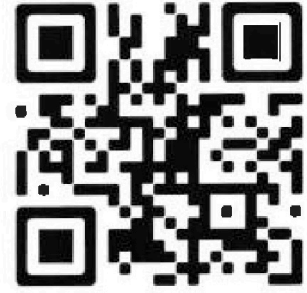




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
 С А М
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9$$

Это квадратное уравнение, а значит, оно имеет два различных действительных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант больше нуля. Произведение корней положительно тогда и только тогда, когда они оба положительны или оба отрицательны

$$\begin{aligned} D &= 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36 - 4t^2 = \\ &= 4(9 - t)(9 + t) \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-4\sqrt{2}t + 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2}$$

$$x_2 = \frac{-4\sqrt{2}t - 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2}$$

I сч.

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} > 0 \\ -2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{9-t^2} > 2\sqrt{2}t \\ -2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2} \end{cases}$$

$$\downarrow \\ -3 < t < 0$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{9-t} >$~~

три ограничения $-3 \leq t \leq 0$

первое неравенство из системы
вообще будет истинным, так как
его левая часть вообще положительная,
а правая отрицательная или 0.

Проверим второе неравенство.

$$\begin{cases} -2\sqrt{2t} > \sqrt{9-t^2} \\ -3 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$a = -t$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2a} > \sqrt{9-a^2} \\ 0 \leq a \leq 3 \end{cases}$$

$$8a^2 > 9 - a^2$$

$$9a^2 - 9 > 0$$

$$a^2 - 1 > 0$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$$

$$a^2 > 1$$

$$(-t)^2 > 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -t > 1 \\ -t < -1 \end{cases}$$

↑
невозможно так

как $t < 0$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что

$$-3 \leq t < -1$$

Ответ: $t \in [-3; -1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b = 12 \quad \text{задача 2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

Заметим, что a и b или оба чётные, или оба нечётные, тогда $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ всегда $\div 2 \Rightarrow p = 2$, т.к. других простых чётных чисел не существует.

Получаем

$$a = 12 + b$$

$$144 + 24b + b^2 + 2b(12+b) + 36 + 3b + b^2 + 3b = 19 \cdot 2^4$$

$$144 + 24b + b^2 + 24b + 2b^2 + 3b + 3b + b^2 + 3b = 19 \cdot 16$$

$$4b^2 + 57b + 144 = 19 \cdot 16$$

$$4b^2 + 57b - 160 = 0$$

$$D = 57^2 + 160 \cdot 4 =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 144 + 24b + b^2 + 24b + 2b^2 + b^2 + 3b + 3b + 3b = 19 \cdot 16$$

$$4b^2 + 54b + 180 = 304$$

$$4b^2 + 54b - 124 = 0$$

$$D = 54^2 + 124 \cdot 4 = 2916 + 496 = 3412 = 58^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = \frac{70 - 54}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b_2 = \frac{-70 - 54}{8} < 0, \text{ не подходит, т.к. не является натуральным}$$

Поэтому $b = 2$, $a = 14$

Ответ: $2, 14$ $a = 14$; $b = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

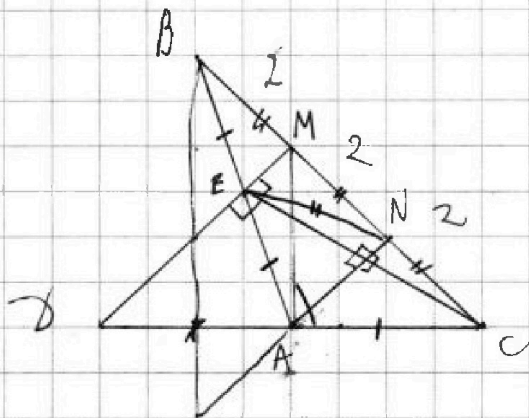
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$



1. т.к. $AN \parallel MD$ и

N - сяр MC , AN -
середня лінія в
 $\triangle MCD$, значить

A - середина CD

$$AD = AC = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$$

значить E - точка пересечения MD и AB .

$\triangle AND$, $MA \parallel ND$ и M - середина BN ,

$$\text{значить } BE = EA = \frac{AB}{2}$$

получаем, что $AD = AC = BE = EA$

значить, AN является биссектрисой в
 $\triangle ABC$ (так как лежит противлежащую
сторону в отношении сторон)

2. $\triangle CBE$ прямоугольный, т.к. медиана

EB равна половине стороны CB . Получаем,

что $MD \perp CE$ и $AN \perp CE$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из-за того, что AN биссектриса $\angle CAB$,
то $\angle CAN = \angle NAB$

Примем теорему косинусов в $\triangle ABC$ и
найдем отсюда сторону.

Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$

$$4x^2 + x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x^2 = 36$$

$$8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 3$$

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Ка Возьмем трех конкретных учеников.

Ох В ряд их можно посадить одним единственным способом.

Если в ряду есть пустое место, то ~~то~~ способов посадки уже
Б - большой, М - маленький, О - пустота

Б	М	М	О
О	Б	О	М
М	О	Б	Б

целых трех перестановках.

Поэтому всего способов посадки =
= кол-во способов разбить учеников на ^{-4!} группы по 3 человека $\cdot 4!$, т.к. в

каждом есть еще три доопределения

способа где места с пустотами и места между местами ^{и места между местами}
~~получаем по формуле шаров и перегородок:~~

Получаем.

$$C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4!$$

Ответ:

~~$$\frac{12! \cdot 9! \cdot 11! \cdot 8! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 4!}$$~~

$$\frac{4 \cdot 11! \cdot 4!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Так как на острове n пород деревьев можно добраться в любую n точки единственными способами, то граф, где деревья будут соответствовать вершинам, а дороги - ребрами, будет являться деревом по определению.

А значит, в таком графе будут n вершин и $n-1$ ребро.

Пусть на нашем острове k деревьев, тогда всего ~~деревьев~~ ^{будет} ~~вершин~~ $k-4+5+6+7+9$

дорог, $\frac{1}{2}$ а т.к. граф является

деревом, то дорог должно быть $k-1$

Получаем:

$$\frac{k+23}{2} = k-1$$

$$k+23 = 2k-2$$

$$k = 25$$

Ответ: 25 деревьев.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим $\sqrt{1-|x-y-1|}$ т.к. x и y целые, то $1-|x-y-1|$ тоже целое, а значит может равняться только 0 и 1 (т.к. модуль всегда ≥ 0)

$$I) 1-|x-y-1| = 1$$

$$|x-y-1| = 0$$

$$x-y-1=0$$

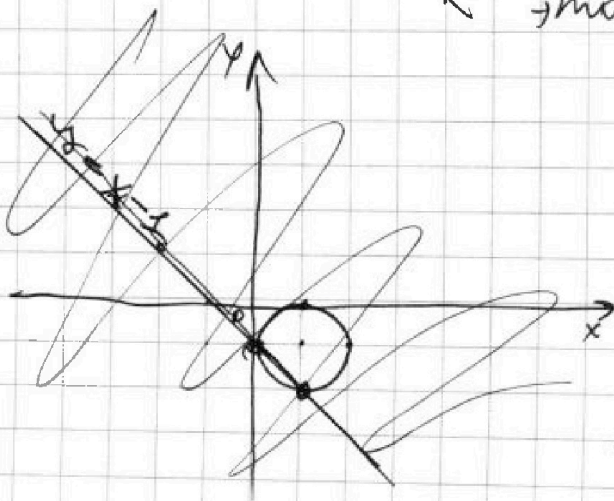
это прямая $y = x - 1$

$$II) \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 1$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 1$$

$$2(x^2-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

это окружность с радиусом 1 и центром в т. $(1; -1)$



решим систему

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$$

будет наблюдаться пересечение прямой и окр-ти.



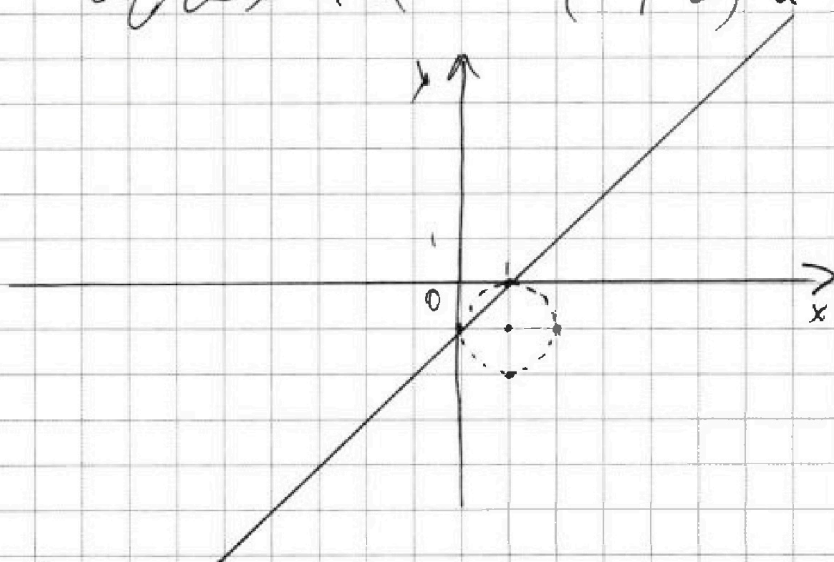
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На графике видно, что это точки
~~(0; 2)~~ и ~~(1; 1)~~ $(0; -1)$ и $(1; 0)$



$$\text{в) } 1 - |x - y - 1| = 0, \text{ тогда}$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 2$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 2$$

$$\sqrt{x^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{9-2}$$

Ответ: $(0; -1)$; $(1; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Было сказано, что $\cos(2\angle CAM) = -\frac{3}{4}$

Пусть $\cos \angle CAM = x$, тогда

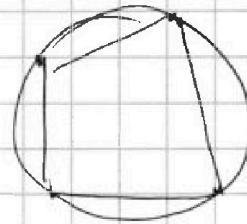
$$\cos 2\alpha = 2x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$2x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ т.к.}$$

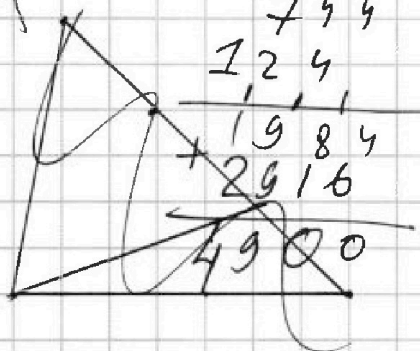
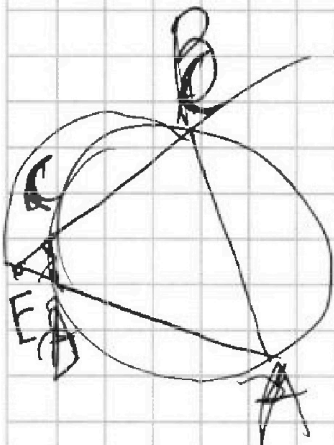
$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 54 \\ \hline 108 \\ 216 \\ \hline 2916 \end{array}$$



$\angle CAM$ лежит в первой четверти, и так как $AB \perp BC$ лежала бы за точкой C

Дано: $BC = 6$

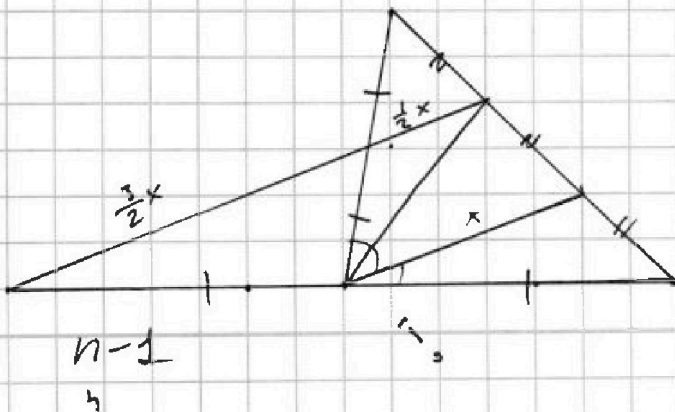
$\cos \angle$



$$\frac{54}{6} = 9$$



$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
- ИЗ -

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$ED = \frac{BE}{EC}$
 $\frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \cdot EC$

$x \geq y$
 $x - y - 1 \geq -1$
 $-x + y + 1 \leq 1$
 $x + y + 1 \leq 1$
 $x - y - 1 \geq 1$
 $x \geq y + 2$

$\sin(\alpha + \beta)$
 $\frac{1}{2}$

$x \geq y$
 $-x + y + 1 \leq 1$
 $x - y - 1 \geq 1$
 $y + 2 \geq x$

$(x+y)^2 + 2x - 2y + 2xy > 0$
 $xy + 2xy - 2xy$
 $2(xy)$

$x - y$
 $(x-y)(x-y+2) + 2xy > 0$

$-3-2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

a) $x > 0$
 $y > 0$

$$x-y-1 \leq 1$$

$$x \leq y+2$$

б) Пусть $x > 0$
 $y < 0$

$$x+y-1 \leq 1$$

$$x \leq 2-y$$

в) $x < 0$
 $y > 0$

$$-x+y-1 \leq 1$$

д) $x-y-1 > 0$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 4$$

$$-x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 0$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 0$$

$$(x^2-1)$$

↑ max

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = k$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = k^2$$

$$(x^2-1)^2 + (y+1)^2 + k^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2-k^2 \quad \rightarrow k = \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

