



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Пусть q - знаменатель этой прогрессии. Тогда:

$$a_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad a_1 \cdot q^9 = x+4, \quad a_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}, \text{ где}$$

a_1 - первый член прогрессии

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{a_1 \cdot q^{11}}{a_1 \cdot q^3} = q^8 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^4} = q^8; q^8 = (x-3)^2$$

$$q = \sqrt[4]{|x-3|}$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \frac{a_1 \cdot q^{11}}{a_1 \cdot q^9} = q^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}, \quad \boxed{x > -4}$$

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = (x+4)\sqrt{|x-3|}; \quad (15x+6)(x-3) = (x+4)^2 \cdot |x-3|$$

I случай: $x \geq 3$

$$(15x+6)(x-3) = (x^2+8x+16)(x-3); \quad (x-3)(x^2-7x+10) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 - \text{не подходит, т.к. четвертый член прогрессии не определен при } x=3 \\ x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_{1,2} = \{2; 5\} \end{array} \right.$$

с учетом раскрытия модуля $x=5$, $q = \sqrt[4]{2}$

II случай: $x < 3$

$$(15x+6)(x-3) = (x^2+8x+16)(3-x); \quad (x-3)(x^2+23x+22) = 0$$

$$x^2+23x+22=0 \quad x_{1,2} = \{-1; -22\} \quad q_{1,2} = \{\sqrt{2}; \sqrt{5}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = -22$ не подходит под условие $x > -4$

Ответ: $-1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

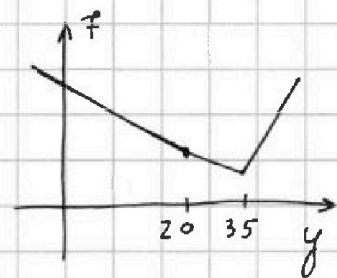
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |1y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

Её приблизительный график выглядит так:

У ломаной 2 точки изменения наклона, но, т.к.

коэффициент при y в $|y-35|$ модуль больше, возрастание и убывание функции определяет точка $y=35$



$f(35)$ - наименьшее значение функции

$$f(35) = 35 - 20 = 15 \Rightarrow f_{\min} = 15$$

Теперь рассмотрим $g(z) = \sqrt{225-z^2}$; $g'(z) = \frac{-z}{\sqrt{225-z^2}}$

$g(z) = \sqrt{\quad}$ Так как z^2 неотрицателен, наибольшее значение $g(z)$ принимает при $z^2 = 0$

$$g_{\max} = g(0) = \sqrt{225} = 15 = f_{\min}(y) \Rightarrow f(y) = g(z) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

Подставим найденные значения в первое уравнение системы

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2\sqrt{(x+7)(5-x)} = -(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 + x+7 + 5-x = -(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 +$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$, тогда:

$$t+6 = -t^2 + 12; t^2 + t - 12 = 0 \quad t_1 = -4 \quad t_2 = 3$$

I:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -4; \sqrt{x+7} + 4 = \sqrt{5-x}; x+7+16+8\sqrt{x+7} = \\ = 5-x; 8\sqrt{x+7} = -18-2x; 4\sqrt{x+7} = -9-x, \quad \boxed{-9-x \geq 0} \end{aligned}$$

$$16(x+7) = 81 + 18x + x^2; x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1+31 = 32; x = -1 \pm 4\sqrt{2}; -9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -9$$

$$-1+4\sqrt{2} > -1 > -9; -1-4\sqrt{2} < -9; 4\sqrt{2} \wedge 8; \sqrt{2} \wedge 2, \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-4\sqrt{2} > -9$$

II:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3; \sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{5-x}; x+7 = 9+5-x+6\sqrt{5-x}$$

$$2x-7 = 6\sqrt{5-x}, \quad \boxed{2x-7 \geq 0}$$

$$4x^2 - 28x + 49 = 36(5-x); 4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16 + 524 = 540 = 6 \cdot 9 \cdot 10 = 15 \cdot 9 \cdot 4$$

$$x = \frac{-4 \pm 6\sqrt{15}}{4} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{15}}{2}$$

$$2x-7 \geq 0, 2x \geq 7;$$

$$\frac{-2-3\sqrt{15}}{2} < 0 < 7; \frac{-2+3\sqrt{15}}{2} \vee \frac{7}{2}; 3\sqrt{15} \vee 9; \sqrt{15} \vee 3; \sqrt{15} > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2+3\sqrt{15}}{2} > \frac{7}{2} \quad \text{— корень подходит}$$

Ответ: $\left(\frac{3\sqrt{15}-2}{2}; 35; 0 \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

Пусть $\cos x = t$: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4t^3 - 3t$; $\cos 2x =$
 $= 2 \cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$

$$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3 + p; 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

Заменим, что $(2t-1)^3 = (2t-1)(4t^2 - 4t + 1) = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4t^3 - 6t^2 + 3t = \frac{(2t-1)^3 + 1}{2}$

$$p = \frac{(2t-1)^3 + 1}{2} + 3; -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow p_{\min} = \frac{-2^3 + 1}{2} + 3 = -10$$

$$p_{\max} = \frac{1^3 + 1}{2} + 3 = 4$$

$\forall p \in [-10; 4] \exists x$, удовлетворяющий уравнению

$$2p = (2t-1)^3 + 1 + 6; (2t-1)^3 = 2p - 7; 2t-1 = \sqrt[3]{2p-7};$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}; \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}; x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $p \in [-10; 4]; x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



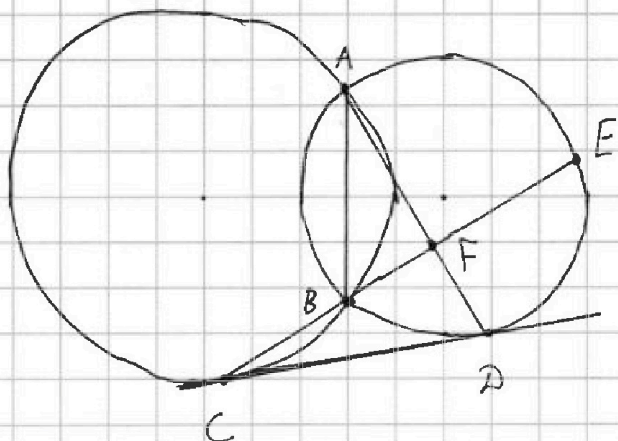
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4



CD - касательная

$$\frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}; \frac{ED}{CD} = ?$$

1. По условию $\angle ADC = \alpha$, $\angle ADE = \beta$
2. $\angle ABE$ и $\angle ADE$ - вписанные, опир. на одну хорду $AE \Rightarrow \angle ABE = \beta$
3. $\angle ABC = \bar{n} - \angle ABE = \bar{n} - \beta$
4. $\angle ABC$ - вписанный, опир. на дугу $\cup AC \Rightarrow \cup AC = 2\angle ABC = 2\bar{n} - 2\beta$
5. $\cup AC + \angle ABC = 2\bar{n} \Rightarrow \cup ABC = 2\bar{n} - \cup AC = 2\bar{n} - (2\bar{n} - 2\beta) = 2\beta$
6. $\angle ACD$ - угол между касательной CD и хордой $AC \Rightarrow \angle ACD = \frac{\cup ABC}{2}$
 $\angle ACD = \beta = \angle ADE$
7. $\angle ADC$ - угол между касательной CD и хордой $AD \Rightarrow \cup ABD = 2\alpha$
8. $\angle AED = \frac{\cup ABD}{2} = \alpha = \angle ADC$
9. $\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE \\ \angle ADC = \angle AED \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$ (по 2-м углам) \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle DAC = \angle EAD \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle CAE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

10. $\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE}$, т.к. AF - медиана $\triangle ACE$

11. $\triangle ADC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE}, \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{ED} \Rightarrow \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2$

$$\frac{AC}{AE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2 \Rightarrow \frac{CF}{FE} = \left(\frac{CD}{ED}\right)^2 \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Очевидно, что для любой из возможных симметрий необходимо наличие пар ^{клеток} ~~клеток~~, удовлетворяющих симметрии. Одну из ~~этих~~ этих клеток в паре можно выбрать произвольно, а вторая однозначно определится. Таким образом, из 8 клеток можно выбрать 4, а остальные подберутся однозначно.

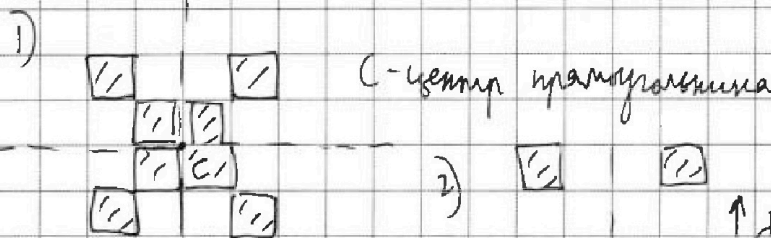
Всего клеток в прямоугольнике: $N = 150 \cdot 200 = 30000$

Значит, способов выбрать 4 клетки: $N_1 = C_{30000}^4$

Рассмотрим ситуацию, когда одновременно выполняется условие раз-
ных симметрий.

Можно заметить, что возможен случай выполнения либо одной из них, либо всех сразу.

Пример-иллюстрация так называемого случая:



центральная симметрия +
сим. одной из средних
линий



относимости обеих
средних линий



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, невозможно случай, когда две из симметрий выполняются, а третья — нет.

Найдём количество вариантов совпадения симметрий.

Теперь клетки, которые нужно закрасить, разбиваются на две группы по 4 клетки; положение каждой из групп выбирается произвольно.

~~т.е. одна из сторон прямоугольника меньше другой, максимум~~

Смещение миним из двух клеток симметричных отн. средней линии клеток d_1 может принимать \bullet значение $d \in [0; 74]$ вдоль одной стороны и $d \in [0; 99]$ вдоль другой стороны

Общее число способов выбрать d_1 и d_2 для двух групп клеток по обеим сторонам равно: $N_2 = C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$

Число способов закрасить клетки по одной из симметрий

$$N^* = 3N_1 = 3C_{30000}^4$$

Однако в это число способов ~~входят~~ ^{примого} входят случаи совпадения симметрий. Значит: $N = N^* - N_2 = 3C_{30000}^4 - 2C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$

Ответ: $3C_{30000}^4 - 2C_{75}^2 \cdot C_{100}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Пусть p -простое число

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \text{ I для } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Заменим, что системы

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ II}$$

I, VI не порождают пог

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \text{ III}$$

целые $a > b$.

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \text{ IV}$$

$$\text{II} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \text{ V}$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \text{ VI}$$

$a-b = p^2 - 1$; $a-b = (p-1)(p+1)$, для чисел $p-1, p, p+1$ верно, что хотя

бы одно из них кратно трём. Если $(p-1)(p+1) \not\equiv 3 \Rightarrow p \neq 3$, но

p -простое число $\Rightarrow p = 3$

$$a-b = 8; a = b + 8$$

$$a + b^2 = 820 \Rightarrow b + 8 + b^2 = 820; b^2 + b - 812 = 0$$

$$D = 1 + 3248 = 3249 = 9 \cdot 361; b_1 = \frac{-1 + 3 \cdot 19}{2} = 28, b_2 = -29$$

$$a_1 = 36, a_2 = -21, \text{ или } c = b - 1 \Rightarrow c_1 = 27, c_2 = -30$$

$(36; 28; 27), (-21; -29; -30)$ - порождают

$$\text{III} \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a-b = 1-p^2$, но $p^2 \geq 4 \Rightarrow a < b$ - не порождают пог целые



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{IV} \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$a-b=p^2-1 \Rightarrow a-b=8 \Rightarrow a=b+8; \text{аналогично решению системы II}$$

$$a_1=36, b_1=28, a_2=-21, b_2=-29$$

$$c=a+1 \Rightarrow c_1=37, c_2=-20 \quad (36; 28; 37), (-21; -29; -20)$$

↑
подходят

$$\text{V} \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$a-b=-p^2+1 < 0 \quad \text{не подходит по условию задачи}$$

$$\text{Ответ: } (36; 28; 37), (-21; -29; -30), (36; 28; 37), (-21; -29; -20)$$

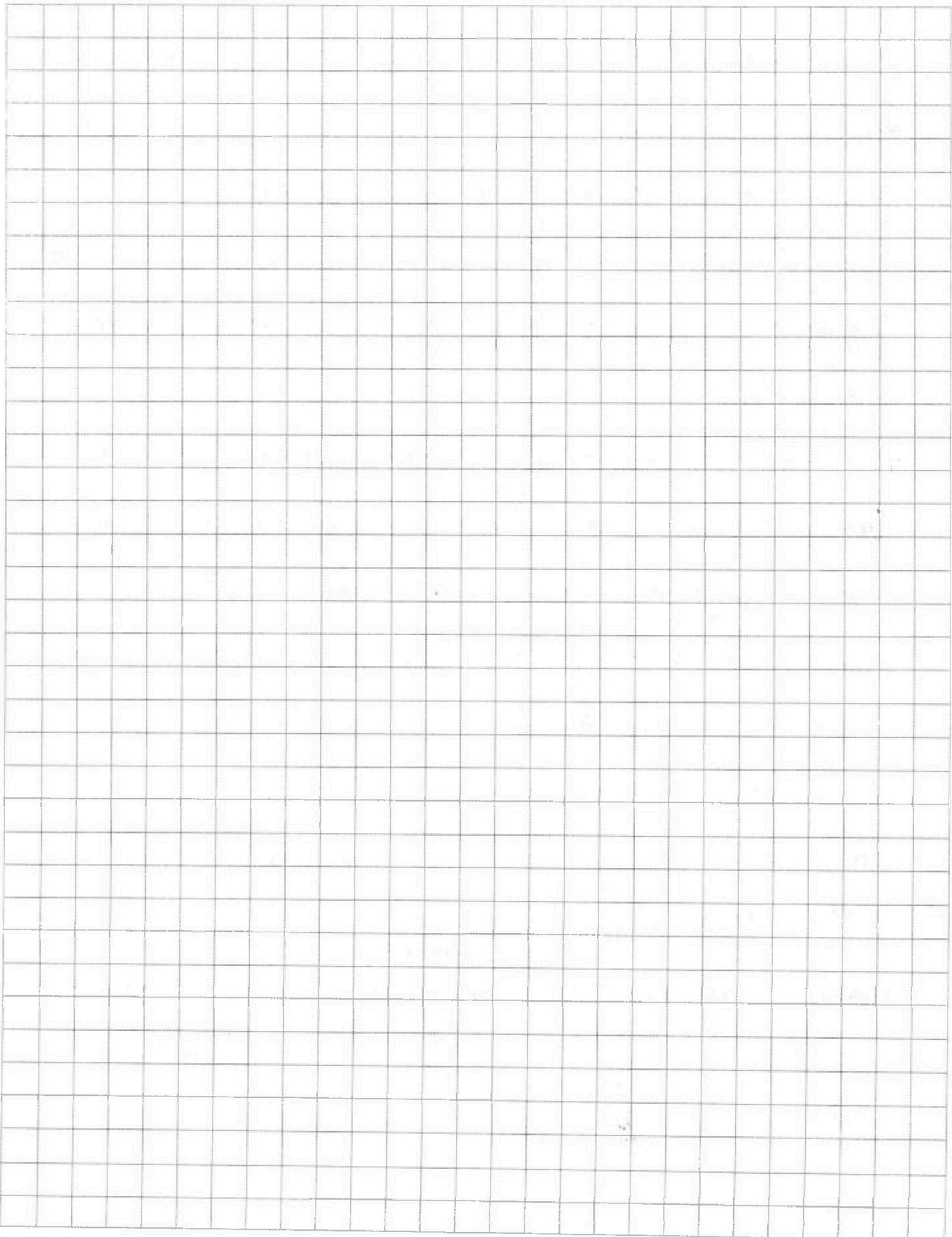


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



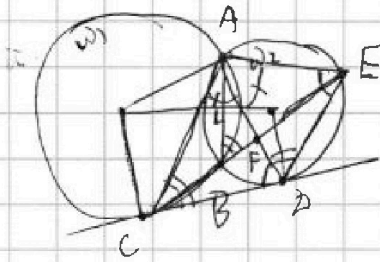


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

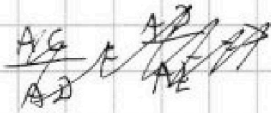


$$\frac{SD}{ED} = ? \quad \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE}$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$



$$\frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE}; \quad \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

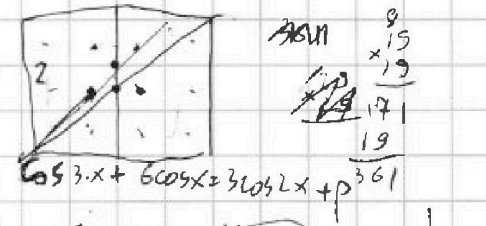
$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \quad p-1, p, p+1 \text{ - сукцессивные } \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p=3$$

$$a-b=8; \quad a-8b \quad b^2+8b-810=0; \quad 810=40 \cdot 205 = 4 \cdot 5 \cdot 41 = 4 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 3$$

$$a=8+b; \quad 8+b^2+b=810; \quad b^2+b-812=0; \quad 812=4 \cdot 203 \quad \begin{matrix} 812 \\ \times 4 \\ \hline 3248 \end{matrix}$$

$$D = 1 + 3248 = 3249 = 3 \cdot 1083 = 3 \cdot 3 \cdot 361 = 9 \cdot 19^2$$

$$b = \frac{-1 \pm 3 \cdot 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+57}{2} = 28 \\ \frac{-1-57}{2} = -29 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \\ \times 19 \\ \hline 38 \\ \hline 57 \end{matrix}$$

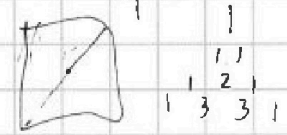


$$a_1 = -21; \quad a_2 = 36$$

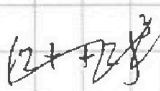
$$c_1 = -30; \quad c_2 = 24$$

$$(-21; -29; -30) \quad (36; 28; 27)$$

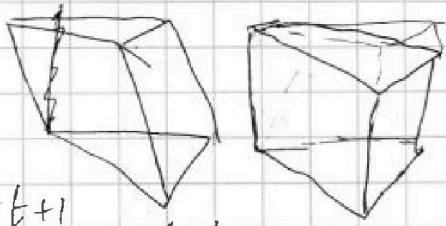
$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$



$$8t^3 - 12t^2 + 6t$$



$$(2t+x)^3 = 8t^3 + 3 \cdot 2t^2x + 3 \cdot 2tx^2 + x^3$$



$$= 8t^3 +$$

$$(2t+1)^3 = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$$

$$(2t+1)(4t^2+4t+1) =$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t = \frac{(2t+1)^3 - 1}{2}; \quad (2t+1)^3 - 1 + 6 = 2p; \quad 2p = 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1$$

$$2t+1 = \sqrt[3]{2p-5}; \quad t = \frac{\sqrt[3]{2p-5} - 1}{2}; \quad (2t+1)^3 = 2p-5$$

$$2p = (2t+1)^3 + 5$$

$$p = \frac{(2t+1)^3 + 1}{2} + 3; \quad p \leq 16$$

$$\frac{2(1)^3}{2} + 3 = 16$$

$$(2t-1)^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 + 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 + 2\sqrt{y-(x+1)^2+z}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{(15-z)(15+z)} \quad |(y-20)^2 + 4(y-35)^2 + 4|y-35||y-20| = 225 - z^2$$

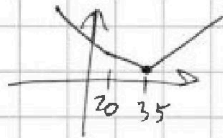
$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p; \quad \cos 3x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = 2k^3 - k - 2k + 2k^3 = 4k^3 - 3k$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 3(2t^2 - 1) + p; \quad 4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p; \quad 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x; \quad 2\cos 4x \cos 3x + 6\cos 5x = 3\cos 2x + p \quad (a+b)\left(\frac{y}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

$$f = |y-20| + 2|y-35|$$

$$z=0; y=$$



$$|y-20| + 2|y-35| \quad f_{\min} = |d|$$

$$= f(35) = 15; \quad \sqrt{225 - z^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)}$$

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p;$$

$$2\sqrt{(x+4)(5-x)} = -(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})^2 + x+4+5-x = -(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})^2 + 12$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \\ 81 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 36 \\ \times 5 \\ \hline 180 \\ 524 \end{array}$$

$$a = p^2 + b - 1$$

$$a + b^2 = 820$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow a-c = p^2$$

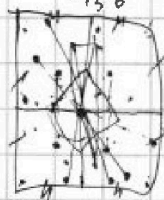
$$\begin{cases} a-c = b-c = p \\ b-c = 1; c = b-1 \\ a-c = p^2 \end{cases}$$

$$a = b + 1 + p^2; \quad a - b = p^2 + 1 \neq 3m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ a-c = l-b; \\ b-c = -p \end{cases}$$

$$(2 \frac{a+b}{z})$$

$$a + b^2 = 820$$



$$f' = 12t^2 - 12t + 3$$

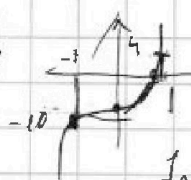
$$4t^2 - 4t + 21 = 0;$$

$$4t^2 - 4t + 21 = 0 \quad (2t-1)^2 = 0$$

$$4\cos^3 + 6\cos = 3\cos 2x + p$$

$$4\cos^3 x = 6$$

$$4 - 6 + 3 + 3$$



$$f_{\min} = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f_{\max} = 4 - 6 + 6 = 4$$

Оптимальное решение для задачи 2-x