



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad b_{10} = x+4 \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{q^8}{b} = \sqrt{(x-3)^4} \quad \text{где } q - \text{ частное геон. прогресс.}$$

$$q^4 = \sqrt{(x-3)^2} \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{q^2}{b} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}$$

I. $x-3 \geq 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \quad x+4 \geq 0 \checkmark$

$$\frac{\sqrt{15x+6}}{x+4} = 1 \quad \sqrt{15x+6} = x+4 \quad | \wedge 2$$

$$15x+6 = x^2+8x+16$$

$$x^2-7x+10 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} \quad x = 2 \quad x = 5$$

$\emptyset \quad \checkmark$

II. $x-3 < 0 \Rightarrow 15x+6 \leq 0 \quad x \geq -4$

$$\sqrt{-15x-6} = x+4 \quad | \wedge 2$$

$$-15x-6 = x^2+8x+16$$

$$x^2+23x+22 = 0$$

$$D = 529 - 88 = 441$$

$$x = \frac{-23 \pm 21}{2} \quad x = -22 \quad x = -1 \checkmark$$

\emptyset

Ответ: -1; 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5.

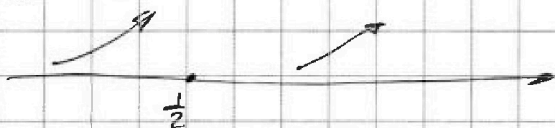
$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Уследим функцию $4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$

$$f'(\cos x) = 12 \cos^2 x - 12 \cos x + 3 = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$



Значит, данная функция монотонно возрастает.

$$f_{\min} = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f_{\max} = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

Ответ: $p \in [-10; 4]$



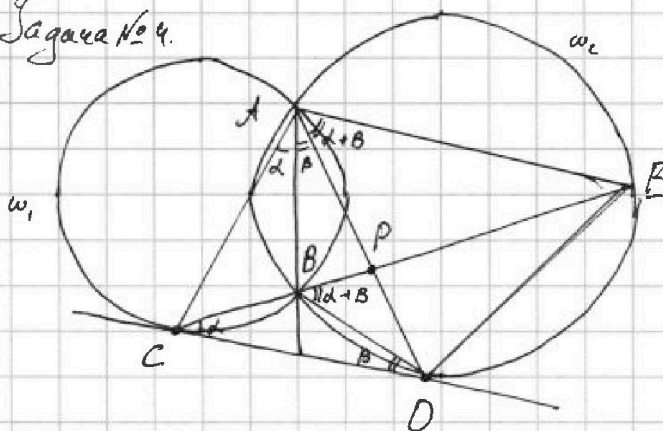
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.



Обозначим за $P = CE \cap AD$.

$$\frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$$

Пусть $9x = CP$; тогда $PE = 25x$.

Обозначим: $\alpha = \angle CAB$;

$\beta = \angle BAP$. Тогда $\angle BCD = \alpha$, $\alpha = \angle BPC = \beta$, как углы между хордой и касательной.

$\angle EPD = \alpha + \beta$, как внешний для $\triangle CBD$.

Тогда $\angle DAE$ также равен $\alpha + \beta$, как вписанный.

$\angle CAP = \angle PAE = \alpha + \beta \Rightarrow AP$ - биссектриса $\triangle CAE \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC : AE = CP : PE = 9 : 25$

Пусть $AC = 9y \Rightarrow AE = 25y$.

$\angle AEP = \angle ADC$ (углы, между касательной и хордой);
 $\angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$ (по двум углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = 25y \cdot 9y = 15^2 \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = 15^2 \cdot y^2 \Rightarrow AD = 15y.$$

Также из подобия:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{9y}{15y} = \frac{3}{5} \Rightarrow ED : CD = 5 : 3$$

Ответ: $ED : CD = 5 : 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5.

Обозначим симметрию отн. вертикальной оси y -симметрией, а относительно горизонтальной оси - x -симметрией.

Рассмотрим, что происходит, если выполнены какие-либо 2 из 3 симметрий:

Композиция двух осевых симметрий - это центральная симметрия.



Композиция x -симметрии и центральной симметрии - это y -симметрия.



А также композиция y -симметрии и центральной симметрии - это x -симметрия.

Следовательно, если выполнены какие-либо 2 симметрии из 3-х, то выполнена и оставшаяся.

Посчитаем, сколько расстановок удовлетворяет каждой симметрии в отдельности:

Для центральной и y -симметрии достаточно расставить в произвольных местах в левой половине поля 4 клетки, тогда расстановка задаётся однозначно. Это можно сделать C_{15000}^4 способами.

Аналогично, для x -симметрии достаточно расставить в верхней половине поля 4 клетки. Это можно сделать C_{15000}^4 способами.

Итого $3 \cdot C_{15000}^4$ способа.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Воспользуемся методом включений и исключений:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, где A_1, A_2 и A_3 - это множества перестановок, в которых выполнены центральная, x-симметрия и y-симметрия соответственно.

Но мы знаем, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. \Rightarrow

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - 2|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Посчитаем кол-во перестановок, удовлетворяющих сразу всем условиям:

В такой расстановке 31-вы расположены по четвертям, образующим прямоугольник с центром, совпадающим с центром исходного квадрата, а значит достаточно и необходимо выбрать 2 квадрата в одном из углов. Это можно сделать C_{7500}^2 способами.

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6.

Пусть $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - простое.

Так как $a-c$, $b-c$ и p^2 - целые, то данное уравнение превращается в совокупность:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = p \\ b-c = p \\ a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

Исходя из того, что $a > b$, может быть выполнена только система $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1$.

$a-b \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 - 1 \not\equiv 3$, а так, как квадрат целого числа может быть равен только с 0 или 1, то получаем, что $p^2 \equiv 3 \Rightarrow p \equiv 3$

Но, так как p - простое число: $p = 3$.

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 812$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$b = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$D = 3249 = 57^2$$

$$b = 28$$

$$a = 36$$

$$c = 27$$

$$b = -29$$

$$a = -21$$

$$c = -30$$

Ответ: $(36, 28, 27)$, $(-21, -29, -30)$



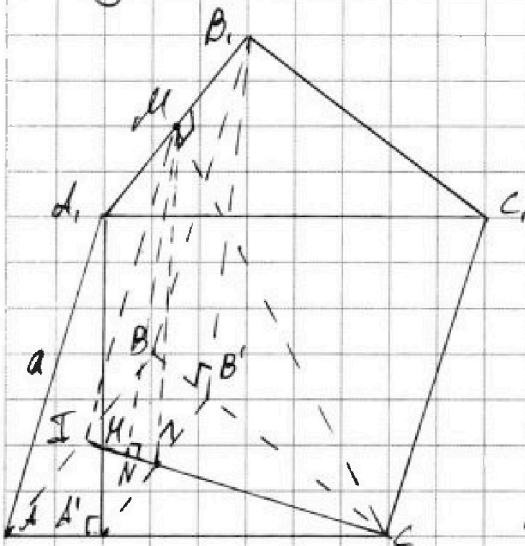
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7.



Обозначим вершины тризмы
 A, B, C, A_1, B_1, C_1 .

(пусть $S_{AA_1CC_1} = S_{BB_1CC_1} = 5$; $S_{AA_1BB_1} = 4$)

$$|AA_1| = a$$

Основания высот к вершинам A_1 и B_1 в четырёхугольнике AA_1CC_1 и BB_1CC_1 = A' и B'

$$S_{AA_1CC_1} = AC \cdot AA_1; S_{BB_1CC_1} = BC \cdot BB_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1 = BB_1$$

$$AA_1 = \sqrt{a^2 - A'A'^2}; BB_1 = \sqrt{a^2 - B'B'^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AA_1 = BB_1 \Rightarrow A'B' \parallel AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1A'$ и B' лежат в одной плоскости.

$A_1B_1A'B'$ - равнобокая трапеция.

Продлим A_1A' и B_1B' до пересечения. $A_1A' \cap B_1B' = T$.

т.к. $A_1B_1A'B'$ - равнобокая трапеция, то A_1B_1T - равнобедр. треугольник. Проведём медиану TM . $TM \perp A_1B_1 = N$.

т.к. $\triangle A_1B_1T$ - равноб. $MN \perp A_1B_1 \Rightarrow MN \perp A'B'$, а также $A_1N = NB_1$.

Проведём CN . $CN \perp A'B'$ т.к. ABC - правильный.

$\Rightarrow A'B' \perp NMC \Rightarrow$ Высота MN в $\triangle MNC$ - исконая, т.к. $MN \perp CN$ и $MN \perp A'B'$.

Обозначим I - середина AB .

MI - проектор; MI - проекция $\perp AB \Rightarrow MI \perp AB$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$MI \parallel AA_1 \Rightarrow AA_1 \perp AB \Rightarrow AA_1B_1B$ - прямоугольник.

$$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB = 4 \Rightarrow AA_1 = 2.$$

Однако в $\triangle AA_1B_1$ гипотенуза = 2, а катеты 2, 5. Противоречие.

Ответ: такой призмы не существует.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos^3 x +$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x = 9$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = 9$$

$$D = 36 -$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - 9 = 0$$

$$4 \cos x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos x$$

$$7 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x - 6 \cos^3 x$$

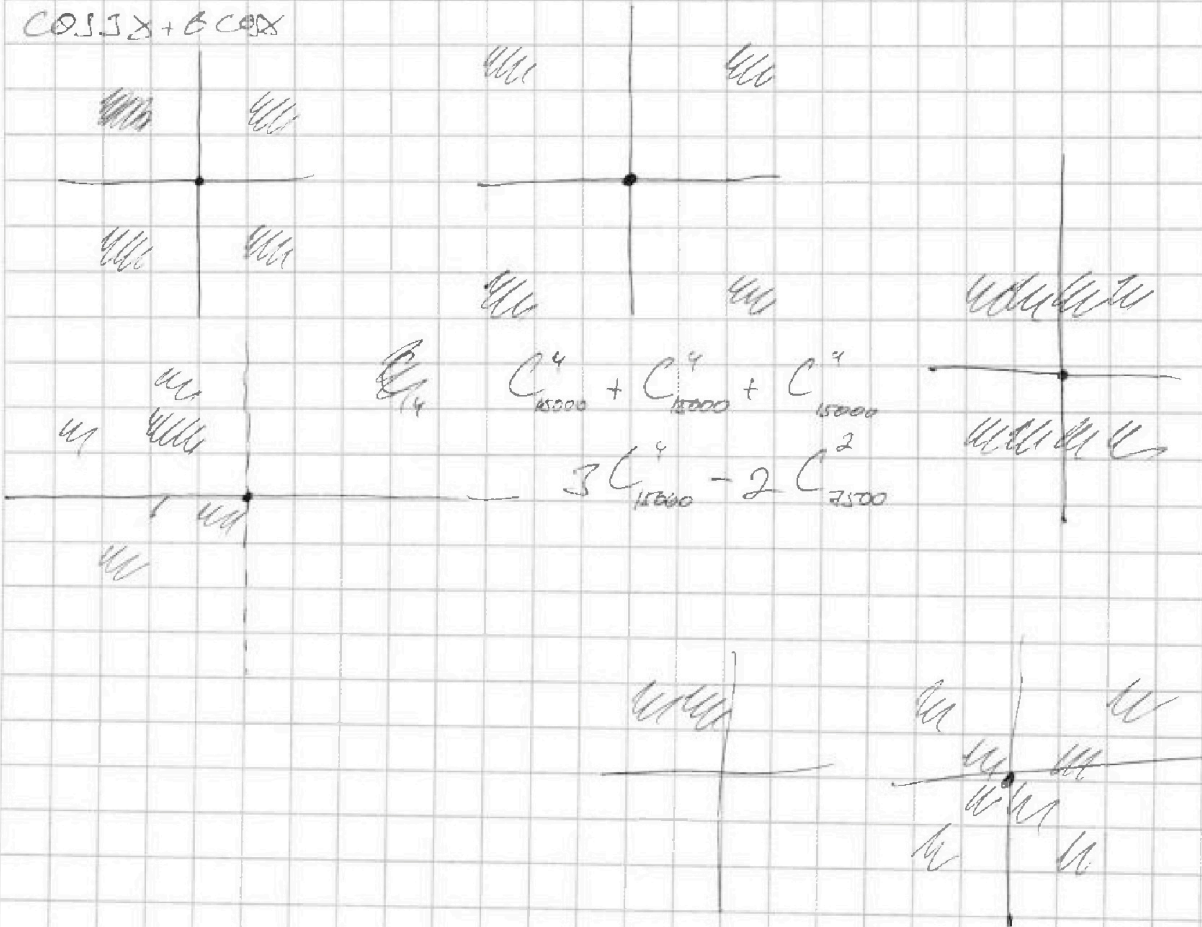
$$6(1 - \sin^2 x)$$

$$6 - 6 \sin^2 x$$

$$-2 \cos^3 x = 4 + 4 \sin^2 x$$

$$4 \sin^2 x (1 - \cos x) = 7 \cos x$$

$$\cos 3x + 6 \cos x$$



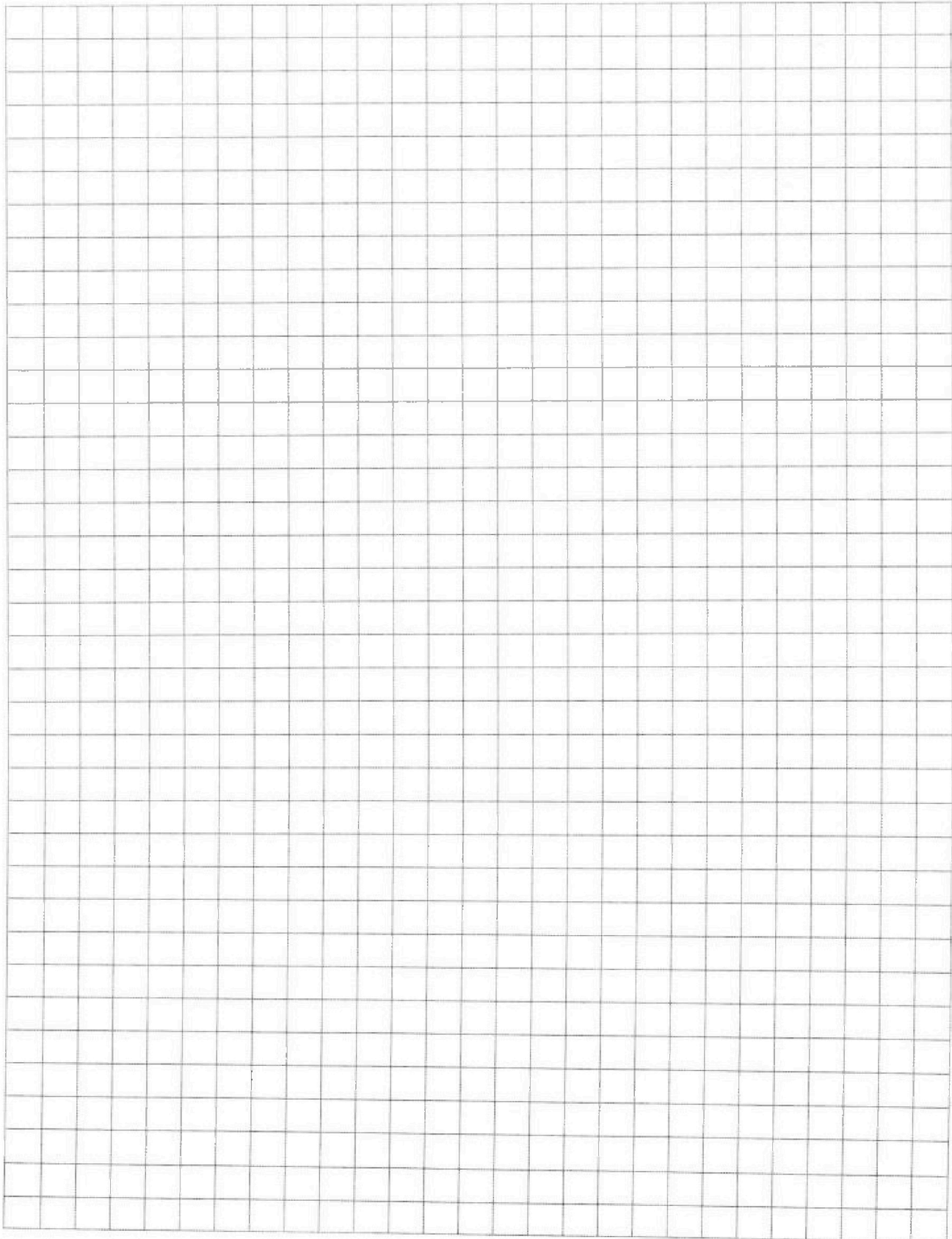


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



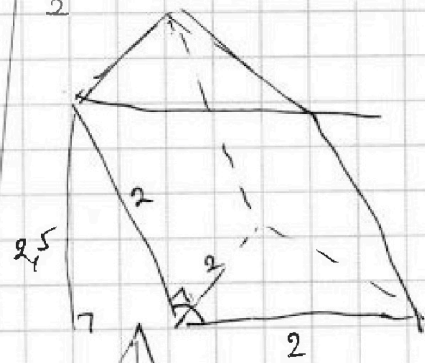
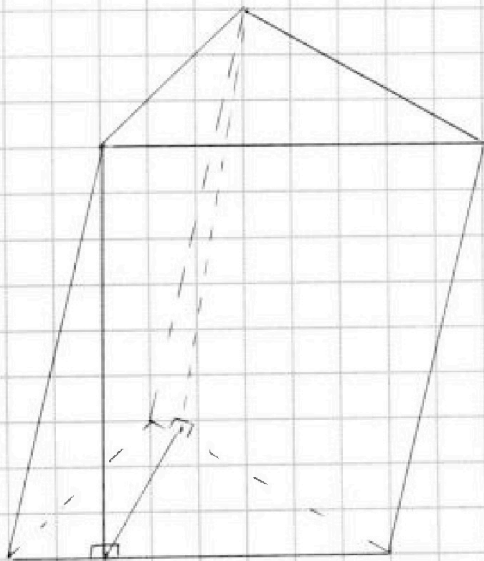
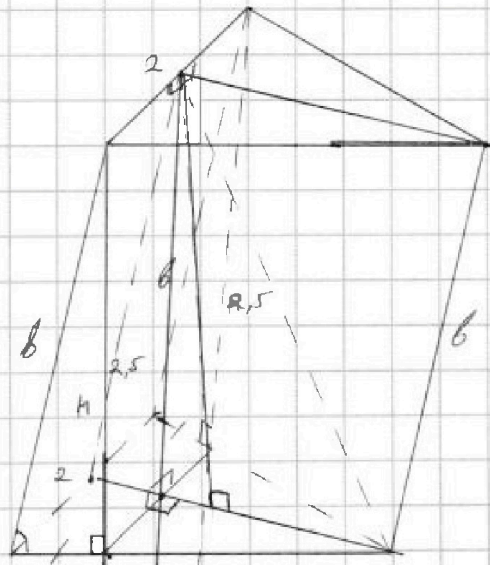
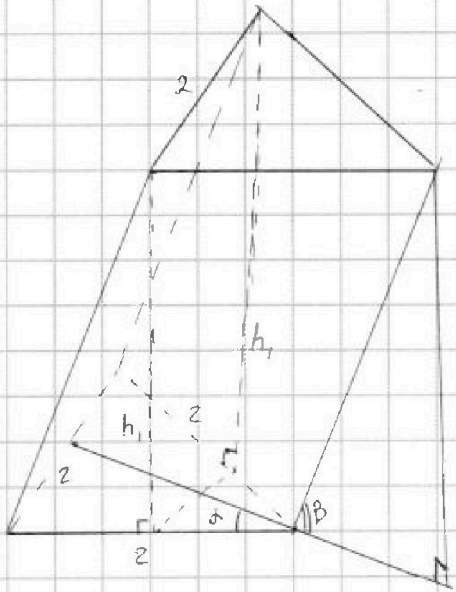


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a-c)(b-c) = q^2 \Rightarrow a-c = q^2; b-c = 1 \quad c = b-1$$

$$a + b^2 = 820 \quad a - b = q^2 - 1 \quad q^2 : 3 \quad q : 3$$

$$ab - cb - ac + c^2$$

$$ab - b(b-1) - a(b-1) + (b-1)^2 = q^2$$

$$a + b^2$$

$$q^2 = 9$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b^2 = 820 \\ b^2 + b = 821 \\ b(b+1) = 821 \end{cases}$$

$$b^2 + b + 1 \leq b^2 + b - 821 \leq b^2 + 2b + 1$$

$$b^2 - 58b + 821$$

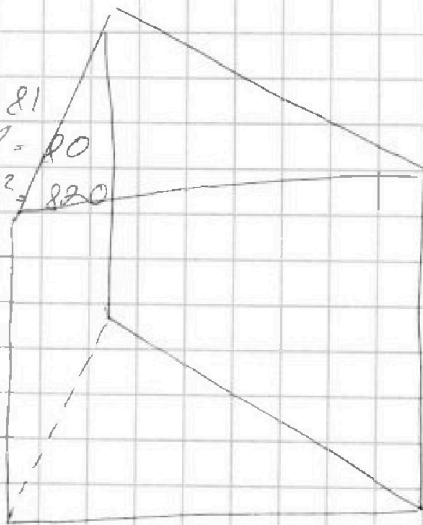
$$(b-29)^2 \leq 0 \leq (b-1)^2$$

821 + 2	2
414	1
207	3
69	3
23	23

$$q^2 = 81$$

$$a - b = 10$$

$$a + b^2 = 820$$



x 28	29
x 28	x 29
224	261
56	58
784	844

$$b \quad D = 1 + 8248 = 3249$$

x 57	57
x 57	x 57
283	321
1415	1809
807	10203
31059	122421

841	841
784	784
36	36
820	820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$b_{10^2} = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^2}} \quad b_{10^5} = x+4 \quad b_{10^6} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\frac{b_{10^2}}{b_{10^5}} = (x-3)^2 = \frac{b_{10^6}}{b_{10^5}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{\frac{15x+6}{x+4}}$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{x+4}} = 1$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3x+6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2}$$

$$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2} + \sqrt{5-x} = 3x+6$$

$$x+7+36 = 12\sqrt{4-2x-x^2+2}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$4y^2 - 40y + 400 + 4y^2 - 280y + 2450 = 225 - z^2$$

$$8y^2 - 320y + 2675 = 225 - z^2$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$\cos 2x = (2 \cos^2 x - 1)$$

$$\cos 3x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$

$$6 \cos x (1 - \cos x)$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin x = 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^2 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$3(\cos x - \cos 2x)$$

$$4 \cos^2 x + 3 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p$$

$$4 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$4t^2 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$4 - 6 + 3 + 3 = 4 = p$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 = -10 = p$$

$$p \in [-10; 4]$$

$$f(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$D = 144 - 144 = 0 \quad \left(12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$t = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

