МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$x^2 + 4\sqrt{2}\,tx + 9t^2 - 9 = 0$ — имеет 2 различн. дейст. корня x_1 и x_2

$x_1 x_2 > 0$

т.к. ур-е имеет 2 различн. дейст. корня, то дискриминант больше 0:

$32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$

По т. Виета $x_1 x_2 = \frac{9t^2 - 9}{1} = 9t^2 - 9 > 0$ (по усл.)

Значит, 1) $(6-2t)(6+2t) > 0$ и

2) $(3t-3)(3t+3) > 0$

1) Если $6 - 2t > 0$ и след. $6 + 2t > 0$, то:

$6 > 2t$ $\qquad 2t > -6$

$t < 3$ $\qquad t > -3$

$-3 < t < 3$

2) Если $6 - 2t < 0$ и след. $6 + 2t < 0$

$6 < 2t$

$t > 3$ $\qquad 2t < -6$

$t < -3$

Противоречие => такого быть не может.

3) Если $3t - 3 > 0$ и $3t + 3 > 0$, то

$3t > 3$ $\qquad 3t > -3$

$t > 1$ $\qquad t > -1$ т.е. $t > 1$

4) Если $3t - 3 < 0$ и $3t + 3 < 0$

$3t < 3$ $\qquad 3t < -3$

$t < 1$ $\qquad t < -1$, т.е. $t < -1$

Получаем, что $-3 < t < 3$ и либо $t > 1$ либо $t < -1$

I) $-3 < t < -1$

II) $1 < t < 3$

— в этих случ. ур-е удовлетворяет усл.

~~$t \in \{(-3; -1); ($~~

$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$

Ответ: $(-3; -1) \cup (1; 3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$a, b \in \mathbb{N}$

$a - b = 12$

$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$, где p – простое число

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$$
$$= (a+b)(a+b+3)$$

числа $a+b$ и $a+b+3$ могут иметь только один общий простой делитель – 3, т.к. они разной чётности, а разница между ними меньше любого простого числа кроме 2 или 3. При этом одно из них кратно 19, ~~т.к. общий делитель у этих чисел только 3~~

~~1) Если $p = 3$, то: $a+b = 3^4$.~~

1) Если $p=3$ и $a+b$ и $a+b+3 \vdots 3$:

т.к. только одно из этих чисел имеет в разложении на простые множители 19, то другой является n-ой степенью числа p (из единств. разложения на простые: разложение ~~прои~~ $19p^4$ совпадает с произв. разложений $a+b$ и $a+b+3$) причём $n > 0$, т.к. $a \geq 1$, $b \geq 1$ и $a+b \geq 2$.

~~Возможные варианты~~:

~~$a+b=19$, $a+b+3=$~~

Варианты разложений этих двух чисел на прост. множ.:

1) $a+b=19$; $a+b+3=3^4 \Rightarrow 3^4 = 19+3$, т.к. $81=22$ – против.
2) $a+b=19\cdot3$; $a+b+3=3^3 \Rightarrow 3^3=19\cdot3+3$, т.к. $27=60$ против.
3) $a+b=19\cdot3^2$; $a+b+3=3^2 \Rightarrow 3^2=19\cdot3^2+3$ – против.
4) $a+b=19\cdot3^3$; $a+b+3=3 \Rightarrow 3 > 19\cdot3^3$ – против.

Значит $p \neq 3$, но $a+b$ и $a+b+3$ всё равно ~~имеют~~ дают одно число в остатке при дел. на 3.

2) $p \neq 3$:

либо $a+b=19$, $a+b+3=p^4$ ~~или~~ либо $a+b=p^4$, $a+b+3=19$

1) $19+3=p^4 \Rightarrow p^4=22$ и $p \notin \mathbb{N}$
2) $p^4+3=19 \Rightarrow p^4=16 \Rightarrow p=2$, тогда $\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \text{ (по усл.)} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$+\begin{cases} a+b=16, \\ a-b=12; \end{cases}$ $\begin{cases} a=14 \\ b=16-a; \end{cases}$ $\begin{cases} a=14 \\ b=2. \end{cases}$

$2a=28$ $\quad b=16-14$

$a=14$ $\quad b=2$

Ответ: $a=14$; $b=2$

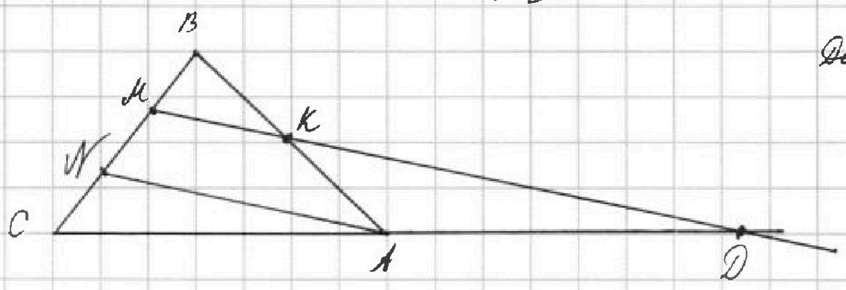
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано: $\triangle ABC$
$BM=MN=NC$
$MD \parallel AN$
$AB=CD$
$BC=6$
$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$
Найти: AB

Решение:

Т.к. $AN \parallel MD$ и AD — секущая, то $\angle MDA = \angle NAC$

Из подобия треуг-ков ACN и DCM (по двум $\angle$: $\angle C$ и $\angle CAN$ и $\angle CDM$) следует, что $AC=AD=\frac{1}{2}AB$ (т.к. $CN=MN$)

Из подобия $\triangle BMK$ и $\triangle BNA$ ($\angle B$ общ. и $\angle BMK$ и $\angle BNA$ — соотв. для $AN \parallel MD$) следует, что $BK=KA=\frac{1}{2}AB$ и $\angle BKM = \angle BAN$

Т.к. $\angle BKM$ и $\angle AKD$ — ~~накрест леж.~~ верт., то $\angle BKM = \angle AKD = \angle ADK$ (последнее рав. из равноб. треуг-ка ADK — $AD=\frac{1}{2}AB=AK$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAN = \angle BKM = \angle ADK = \angle NAC \Rightarrow AN$ — биссектр. треуг-ка ABC.

~~По т. косинусов $CN^2 = AN^2 + AC^2 - 2AN\cdot AC\cdot\cos$~~

~~$CN^2 = 4MK^2 + BK^2 - 2\cdot 2MK\cdot BK\cdot\cos(2\angle CAN)$~~

Т.к. AN — биссектр. $\triangle ABC$, то $\angle BAC = 2\angle CAN$

Тогда, по т. косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} - 2\cdot AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos(2\angle CAN)$$

$$BC^2 = \frac{5}{4}AB^2 - AB^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$BC^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{3}{4}AB^2$$

$$2AB^2 = BC^2$$

$$AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Всего парт $4 \cdot 3 = 12$, т.е. 1 останется пустой.

1) Если пустой будет 1-я парта, то на след. за ней парту можно посадить ученика 11 сп., но на каждый из этих способов на 3-ю парту можно посадить всё меньшее кол-во учеников (если мы считаем, что ученики распол. в порядке увеличения роста) => На этот ряд можно посадить учеников $10 + 9 + \ldots + 1 = \frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55$ сп.

На след. ряд за 1-ю парту придётся посадить самого низкого из ост. учеников, а на след. 2 ~~ученикам~~ парты учеников можно сажать $7+6+\ldots+1 = \frac{7+1}{2} \cdot 7 = 28$ сп. (аналог. пред. пункту, на 2-ю парту – 8 способов, и на 3-ю 7, 6, 5 ..., 1 в зав. от ученика за 2-й партой)

И вообще, в целом, если на ряд остаётся n учеников, то за 1-ю парту придётся посадить самого низкого, а за след. 2 – $\frac{n-2+1}{2} \cdot (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ способами.

Значит, в данном случае на 3-й ряд остаются 6 учеников – $\frac{(6-1)(6-2)}{2} = 10$ сп., на 4-й – 3 ученика => => 1 способ.

Итого, ~~для~~ если пустой будет 1-я парта, то способов $55 \cdot \underbrace{28 \cdot 10}$ способами

Этот множитель будет всегда присутствовать, т.к. какой бы по счёту ни была пустая парта на каком-то 3 ряда останется 9 учеников, которых можно рассадить 28·10 способами.

2) Если пустая парта – 2-я, то на ряду с ней за 1-ю парту ученика можно посадить 11 спос., на 3-ю – 10-ю спос. (1 сидит за 1-й партой) => на этом ряду $11 \cdot 10 = 110$ спос., на ост. 3 ряда ситуация аналогичная 1-й => всего способов $110 \cdot 28 \cdot 10$

3) Если пустая парта – 3-я, то ситуация абсолютно аналогична 1-й (и там, и там можно считать, что один из рядов сост. из 2-х парт) => способов $55 \cdot 28 \cdot 10$

Значит всего способов $(55 \cdot 28 \cdot 10 \cdot 2 + 110 \cdot 28 \cdot 10) \cdot 4! = 220 \cdot 280 \cdot 4! = 220 \cdot 280 \cdot 24 = 1478400$, где 4! – это учитывая что в каждой из конфигураций ряды можно расположить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ способами

Ответ: 1478400

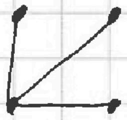
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

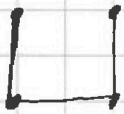
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Кол-во способов попасть из деревни с 1 дорогой в любую другую зависит только от соединения тех четырёх деревень, у которых дорог больше 1-й, т.к. из неё самой попасть можно только в 1-у деревню и в каждую такую деревню ведёт всего одна дорога от какой-либо из тех четырёх.
Чтобы среди четырёх деревень, в которых дорог больше 1 в другую попасть можно было только одним путём их можно соединять дорогами след. образом:



или



Здесь принципиальная разница в том, из скольких ~~городов~~ по отдельну дорог выходит

Есть ещё, например, вариант , но он не отличается от второго, т.к. всё равно из 2-х ~~городов~~ деревень выходит по 1-й дороге, а из 2-х – по 2. Меньше дорог потратить нельзя: ~~тогда~~ иначе появляется несколько компонент связности (3 ~~город~~ деревни соед., 1 отдельно или деревни соед. по 2, но пары разделены). При большем кол-во дорог появляются разные маршруты из одной деревни в другую.

Всего в запасе было $5+6+7+9=27$ дорог. Мы потратили на соед. 4-х деревень с большим 1 числом дорог ~~$2+2+2=6$ или~~ $3\cdot 2=6$ дорог (каждая дорога считается как 2, т.к. соед. 2 деревни) $\Rightarrow$ ещё $27-6=21$ дорогами можно присоед. 21 деревню (по 1-й на дорогу) $\Rightarrow$ всего деревень $4+21=25$

Ответ: 25 деревень.

№7

$x, y \in \mathbb{Z}$, корни ур-я:

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

т.к. ~~$\sqrt{1-}$~~ $1-|x-y-1| \geq 0$ (иначе нельзя извлечь корень), то $1 \geq |x-y-1|$, но ~~1) Если~~ т.к. модуль — неотриц. число, а x и y целые (и ~~модуль~~ соотв. тоже), то $|x-y-1|$ равен 0 или 1. ~~Если~~

1) Если $|x-y-1| = 1$, то уравнение имеет вид

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2$, причём ~~$x-y-1=1$ или $x-y-1=-1$~~

1.1) если $x-y-1=1$ и $x=y+2$, то

$$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2} = 2$$

$$\cancel{2y}+4-\cancel{2y}-y^2-4y-4-y^2 = 4$$

$$-2y^2-4y = 4$$

$$2y^2+4y+4=0$$

$D = 16-4\cdot2\cdot4 = -16 < 0 \Rightarrow$ корней нет и этот случ. не подходит

1.2) если $x-y-1=-1 \Rightarrow x=y$, то

$$\sqrt{2x-2x-x^2-x^2} = 2$$

$\sqrt{-2x^2} = 2$, т.к. $x^2 \geq 0$, то $-2x^2 \leq 0 \Rightarrow$ корней нет (если $x^2>0$, то корень квадратный не извл., если $x^2=0$, то $0=2$ — противоречие) и этот случай тоже не подх.

2) Если $|x-y-1|=0 \Rightarrow x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1$, подст.:

$$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2} + \sqrt{1-0} = 2$$

$\sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-1-y^2} = 2-1$

$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 1$

$-2y^2-2y+1=1$

$-2y^2-2y=0$

$y^2+y=0$

$y(y+1)=0$

$y=0$ или $y+1=0$

$y=-1$

Если $y=0$, то $x=0+1=1$, проверяем:

$\sqrt{2\cdot 1-2\cdot 0-1^2-0^2}+\sqrt{1-|1-0-1|} = \sqrt{2-1}+\sqrt{1} =$
$=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$ — подходит.

Если $y=-1$, $x=-1+1=0$, то:

$\sqrt{2\cdot 0-2\cdot(-1)-0^2-(-1)^2}+\sqrt{1-|0-(-1)-1|} = \sqrt{2-1}+\sqrt{1} =$
$=2$ — подходит.

Значит, решения это ~~(1;~~ $(0;-1)$ и $(1;0)$

Ответ: $(0;-1)$ и $(1;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Всего парт $4\cdot3=12$, т.е. 1 парта должна оста-ться пустой.

Самый низкий ученик в группе может сидеть либо за 1-й партой, либо за 2-й, но чтобы ~~за~~ перед ним была пустая парта. ~~1 парт~~ Самого низкого можно рассадить 2 способами ~~(2·4 — по 2 в каждом ряду)~~ в одном ряду.

~~Если высокий сидит не на последней парте, то за ним обязательно следует пустая парта.~~

1) Если самый низкий за 2-й партой, то первая парта может быть занята 10 способами. В другом ряду за 1-й партой будет сидеть самый низкий из ост. За ним (за 2-й партой) можно будет усадить ученика 8 сп.

1.1) Если это будет 1 след. по высоте за ~~второй~~ учеником с 1-й парты, то на 3-ю можно посадить учеников 7-ю способами.

1.2) Если ~~это~~ нет, то след. по высоте нужно посадить за 1-ю парту ещё одного ряда.

$C_{11}^4\cdot4!+C_{11}^3\cdot4!=(C_{11}^4+C_{11}^3)\cdot4!$

Ост. 9, 1, ост. 3, ост. 6

$\cancel{11\cdot10\cdot9\cdot8}$ C_{11}^{5} $\cancel{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot4\cdot3\cdot2}$

$616\cdot24=$

$=\frac{616}{4}\cdot100-616=$

$=15400-616=$

$=14784$

9 6 3

$10+9+\dots$ 55 28 10 1

55·28·10

$\cancel{10+7+21+4+6+0}$

10 сп. 7сп. 4сп. 7сп.

$6+5+4+3+2+1=21$ сп.

$3+2+1=6$ сп.

10 сп.

28

$10\cdot28\cdot10\cdot1=2800$

~~2800·4~~

$2800\cdot4!$

11 10 110

110·28·10

$(30+2)(20+2)=$

$=600+40+60+4$

$55\cdot28\cdot10+110\cdot28\cdot10+$

$+55\cdot28\cdot10=$

$=2\cdot110\cdot28\cdot10$

$2\cdot110\cdot28\cdot10\cdot4!$

$220\cdot280\cdot24=$

$=(22\cdot28\cdot24)\cdot100=$

$=(480+56)\cdot24)\cdot100=$

$=\left(\frac{336\cdot100}{4}-336\right)\cdot100=$

$=(8400-336)\cdot100=\cancel{8700}$ 806400

$10+9+8+7\dots=\frac{11}{2}\cdot10=55$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$2x-2y-x^2-y^2=x(1-x)-y(1+y)+x-y$

$\cancel{x(2-x)}$

$=2(x-y)$

Дано: $ABCD$ – чет-ник впис. в окр.

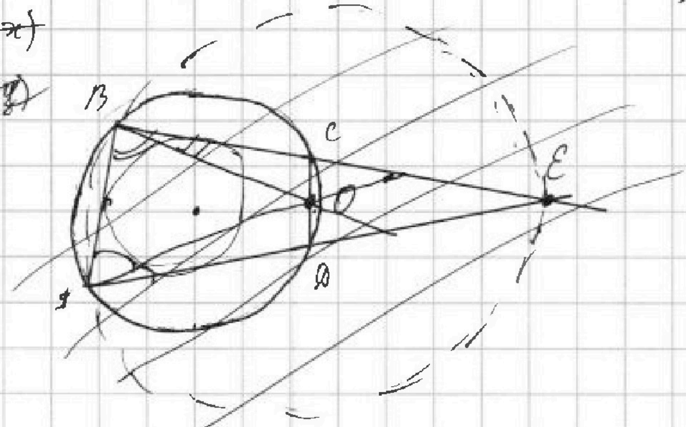
E – т. пересеч. AD и BC

O – ц. опис. окр. $\triangle ABE$

$O \in CD$

$BE=12$

Найти: наибольш. знач. $ED+DO$



$x-y-1=0$

$x=y+1$

$1 \geq |x-y-1|$

$|x-y-1|=0$

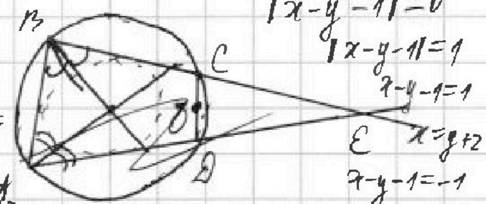
$|x-y-1|=1$

$x-y-1=1$

$x=y+2$

$x-y-1=-1$

$x=y$



Решение:

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$2(x-y)-(x-y)^2-2xy=$

$=(x-y)(2-x+y)-2xy$

$x^2-2x+y^2+2y \leq 0$

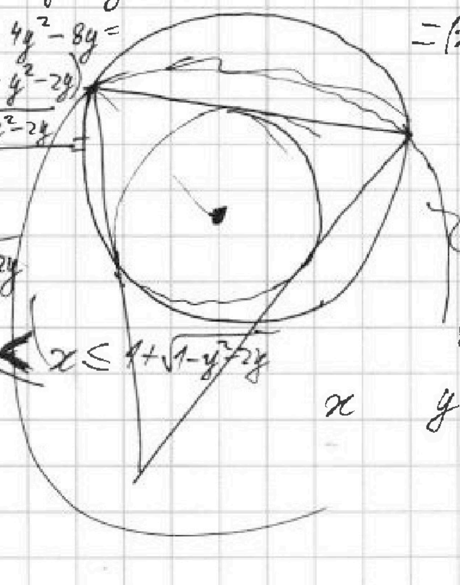
$D=4-4y^2-8y=$

$=4(1-y^2-2y)$

$x=\frac{2\pm2\sqrt{1-y^2-2y}}{2}$

$=1\pm\sqrt{1-y^2-2y}$

$1-\sqrt{1-y^2-2y} < x \leq 1+\sqrt{1-y^2-2y}$



$x-y=n$

$x=n+y$

$xy=y(n+y)$

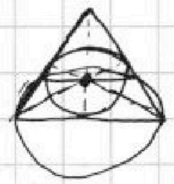
$180-\alpha-\beta$

$180-2\alpha-2\beta$

$n(2-n)-2xy$

$(y+1)^2=y^2+2y+1$

$x \quad y+1$

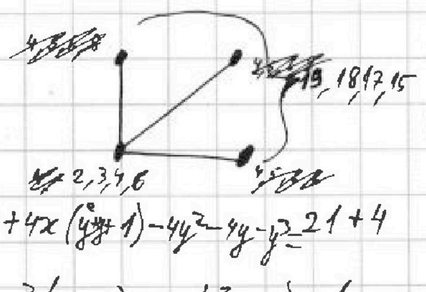


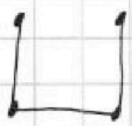
$\sqrt{n(2-n)}-2xy \; +$

$5+6+7+9-6=21$

$21+4$

25





(5) $x^3-x^2(y+4)+4x(y^2+y+1)-4y^2-4y-y^3=21+4$

$=x^3-x^2(y+4)+4x(y^2+y+1)-(2-x+y)(2x-2y-x^2-y^2)=$

$-y(y^2+4y+4)=x^3-x^2(y+4)+$

$+4x(y^2+y+1)-y(y+2)^2$

$=4x-4y-\cancel{2x^2}-2y^2-\cancel{2x^2}+\cancel{2xy}+x^3+xy^2+\cancel{2xy}-2y^2-$

$-x^2y-y^3-\cancel{D}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

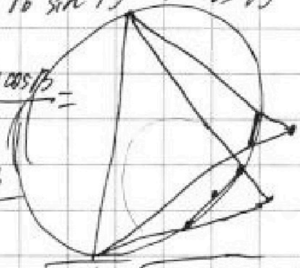
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin(B) = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$4\sin^4\frac{B}{2} - 4\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2 B = 0$

$\sin^2 B = 4\sin^2\frac{B}{2}\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)$

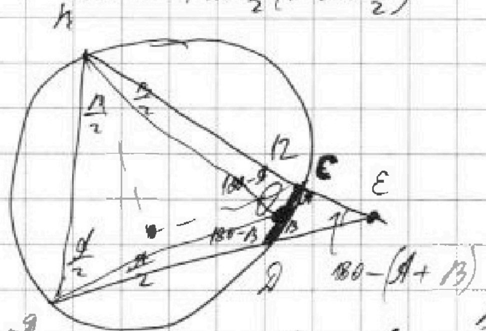
$D = 16 - 16\sin^2 B = 16\cos^2 B$



$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{4 \pm 4\cos B}{16} =$

$= \frac{1 \pm \cos B}{4}$

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\cancel{\cos}}\ \frac{\sqrt{\cos B + 1}}{2}$



$BE = l$

$BC = b$

$CE = l - b$

$\frac{EO}{\sin\left(\frac{B}{2}\right)} = \frac{BE}{\sin\left(180-\left(\frac{B}{2}+180-A\right)\right)} = \frac{BE}{\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)}$

$EO = l\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)}$

$\frac{DE}{\sin A} = \frac{l-b}{\sin B} = \frac{ED}{\sin(A+B)}$

$DE = (l-b)\frac{\sin A}{\sin B}$

$ED = (l-b)\frac{\sin(A+B)}{\sin(B)}$

$DO = ED - EO = (l-b)\frac{\sin(A+B)}{\sin B} - l\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)}$

$DE + DO = (l-b)\frac{\sin A}{\sin B} + (l-b)\frac{\sin(A+B)}{\sin B} - l\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)}\ \theta$

$\theta\ (l-b)\frac{\sin A}{\sin B} + (l-b)\frac{\sin A\cos B + \sin B\cos A}{\sin B} -$

$-l$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!