; 401-y)$. Если относ. центра: $(x; y)$ и $(101-x; 401-y)$. Тогда если, например, множество симметрично относительно оси 1 и оси 2 и закрашена клетка $(x; y)$, то закрашена и клетка $(101-x; y)$, а значит и клетка $(101-x; 401-y)$ из сим. 2 \Rightarrow закрашена и центрально-симм. клетка. Аналогично доказывается, что если симметричны центральная и осевая, то и другая ~~из~~ осевая тоже: $((x; y) \Rightarrow (101-x; 401-y) \Rightarrow (101-x; 401-(401-y)) \Rightarrow (101-x; y))$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем кол-во множеств ^(из 8 клеток), которые симметричны относительно оси 1. Для этого поставим 4 клетки в "левый" прямоугольник 50×400 , а затем в "правый" прямоугольник 50×400 отметим 4 клетки, симметричные им относительно оси 1. (C_{20000}^4 способов). Очевидно, что такие множества не будут совпадать, т.к. "левые" прямоугольники разные. А также это будут все симм. относительно оси 1 множества, т.к. в каждом таком множестве ровно по 4 клетки в "левом" и "правом" прямоугольниках 50×400 . Аналогично доказывается, что симметричных относительно оси 2 и симм. относительно центра множеств также по C_{20000}^4 , с точностью до преобразования, переводящее 4 поставленные клетки в 4 добавленные. (в симм. относительно оси 2 следует брать "верхний" и "нижний" прямоугольники 100×200 , а в центральном - любую из пар прямоугольников)

Теперь найдем кол-во множеств симметричных относительно оси 3-х объектов \Rightarrow симметричных относительно всех 3-х.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для этого поставим 2 кетки из 8 в «верхний левый» прямоугольник 50×200 (C_{10000}^2 способов), а затем отметим оставшиеся 6, отразив их поочерёдно относительно каждой из осей и точки центра. Аналогично, это будут все «трёхкратно симметричные» множества по одному разу. Но в каждом из случаев одиночной симметрии мы также считали эти «трёхкратно симметричные» множества \Rightarrow 2 раза их посчитали зря

Итого, к-во способов равно $C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - 3 \cdot C_{10000}^2 + C_{10000}^2 = 3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$

Ответ: $3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $(a; b; c)$ такие, что

$$a < b; (b-a) \neq 3; (a-c)(b-c) = p^2, a^2 + b = 710$$

$p^2 : (a-c) \Rightarrow (a-c)$ может принимать одно из этих

значений: $1, p, p^2, -1, -p, -p^2$. Рассмотрим 6 случаев:

Случай 1: $(a-c) = p \Rightarrow (b-c) = p \Rightarrow a = b$ Противоречие

Случай 2: $(a-c) = -p \Rightarrow (b-c) = -p \Rightarrow a = b$ Противоречие.

Случай 3: $(a-c) = p^2 \Rightarrow (b-c) = 1 \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0$, т.к.

$p \geq 2$. Противоречие

Случай 4: $(a-c) = -1 \Rightarrow (b-c) = -p^2 \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0$. Противоречие

Случай 5: $(a-c) = 1 \Rightarrow (b-c) = p^2 \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Если $p \neq 3$, то одно из чисел $p-1$ и $p+1$ делится на 3, а

значит и $b-a : 3$, что не так $\Rightarrow p : 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow b-c = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b-a = 8 \Rightarrow b = a+8 \Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-26)(a+27) = 0$$

- $a = 26 \Rightarrow b = a+8 = 34 \Rightarrow c = a-1 = 25. \quad (26; 34; 25)$

- $a = -27 \Rightarrow b = a+8 = -19 \Rightarrow c = a-1 = -28 \quad (-27; -19; -28)$

Случай 6: $(a-c) = -p^2 \Rightarrow (b-c) = -1 \Rightarrow b-a = p^2 - 1 = 8$

(Аналогично со случаем 5) $\Rightarrow (a-26)(a+27) = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\bullet a = 26 \Rightarrow b = a + 8 = 34 \Rightarrow c = b + 1 = 35 \quad (26; 34; 35)$$

$$\bullet a = -27 \Rightarrow b = a + 8 = -19 \Rightarrow c = b + 1 = -18 \quad (-27; -19; -18)$$

Для каждой из троек все условия выполняются \Rightarrow все подходит

Ответ: $(a; b; c) = (26; 34; 25), (26; 34; 35), (-27; -19; -28),$
 $(-27; -19; -18)$

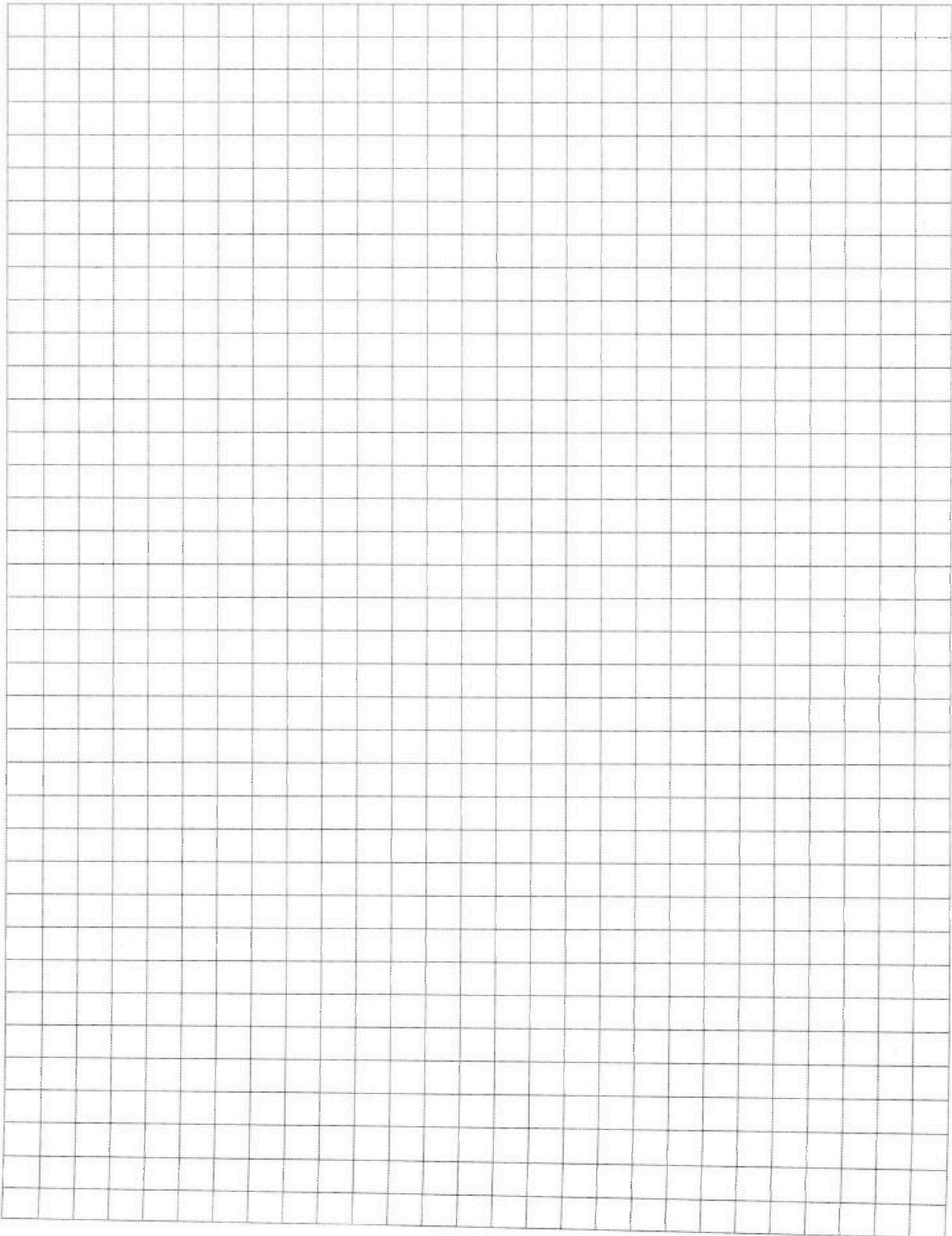


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) $a - c = -1$
 $b - c = -p^2$

$b - a = 1 - p^2 \geq 0$

$(a - c)(b - c)$

$\cos x = -p$

4) $a - c = -p^2$
 $b - c = -1$

$b - a = p^2 + 1 \Rightarrow p \leq 3$

$p \leq 1$

$\cos x > 0$

$a - c = -9$

$c - a = 9$

$a - b = 9$

$\cos x - 1 = x \cos^2 x$

$b - c = -1$

$c - b = 1$

$a - b = 9$

$1 - \cos x =$

$b - a = 8$

$(1 + p)^2 = 4p^2$

$a - c = -p^2$

$-1 \leq p - 1 \leq 0$

$\cos x - 1 = \frac{1}{2} \cos^2 x$

$b - c = -1$

$26, 34, 35$

$-1 \leq p - 1 \leq 0$

$b - a = 8$

$-23, -19, -18$

$-1 \leq p - 1 \leq 0$

$-1 \leq p \leq 0 \Rightarrow \text{Open?}$

$b - c = -1$

$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10 \quad \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} t^2$

$1 - p = \frac{\cos x - 1}{\cos x^3}$

≤ 16
 $\leq 4(p+3)$

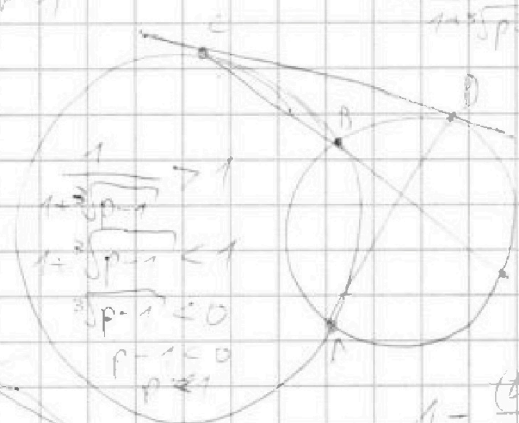
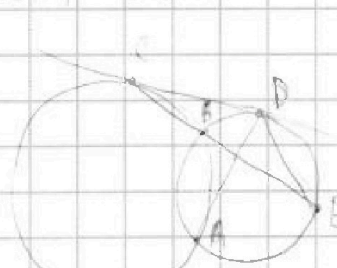
$\cos x \leq 16$

$\frac{1}{2} t^2 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

$(1 - \cos x)^2 = \cos^3 x$

$\geq -4(p+3)$

$1 - 1 - 3\sqrt{p-1} > 0$



$1 + 3\sqrt{p-1} \geq 0$
 $3\sqrt{p-1} \geq -1$
 $1 + 3\sqrt{p-1} \geq 0$

$(1 - \cos x)^3 = (p-1) \cos^3 x$

$1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos x$

$1 = \cos x (1 + \sqrt[3]{p-1})$

$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

$1 - \frac{(t-1)^2}{2t}$

$1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2$

$\frac{t^2}{30} \leq \frac{5^3 \cdot 0^3}{5^3}$

$1 - 1 = -5 \quad \frac{5^3}{5^3} = 1$

$1 - 1 = -20 \quad \frac{5^3}{5^3} = 1$

$1 - 1 = -25 \quad \frac{5^3}{5^3} = 1$

$1 - 1 = -30 \quad \frac{5^3}{5^3} = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and equations:

- Top left:** A circle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles. Above it are some numerical expressions: $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$.
- Top right:** A 3D diagram of a pyramid with a square base. Labels include $a = \frac{p}{\sqrt{3}}$ and $p(\cos 3x + 3\cos x)$.
- Middle left:** Equations: $\cos 3x = 2\cos^2 x - 1$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot 3 \pm$, $9 - 8 \cdot 2$.
- Middle right:** A 3D diagram of a pyramid with a triangular base. Equations: $ab \sin \alpha = 3$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
- Bottom left:** A circle with a point and the expression $(\cos x - 1)^3$.
- Bottom middle:** A large algebraic derivation:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = 3\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6\cos^3 x - 6\sin^2 x + 10$$

$$p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos^3 x + 3p \cos x + 12 \cos x + 6\sin^2 x - 6\cos^2 x - 10$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 12 \cos x - 10 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$p-1 = -\frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x}$$

$$p-1 = \frac{(\cos x - 1)^3}{\cos^3 x}$$
- Bottom right:** Equations: $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 - t^3 + 2t^2 - t = -t^2 + 2t - 1 = -(t-1)^2$, $t = 1$, $\frac{1}{\cos x}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

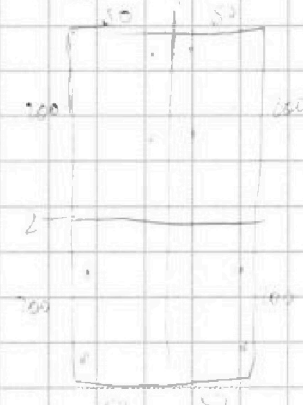
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

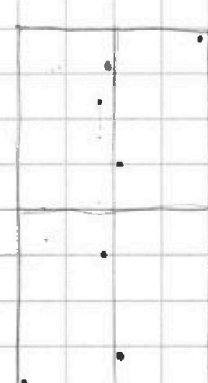
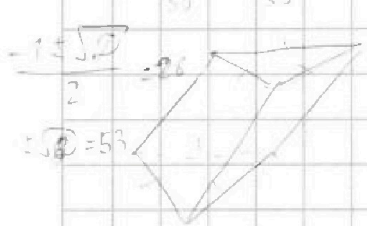
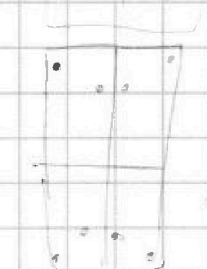
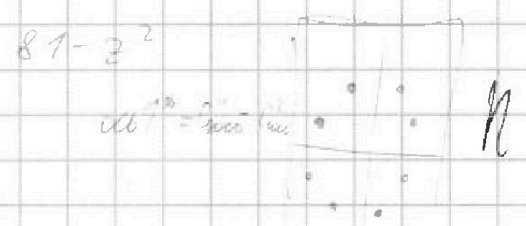
$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$3C_{10000}^4 - 2C_{10000}^2$$

$$(y+4)^2 + 16(y-5)^2 + 8|(y+4)(y-5)| = 81-z^2$$



сл 1: C_{10000}^{84}
сл 2: C_{10000}^7
итого: C_{10000}^4
 C_{10000}^2
сл 1 + сл 2
сл 1 + сл 2 + сл 3
сл 1 + сл 2 + сл 3 + сл 4



C_{16}^4
 C_{16}^4
 C_{16}^4

C_8^2

$$(x, y) \rightarrow (104-x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (281-x, 401-y)$$

$$(x, y) \rightarrow (101-x, 401-y)$$

$a < b$
 $a \neq b$
 $(a-c)(b-c) = p^2$
 $a^2 + b^2 = 710$
 $a-c = p^2$
 $b-c = 1$
 $a-b = p^2$
1) $a = b = c - p$ $a-b = 0 = 3$
2) $a-c = 1$; $b-c = p^2$
 $b-a = p^2 - 1$
 $a-c = 1$ $b-c = 9$

$5600 - 320 = 1$
 $p > 1$
 2804
 53
 $100 + 100 = 49$
 $26^2 = 400 + 140 + 36 = 576$



$b = a + 8$
 $a^2 + a + 8 = 710$
 $a^2 + a - 702 = 0$
 $(a-26)(a+27) = 0$

$400 + 280 = 49$
 1729