



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть  $q$  - множитель геометрической прогрессии. Тогда:

$$\begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^2 = (x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)^3(x-6)^3} \cdot q^6 = (x+3)^3 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-6 \neq 0 \\ (25x-9)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ (x-\frac{9}{25})(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty) \end{cases}$$

Для  $x = \frac{9}{25}$ :

$$\neq \left(\frac{9}{25} + 3\right) q^6 = 0 \quad \text{П.к } q \neq 0, \text{ то нет корней} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot q^2 = \frac{9}{25} + 3 \\ \neq x \neq \frac{9}{25} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\text{П.к } q^6 > 0 \text{ и } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \geq 0, \text{ то } x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$$

$$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \Rightarrow$$

Из системы следует:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{(25x-9)^4}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+9-25x+9=0 \\ x^2+6x+9-9+25x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x^2 + 31x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-18) = 0 \\ x(x+31) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 18 \\ x = 0 \\ x = -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = 0 \end{cases} \quad 1) \text{ При } x=18: \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{450-9}{(18-6)^3}} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 9}{12 \cdot 12 \cdot 12}} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$$

2) При  $x=0$ :

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$x+3=3 \Rightarrow q = \sqrt[2]{\frac{3}{3\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$3 \cdot \frac{1}{(\sqrt{6})^6} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Rightarrow x=0 \text{ подходит.}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6} \cdot 12}\right)^6 \cdot 21 = \frac{21}{6\sqrt{8}} = \frac{21}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$$

$\downarrow$   
 $x=18 \text{ подходит}$

Ответ:  $x=0, x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x-4z \geq 0 \\ y-4x-x^2+z \geq 0 \\ 81-z^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ -x \leq 5 \\ 4z \leq 1-x \leq 6 \\ y \geq 4x+x^2+z \\ z \in [-9; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ z \leq \frac{3}{2} \\ \text{Т.к. } x \geq -5 \rightarrow -z \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq -20 \text{ Т.к. } x^2 \geq 0 \\ y \geq -20 - \frac{3}{2} \\ z \in [-9; 9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq -2,5 \\ z \in [-9; \frac{3}{2}] \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) отдельно:

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$\begin{cases} y < -4 \\ -y-4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ y+4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ y+4+4y-20 = \sqrt{81-z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y+16 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ 24-3y = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ 5y-16 = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к.  $z^2 \geq 0$ , то  $81 - z^2 \leq 81 \Rightarrow \sqrt{81 - z^2} \leq 9 \Rightarrow$  <sup>это и</sup> ~~исследовать~~ ~~следует~~

$$\begin{cases} y < -4 \\ -5y + 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ y \geq \frac{7}{5} = 1,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ 24 - 3y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ -3y \leq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ y \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = 5$$

$$\begin{cases} y \geq 5 \\ 5y - 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ 5y \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|y+4| + 4|y-5| = |9| + 4|0| = \sqrt{81 - z^2}$$

$$9 = \sqrt{81 - z^2}$$

$$81 = 81 - z^2$$

$$z^2 = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow$$

Подставим  $y$  и  $z$  в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 0 + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x^2+4x-5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x-1)(x+5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$

$$4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5} = 0$$

Заметим, что  $\sqrt{x+5}$  - возрастающая функция,  $\sqrt{1-x}$  убывающая  $\Rightarrow$   $4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5}$  - возрастающая функция  $\Rightarrow$  у уравнения одно решение. Подходит  $x =$  ~~ни более 1 решение~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$4 + \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$~~

~~$$16 + x + 5 + 8\sqrt{x+5} = 1 - x + 4(1-x)(x+5) + 2(1-x)\sqrt{x+5}$$~~

~~$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 4(5 - x^2 - 4x) + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$~~

~~$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 20 - 4x^2 - 16x + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$~~

~~$$4x^2 + 18x + 6\sqrt{x+5} + 2x\sqrt{x+5} = 0$$~~

~~$$2x^2 + 9x + 3\sqrt{x+5} + x\sqrt{x+5} = 0$$~~

~~$$x^2 + 6x + x(x+3) + \sqrt{x+5}(x+3) = 0$$~~

~~$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 = x+5 + 1-x - 2\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{1-x} = 6 - 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$~~

$$4 = (\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 - 2 + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1) = 2$$

Пусть  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = a$ :

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{1-x}$$

$$x+5 = 1 + 1-x + 2\sqrt{1-x}$$

$$2\sqrt{1-x} = 2x+3$$

$$4-4x = 4x^2 + 12x + 9$$

$$4x^2 + 16x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm 4\sqrt{11}}{8} \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

Ответ:  $(-2 + \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0)$ ,  $(-2 - \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0)$ .

Пусть  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = -2$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 2$$

Т.к.  $x \in [-5; 1]$ , то:

$$1-x \in [0; 6]$$

$$a(a+1) = 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

$$a = 1, a = -2$$

$$D = 16^2 - 16 \cdot 5 = 16 \cdot 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x) + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 10$$

$$p(\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$\cancel{(p-3)4 \cos^3 x + 4 \cos x - 4 = 0}$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Замена:  $t = \cos x \in [-1; 1]$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

При  $p=0$ :

$$-3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$3t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

При  $p \neq 0$ :

$$pt^3 - 3t(t-1) - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)(t^2+t+1) - 3t(t-1) = 0$$

$$+ (t-1)(t^2-2t+1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt[3]{p-1}t)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[3]{p-1}t + t-1)(\sqrt[3]{(p-1)^2t^2} - (t-1)\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2) = 0$$

$$\text{П.к. } \sqrt[3]{(p-1)^2}t + (t-1)\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2 \neq 0$$

1)  $\Delta = \text{П.к. } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^2 - ab + b^2 > 0,$   
 т.к.  $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$  при  $b > 0$ , тогда  $t-1 \neq 0$  и  $\sqrt[3]{p-1} \neq 0$ :

$$\sqrt[3]{(p-1)^2} \cdot t^2 - (t-1)\sqrt[3]{p-1} \cdot t + (t-1)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{p-1}t + t - 1 = 0$$

$$t(\sqrt[3]{p-1} + 1) = 1.$$

При  $\sqrt[3]{p-1} + 1 = 0$  нет корней  
 $p = 0$

При  $p \neq 0$ :

$$-1 \leq t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq +1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ p > 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-1 \leq -8 \\ p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \text{ или } t - 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot t\right)^3 + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} = 1$$

$$p - 1 = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow \text{или } p = 1$$

$$3) \text{ или } \sqrt[3]{p-1} = 0$$

$$p = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} t\right)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(t-1)^3 = 0$$

$$t = 1$$

$\Rightarrow$

При  ~~$p = 0$~~   ~~$p = 0$~~  корней нет  $p \in (-\frac{7}{8}; 1)$  ~~корней нет~~

При  $p = 1$ :  $t = 1$  - единственный корень

При  $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}] \cup (\frac{7}{8}; +\infty)$  - единственный

корень:  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$

При  $t = 1$ :  $\cos x = 1 \Rightarrow$

При  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$ :  $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: или  $p \in (-\frac{7}{8}; 1)$  корней нет

или  $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}]$  единственный корень:

есть 2 корня:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При  $p \in (-4; 1)$  корней нет

При  $p = 1$ :  $t = 1$

При  $p \in (-\infty; 4] \cup (1; +\infty)$ :  $t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

т.к.  $x = \pm \arccos t, \pm 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то:

Ответ:

при  $p \in (-4; 1)$  корней нет

при  $p = 1$ :  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  - единственные

при  $p \in (-\infty; 4] \cup (1; +\infty)$  есть 2 корня:

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





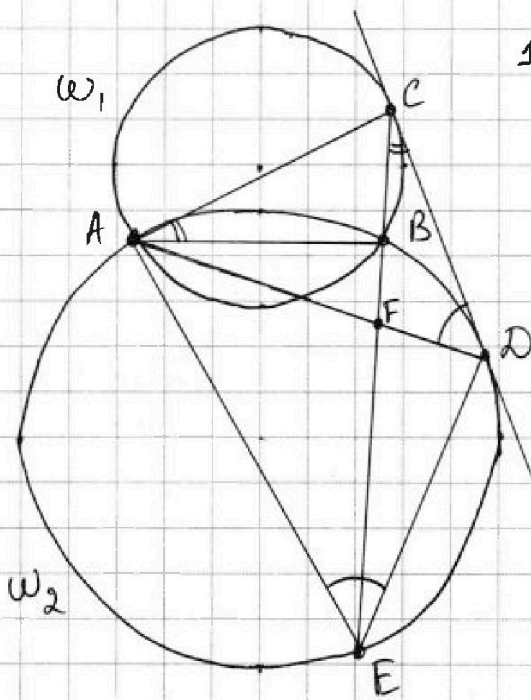
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



1. По условию:  $CF:FE=2:5$

2.  $\angle CDA = \angle DEA$  как угол между хордой и касательной

↓  
~~Точки C, D, E, A лежат на~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

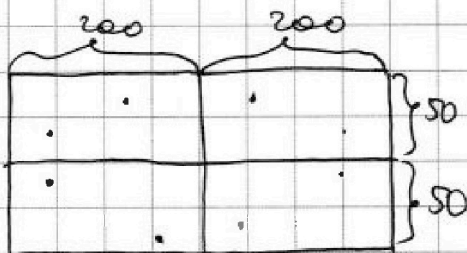
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

55

Средними линиями прямоугольника  $100 \times 400$  делится на 4 прямоугольника  $50 \times 200$ :



Кол-во раскрасок таких, что множество симметрично относительно:

1) горизонтальной средней линии (ГЛ)

$$x = C_{50 \cdot 400}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{выберем 4 клетки в}$$

верхнем прямоугольнике  $50 \times 400$ , потом отразим относительно средней горизонтальной)

2) вертикальной средней линии (ВЛ)

$$y = C_{100 \cdot 100}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{аналогично})$$

3) Центра:

~~$$C_{400 \cdot 100}^4$$~~

Выберем 4 пары клеток:  
 ~~$40000 \cdot 39999$~~

$$z = \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{4! \cdot 2^4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Цикла и горизонтальной ор. линии:

Заметим, что если картинка симметрична относительно гр и центра, то она симметрична относительно вл. Если картинка симметрична относительно вл и центра, то она симметрична относительно гр.

Таких картинок:

$$c = C_{100 \cdot 50}^2 \quad (\text{т.к. в каждом прямоугольнике } 200 \times 50 \text{ по 2 клетки})$$

=> По формуле включения-исключения, искомое кол-во способов:

$$A = x + y + z - c - c - c + c = x + y + z - 2c$$

$$A = 2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$$



$$\text{Ответ: } 2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П6

Рассмотрим условие:

• число  $(a-c)/(b-c)$  - квадрат некоторого простого числа  $\Rightarrow$  Пусть  $p$  - это простое число. Тогда:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

П.к.  $a < b$ , то  $a-c \neq b-c \Rightarrow$

$$\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \\ a-c=b-c=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$$

Если  $p \neq 3$ , то  $p \equiv 1 \pmod{3}$  или  $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$   
 $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$  При  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

$$a-c - (b-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} a-b \equiv 0 \pmod{3} \\ b-a \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ Противоречие}$$

При  $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$  :  $b-c - (a-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$   
 $b-a \equiv 0 \pmod{3}$

Противоречие  $\Rightarrow$

$p=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=9 \\ b-c=1 \\ a-c=9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \\ b=c+1 \\ a=c+9 \end{cases}$$

При  $b=c+1$  и  $a=c+9$ :  $b < a \Rightarrow$

Противоречие  $\Rightarrow$   
 $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \end{cases}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{Т.к. } a^2 + b = 710, \text{ то:}$$

$$D = 9 + 2800 = 2809 = 53^2$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 3c - 700 = 0 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c = \frac{-3 + 53}{2} \\ c = \frac{-3 - 53}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 25 \\ a = 26 \\ b = 34 \\ c = -28 \\ a = -27 \\ b = -19 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ:  $(26; 34; 25), (-27; -19; -28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

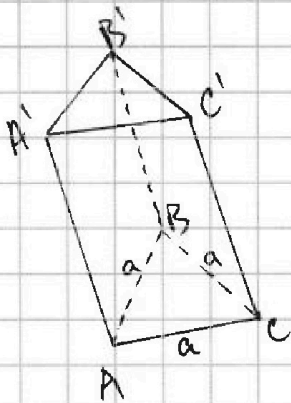
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

57.

Пусть  $h$  - высота призмы. Тогда её объём:

$V = S \cdot h$ , где  $S = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$  - площадь основания призмы.



$a$  - сторона основания призмы (сторона равностороннего треугольника)

Тогда:

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = S = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



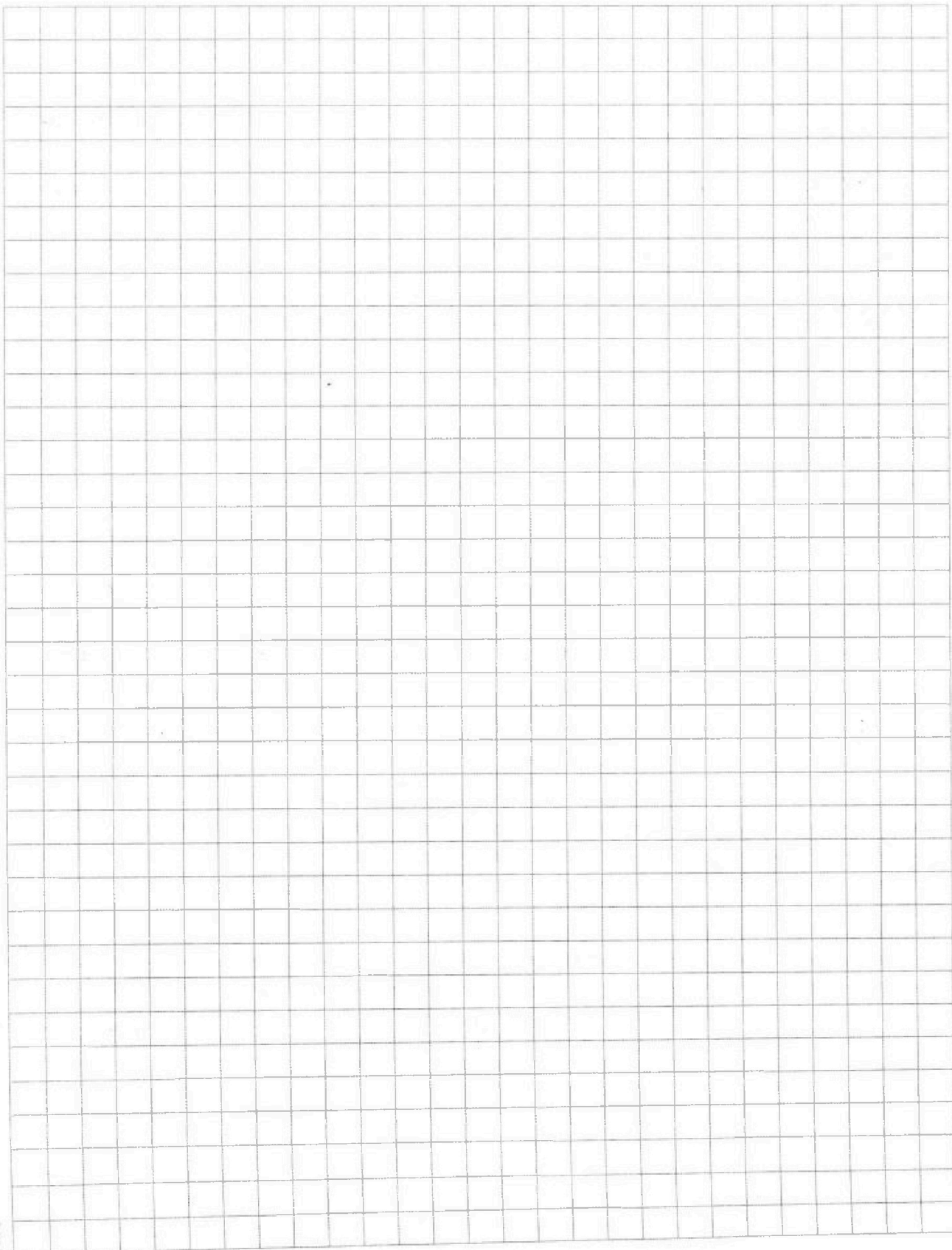


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

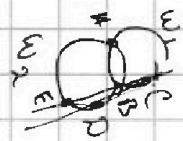


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1



№3:

$$(x+3) \cdot 9^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^8$$

$$(25x-9)(x-6) \geq 0$$

$$(x-\frac{9}{25})(x-6) \geq 0$$

$$x \in [\frac{9}{25}; 6]$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

Сумма параметров

$$(x+3) \cdot 9^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$(x+3) = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot 9^6 = (x+3)^3$$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}^3} = \frac{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}}{(x+3)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3} \cdot (25x-9)^3 \cdot (x-6)^2}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \cdot (x-6)$$

$$(x+3)^2 = \pm (25x-9)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$12^3 = 4^3 \cdot 3^3$$

$$450 \cdot 12 = 25 \cdot 18 = 450$$

$$450 - 9 = 441$$

Handwritten notes and calculations at the bottom of the page, including various algebraic manipulations and numerical results.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. 
$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

003

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$y-4x-x^2+z = -x(x+4)+z+4$$

$$\begin{aligned} s_1 &= x \\ \eta &= x-1 \\ s+x &\leq \frac{z}{2}-x \\ 1-x & \\ 4-x & \end{aligned}$$

$$x+5 + 1-x-4z + 16 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x-4z} + 8\sqrt{x+5} - 8\sqrt{1-x-4z} =$$

$$22 - 8z - 4y + 16x + 4x^2 - \dots \geq 0$$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ x &\geq -5 \\ -x &\leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-x-4z &\geq 0 \\ 4z &\leq 1-x \leq 6 \\ z &\leq \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y-4x-x^2+z &\geq 0 \\ y &\geq 4x+x^2-z \geq -20+25-z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 81-z^2 &\geq 0 \\ z^2-81 &\leq 0 \\ -9 \leq z \leq 9 \\ 9 \geq -z \geq -9 \end{aligned}$$

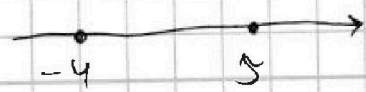
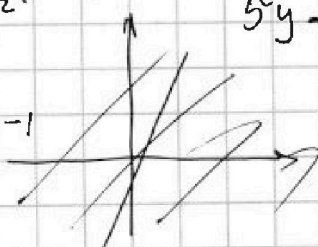
$$\begin{aligned} y &\geq 5-z \geq 4-4 \\ -y &\leq 4 \end{aligned}$$

$$y+4-4y+20$$

$$16-3y = \sqrt{81-z^2}$$

$$\begin{aligned} 3 &= 5+x \\ x &= 3-5 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &= x \\ x-1 & \end{aligned}$$



$$x \leq 5$$