



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Дано:

$$a_3 = 3x+3$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$\{a_n\}$ - ариф. прогрессия

$x = ?$

Решение

$$\left. \begin{array}{l} 1) a_3 = a_1 + 2d \\ a_3 = 3x+3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x+3 = a_1 + 2d \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 = 3x+3-2d \quad (*) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) a_5 = a_1 + 4d \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \quad (**) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) a_9 = a_1 + 8d \\ a_9 = 3x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 8d = 3x^2 \quad (***) \end{array}$$

4) Из н. 1, 2, 3 (*) найдем d (*)

$$3x+3-2d+8d = 3x^2$$

$$3x+3+6d = 3x^2 \quad | :3$$

$$2d = x^2 - x - 1 \quad | \cdot 2$$

$$4d = 2x^2 - 2x - 2$$

5) Из н. 4 и н. 1

$$a_1 = 3x+3 - (x^2-x-1) = 3x+3-x^2+x+1 = -x^2+4x+4$$

6) Из н. 2 и н. 5 найдем b (**)

$$\frac{-x^2+4x+4 + 2x^2-2x-2}{x^2+2x+2} = (x^2+2x)^2$$

6.1) Замена $t = x^2+2x$

$$t+2 = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = 1+8=9 > 0 \Rightarrow 2 \text{ действ. корня}$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

6.2) Обратная замена:

Если $t = 2$, то $x^2+2x=2$

$$x^2+2x-2=0$$

$$D = 4+8=12 > 0 \Rightarrow 2 \text{ действ. корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

Если $t = -1$, то $x^2+2x = -1$

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0$$

$$|x = -1|$$

Ответ: $\{-1; -1 \pm \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

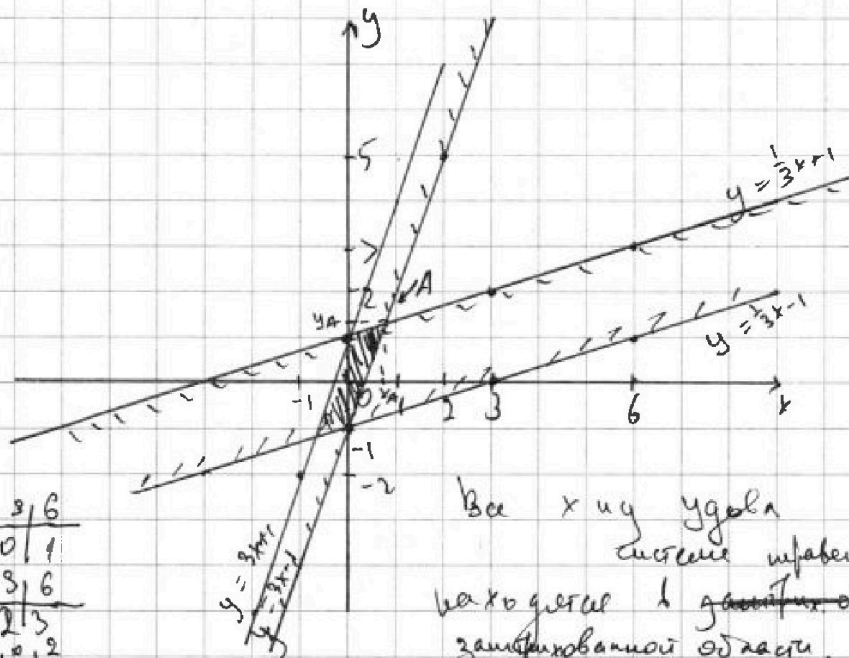
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |x-y| \leq 1 \\ x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 \leq 3y \\ x+3 \geq 3y \\ 3x-1 \leq y \\ 3x+1 \geq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x & 3/6 \\ y & 0/1 \\ \hline x & 3/6 \\ y & 2/3 \\ \hline x & 0/2 \\ y & -1/5 \\ \hline x & 0/-1 \\ y & 1/-2 \end{array}$$



Все x и y углов системы уравнений находится в границах ~~ограниченной~~ заштрихованной области.

Чтобы $4y + 8x$ будет максимум при максимальных x и y .
 \rightarrow т. А (x_A, y_A) на графике.
 $x_{\max} = x_A$
 $y_{\max} = y_A$

т. А - точка пересечения

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 / \cdot 3$$

$$9x - 3 = x + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow x_A = \frac{3}{4}$$

$$y_A = \frac{1}{3}x_A + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{т. А} \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 8x = 4 \cdot y_A + 8x_A = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: **11**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходно $\begin{cases} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13b^2 & (*) \\ m^2n + mn^2 - 3mn = 759^2 & (**) \end{cases}$ p, q - простые $m, n \in \mathbb{N}$

1) Решим $(m+n)^2 - 9(m+n) = 13b^2$
 $(m+n)(m+n-9) = 13b^2 = 13 \cdot b \cdot b$

- $\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=b^2 \end{cases}$ ①
- $\begin{cases} m+n=13b \\ m+n-9=b \end{cases}$ ②
- $\begin{cases} m+n=b^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$ ③
- $\begin{cases} m+n=13b^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$ ④
- $\begin{cases} m+n=b \\ m+n-9=13b \end{cases}$ ⑤
- $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13b^2 \end{cases}$ ⑥

2) Решим #1

$m^2n + mn^2 - 3mn = 759^2$
 $mn(m+n-3) = 759^2$

3) u_3 и 1 и 2

$\begin{cases} m=13-n \\ b=2 \\ mn(m+n-3) = 759^2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ b=2 \\ (13-n)n(m+n-3) = 759^2 \\ (13-n) \cdot n \cdot 10 = 759^2 \end{cases}$

Значит $n \cdot 10 \Rightarrow$

$\rightarrow 759^2$ тоже $2 \cdot 10 \Rightarrow$

1.1) Решим ①

$\begin{cases} m=13-n \\ 13-n+n-9=b^2 \\ m=13-n \\ b^2=4 \\ m=13-n \\ b=2 \end{cases}$

1.2) Решим ②

$\begin{cases} m=13b-n \\ 13b-n-9=b \\ m=13b-n \\ 12b=9b \\ m=13b-n \\ b=\frac{3}{4} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.3) Решим ③

$\begin{cases} m=b^2-n \\ b^2-n-9=13 \\ m=b^2-n \\ b^2=29 \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.4) Решим ④

$\begin{cases} m=13b^2-n \\ 13b^2-n-9=1 \\ m=13b^2-n \\ b^2=\frac{10}{13} \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.5) Решим ⑤

$\begin{cases} m=b-n \\ b-n-9=13b \\ m=b-n \\ -9=12b \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.6) Решим ⑥

$\begin{cases} m=1-n \\ 1-n-9=13b^2 \\ m=1-n \\ 13b^2=-8 \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

3)

$1 \Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное и простое $\Rightarrow q=2 \Rightarrow$

$\begin{cases} b=2 \\ q=2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ -n^2+13n=80 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} n=10 \text{ (по т. Виета)} \\ n=3 \\ m=13-n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=10 \\ n=10 \\ m=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ (13-n) \cdot n \cdot 10 = 759^2 / 10 \end{cases}$ ⑦



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II случай

$$\begin{cases} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 75p^2 & \text{#1} \\ m^2n + mn^2 - 3mn = 13p^2 & \text{#1} \end{cases} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч. у обеих уравнений}$$

1) Ресш. #1

$$\begin{cases} mn(m+n-3) = 13p^2 & \text{#1} \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p & \text{#1} \\ mn = p^2 & \text{#2} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p & \text{#2} \\ mn = p & \text{#3} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p^2 & \text{#3} \\ mn = 1 & \text{#4} \end{cases} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ \begin{cases} m+n-3 = p^2 & \text{#4} \\ mn = 13 & \text{#5} \end{cases} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч. (из н.ч. 1, 1, 1, 6)} \\ \begin{cases} m+n-3 = b & \text{#5} \\ mn = 13p & \text{#6} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = 1 & \text{#6} \\ mn = 13p^2 & \text{#7} \end{cases} \end{cases}$$

1.1) Ресш. #1

$$\begin{cases} mn = p^2 \\ m+n-3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p^2 \\ n = 13 - p^2 \\ \begin{cases} m = p^2 \\ n = 1 \\ m = p \\ n = b \\ m = p^2 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = p^2 \\ p^2 = 15 \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ n = b \\ m = p \\ 2p = 16 \Rightarrow p = 8 - \text{н.ч. п.ч.} \Rightarrow \\ m = p^2 \\ m = 1 \\ p^2 = 15 - \text{н.ч. п.ч.} \end{cases}$$

1.2) Ресш. #2

$$\begin{cases} mn = b \\ m+n-3 = 13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p \\ n = 1 \\ m = 1 \\ n = p \\ m+n-3 = 13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p \\ n = 1 \\ -2 = 12p \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \\ m = 1 \\ n = p \end{cases} \Rightarrow \text{аналогично н.ч. п.ч.}$$

1.4) Ресш. #4

$$\begin{cases} m \cdot n = 13 \\ m+n-3 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 1 \\ m = 1 \\ n = 13 \\ m+n-3 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 1 \\ p^2 = 11 \Rightarrow \\ m = 1 \\ n = 13 \\ \text{аналогично н.ч. п.ч.} \end{cases}$$

1.3) Ресш. #3

$$\begin{cases} m \cdot n = 1 \\ m+n-3 = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ -1 = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.}$$

1.5) Ресш. #5

$$\begin{cases} m \cdot n = 13p \\ m+n-3 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13p \\ n = 1 \\ m = 13 \\ n = p \\ 10 = 0 - \text{н.ч. п.ч.} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ \text{аналогично в других оставшихся случаях н.ч. п.ч.} \end{cases}$$

Ресш. #6

$$\begin{cases} m \cdot n = 13p^2 \\ m+n-3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13p^2 \\ n = 4 - 13p^2 \\ \text{н.ч. п.ч.} \end{cases}$$

Если б было из натур. чисел безразлично значение 13, то это было больше либо равно 13. Любая такая пара с натуральными числами

⇒ будет больше 13 ⇒ 2 равенства не выполняются ⇒ н.ч. п.ч.
Реш: (10; 3); (3; 10)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

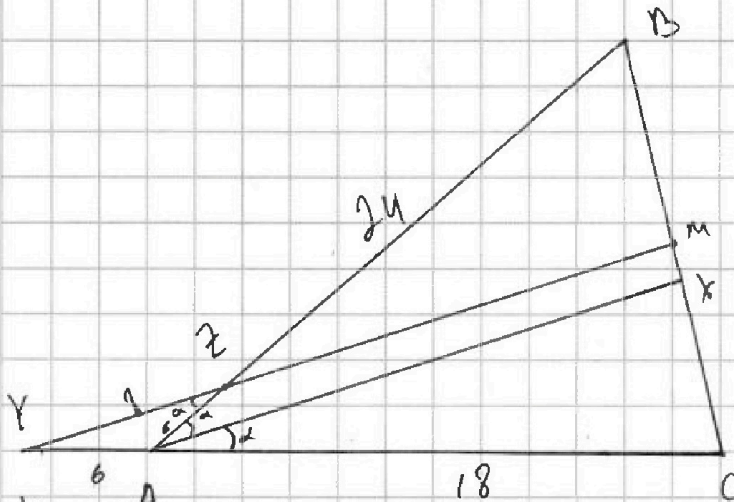


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ ч.



Дано:

$\triangle ABC$
 AX-биссектриса $\triangle ABC$
 Г.М-середина BC
 $MY \parallel AX$
 $MY \perp AB = 2$
 $MY \perp AC = Y$
 $AC = 18$
 $AZ = 6$
 $YZ = 8$
 $BC = ?$

Решение:

- 1) AX-биссектриса $\triangle ABC$ (по ус.) $\Rightarrow \angle BAX = \angle XAC = \alpha$ (по опр. биссектрисы)
- 2) $AX \parallel MY$ (по ус.)
 AB - секущая
 $\angle BAX$ и $\angle YZA$ - накрест лежащие $\Rightarrow \angle BAX = \angle YZA = \alpha$ (по св-ву паралл. прямых)
- 3) Рассмотрим $\triangle YAZ$
 $\angle BAC$ - внешний угол $\triangle YAZ$ (по опр.) $\Rightarrow \angle BAC = \angle YZA + \angle ZYA$ (по св-ву внешнего угла)
 $2\alpha = \alpha + \angle ZYA \Rightarrow \angle ZYA = \alpha \Rightarrow \triangle YAZ$ - р/б (по двум углам по окружности р/б (теор.)) \Rightarrow

$\Rightarrow YA = ZA = 6$
 (по опр. р/б треуго.)

4) Рассмотрим $\triangle ABC$ и секущую YM : По Г. Менелая

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

5) Г.М-середина BC (по ус.) $\Rightarrow BM = MC$ (по опр. середины отрезка)

$$6) \text{ и } \text{н. } 3 \Rightarrow 5 \quad \frac{BM}{BM} \cdot \frac{CA + AY}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$1 \cdot \frac{18 + 6}{6} \cdot \frac{6}{ZB} = 1$$

$$ZB = 24$$

7) Рассмотрим $\triangle YZA$: по Г. косинусов

$$YA^2 = YZ^2 + AZ^2 - 2 \cdot YZ \cdot AZ \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{YZ^2 + AZ^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot AZ} = \frac{8^2 + 6^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч б) раскл. $\triangle ABC$: по ф. косинусов

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha$$

8.1) ~~AC~~ $AB^2 = (AP+PB)^2 = (6+24)^2 = 30^2 = 900$

8.2) $AB = 30$

8.3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

8.4) ЧЗ и. 8.1 ÷ 8.3

$$BC^2 = 18^2 + 900 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 324 + 900 + 120 = 1344 \rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{1344} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{21} = 12\sqrt{21}$$

Ответ: $12\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x^2 + 5y} \cdot \sqrt{x} \end{cases}$$

1) 2) 3)

~~Handwritten work for problem 1, including domain analysis and algebraic manipulations. The work is heavily crossed out with large scribbles.~~

2)

Рассм. №1

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \quad - \text{симметрично} \Rightarrow \begin{cases} x=y & \text{возможное решение} \\ x, y > 0 \end{cases}$$

~~Handwritten work for problem 2, including domain analysis and algebraic manipulations. The work is heavily crossed out with large scribbles.~~

3)

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \end{cases} \quad (1) \quad (4)$$

3.1)

Рассм. №1 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

3.1.1) Замена

$$t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \quad | \uparrow \text{ } ^2$$

$$t^2 = x+1 - 2\sqrt{-x^2+6x-x+6} + 6-x = 7 - 2\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$t^2 - 7 = -2\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$2\sqrt{-x^2+5x+6} = -t^2 + 7$$

$$t+5 = -t^2 + 7$$

$$t^2 + t + 5 - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1+8 = 9 > 0 \Rightarrow \text{два действительных}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

3.1.2) Обратная замена

Замена

Если $t=1$, то $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$
 $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{6-x} \quad | \uparrow \text{ } ^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 $x+y \in [4, 2\sqrt{6-x} + 6-x]$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x} \quad | :2$$

$$x-3 = \sqrt{6-x} \quad | \wedge^2$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-6x+9 = 6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-5x+3=0 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$x^2-5x+3=0$$

$$D = 25-12=13 > 0 \rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

Оценим $3 < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4$ / +5

$$8 < 5 + \sqrt{13} < 9 \quad | :2$$

$$4 < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4,5$$

а) $-4 < -\sqrt{13} < -3$ / +5

$$1 < 5 - \sqrt{13} < 2 \quad | :2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 1$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$

$$\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x} \quad | \wedge^2$$

$$x+1 + 4\sqrt{x+1} + 4 = 6-x$$

$$4\sqrt{x+1} = -2x+1 \quad | \wedge^2$$

$$1-2x+1 \geq 0$$

$$16(x+1) \leq 1-4x+4x^2$$

$$| 2x \leq 1$$

$$16x+16-1+4x-4x^2 \geq 0$$

$$| x \leq \frac{1}{2}$$

$$-4x^2 + 20x + 15 \geq 0$$

$$D = 400 + 240 = 640 > 0 \rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{640}}{-8} = \frac{-20 \pm 8\sqrt{10}}{-8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

Сравним

а) $\frac{5+2\sqrt{10}}{2} > \frac{1}{2}$ / $\cdot 2$

$$5+2\sqrt{10} > 1$$

$$2\sqrt{10} > 4-4$$

б) $\frac{5-2\sqrt{10}}{2} < \frac{1}{2}$ / $\cdot 2$

$$5-2\sqrt{10} < 1$$

$$-2\sqrt{10} < -4$$

$$4 < 2\sqrt{10} \quad | :2$$

$$2 < \sqrt{10} \quad | \wedge^2$$

$$4 < 10$$

$$\begin{array}{r} \frac{13}{15} \\ + \frac{100}{16} \\ \hline \frac{246}{16} \end{array}$$

3.2) Вспомогательная

$$\begin{cases} x=9 \\ y = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Сравним

а) $\frac{5-2\sqrt{10}}{2} < 0$ / $\cdot 2$

$$5-2\sqrt{10} < 0$$

$$5 < 2\sqrt{10} \quad | \wedge^2$$

$$25 < 4 \cdot 10$$

$$25 < 40$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а)

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2} > 0/2$$

$$5+\sqrt{13} > 0$$

$$\sqrt{13} > -5$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right)$

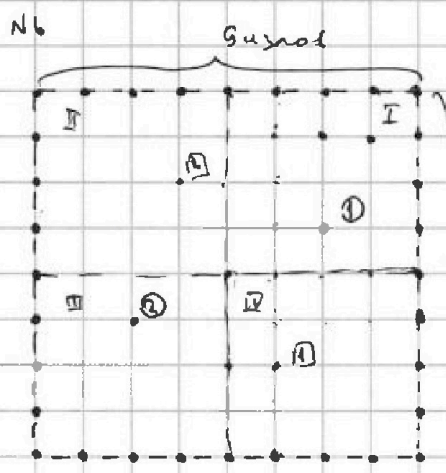


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$9 \times 9 = 81$ узлов

1) A-выбор 2 узла из 81
 $N(A) = C_{81}^2 = \frac{81!}{2! \cdot 79!} = \frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40$

2) Выберем два произвольных узла ~~каждые~~ \textcircled{I} и \textcircled{II} .
 При повороте этих двух узлов соответствуют ~~четыре~~ 31 поворот "распаки"

2) Выберем два произвольных узла, лежащих в соседних или одной стороне (\textcircled{I} и \textcircled{II}). При повороте получим, что ~~каждый~~ этим двум узлам соответствуют 3 поворота "распаки". \Rightarrow Двум узлам из одной ~~или~~ соседних вершин соответствует по 4 "распаки".

3) Выберем два узла из противоположных вершин (\textcircled{I} и \textcircled{IX}). При повороте получим, что ~~каждый~~ двум таким узлам соответствуют 2 "распаки".

4) B-выбор 2 узла из ~~всех узлов~~ I, II и III вершин: ~~с III вершины~~ $9 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 36 + 20 = 56$

B-выбор 1 узла из I вершин 4, узла из соседней вершин.
 $N(B) = 25 \cdot 20 = 250$

5) C-выбор 2 узла из противоположных вершин:

$N(C) = 24 \cdot 24$

6) $N = N(A) + N(B) + N(C) = 250 + 24^2 = 250 + 576 = 826$ способов

Ответ: 826 способов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

max(4y + 8x) - ?
 $|x - 3y| \leq 3$ / P2
 $|3x - y| \leq 1$ / P2

(y + 2x) - ? Черновик

$x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 9$

$9x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 81$

$10x^2 - 12xy + 10y^2 \leq 10$ / :2

$5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 5$

$D = 36y^2 - 20y^2 = 16y^2 \geq 0 \Rightarrow 2$ действительных

$x_{1,2} = \frac{6y \pm 4y}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{2}{5}y \end{cases}$

$5|x - y| / (x - 3y) \leq 5$
 $|ky| / (5xy) \leq 5$

$(x - 2y)^2 - 1 \leq 9 - (3xy)^2$
 $(x - 2y - 1)(x - 2y + 1) \leq 9 - (3xy)^2$

$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 3xy = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y + 3 \\ 9y + 9 - y = 1 \\ x = 3y + 3 \\ 8y = -8 \\ y = -1 \end{cases}$

$f(x) = 4y + 8x$

$4y + 8x = 0$

$y =$
 $\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \\ 3x - y \leq 1 \\ 3xy \geq -1 \end{cases}$

$xy \geq \frac{1}{3}x - 1$ ②
 $y \leq \frac{1}{3}x + 1$
 $y \geq 3x - 1$ ③
 $y \leq 3x + 1$

① $x - 3y - 3 = 0$

$3y = x - 3$
 $y = \frac{1}{3}x - 1$

$x - 3y + 3 = 0$
 $3y = x + 3$
 $y = \frac{1}{3}x + 1$

$3x - y - 1 = 0$
 $y = 3x - 1$

④ $3x - y + 1 = 0$
 $y = 3x + 1$

$\begin{array}{r|l} x+3 & 6 \\ y & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ \hline x & 3 \\ y & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 6 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} x & 0 \\ y & -1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -1 & -1 \\ \hline -2 & -2 \end{array}$

$4x + 2y = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \cdot 3$

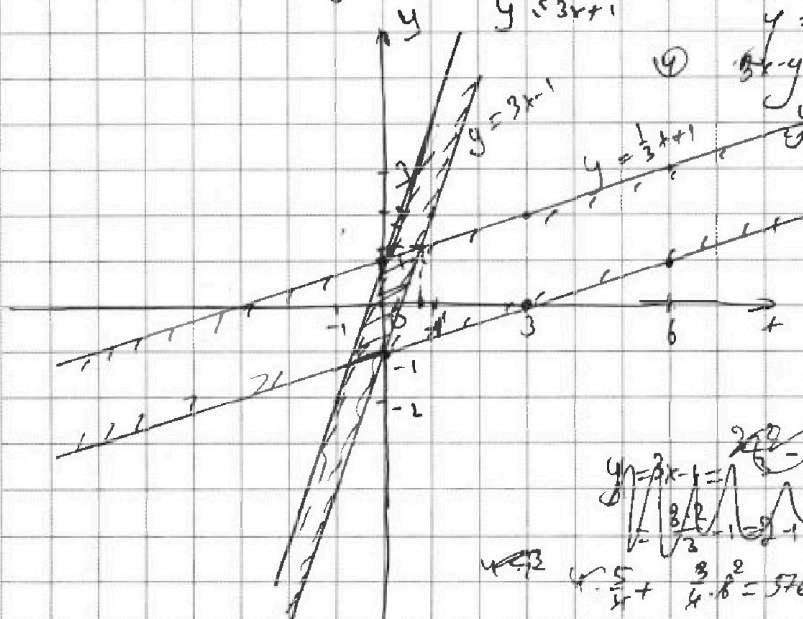
$9x - 3 = x + 3$

$8x = 6$

$x = \frac{3}{4}$

$y = \frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

$y = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 1} + 1 = \frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$



$y = 3x - 1 = 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$
 $x = \frac{3}{4}$
 $4 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{5}{4} = 3 + \frac{10}{4} = 3 + 2.5 = 5.5 = \frac{11}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \\ \max(4y+8x) - ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1) 4x-4y \leq 4 \\ x-y \leq 1 \quad | \cdot 8 \\ 8x-8y \leq 8 \rightarrow P1$$

$$2) 4x-4y \geq -4 \\ x-y \geq -1 \\ y \leq x+1 \quad | \cdot 4 \\ 4y \leq 4x+4 \rightarrow P2$$

$$4y+8x \leq 8+8y \\ |x-3y| \leq 3 \quad | \cdot 4 \\ |3x-y| \leq 1 \quad | \cdot 8$$

$$4y+8x = 4y+8x+8y+8x \\ 4y+8x = 4y+8x+8y+8x$$

$$x^2-6xy+9y^2 \leq 9 \\ 8x^2-8y^2 \leq -8 \\ x^2-y^2 \leq -1$$

В) $8x$ максимален и $4y$ максимален, но $4y$ максимален \Rightarrow

$$\Rightarrow 12y+8 = 12x+4 \quad | :4 \\ 3y+2 = 3x+1 \\ 3y = 3x-1 \\ y = x - \frac{1}{3} \\ x = y + \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow (A) \Rightarrow x - 3(x - \frac{1}{3}) \geq -3 \\ x - 3x + 1 \geq -3 \\ -2x \geq -4 \quad | :(-2) \\ x \leq 2 \quad | \cdot 8 \\ 8x \leq 16$$

$$f(x, y) = 2 - 2x + 2y \\ 8x \leq 16 \quad | y = 2 - 2x + 2 \\ f(x, 1) \Rightarrow 8 + 8y = 16 \\ 8y = 8 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

3) $2y \leq 1$ и $4x \leq 2$

$$4y+8x \leq 8+8y+4x+4x \\ 4y+8x \leq 8+8y+4x+4x \\ 4y+8x \leq 8y+4x+12 \\ -4y+4x \leq 12 \\ x-y \leq 3$$

$$4y+8x \leq 4x+4+8+8y \\ 4y+8x \leq 8y+4x+12 \\ -4y+4x \leq 12 \\ x-y \leq 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

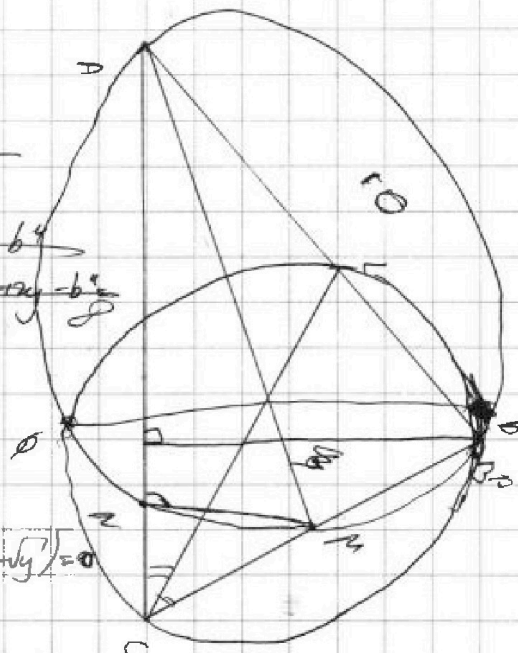
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - 4y^2 = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

1) Замена $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{6y}$

$$\begin{aligned} a^2 &= x+1 & b^2 &= 6y \\ 5x &= 5a^2 - 5 & 3b - 12y &= 6y \\ & & 3b - 12y &= b^2 \end{aligned}$$



~~Решение~~

1) Решим (*)

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 - \sqrt{x} + \sqrt{6y} = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) - (\sqrt{x} - \sqrt{6y}) = 0$$

1) Замена

(osao)

~~Решение~~

$$t^2 = x - 2\sqrt{6y} + y$$

$$x + y = t^2 + 2\sqrt{6y} + y$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = t^4 + 4t^2\sqrt{6y} + 4xy$$

$$x^2 + y^2 = t^4 + 4t^2\sqrt{6y} + 2xy$$

$$-y^2 + 5x + 6 = 0$$

$$y^2 = 5x + 6 = 0$$

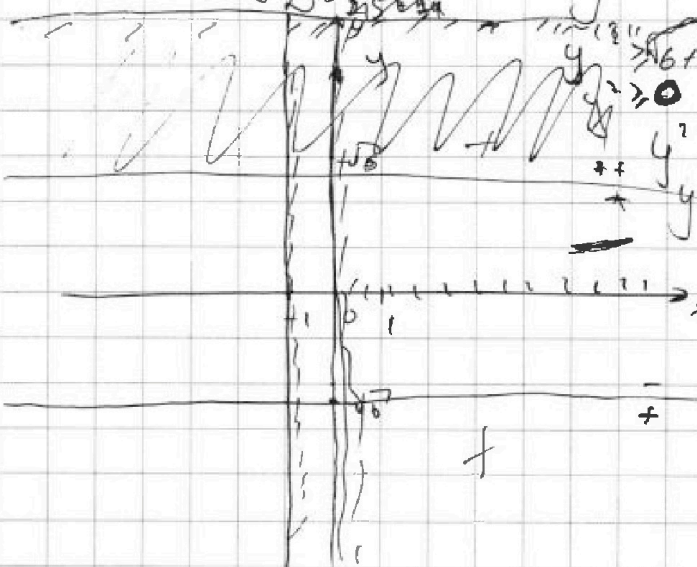
$$x + 1 \geq 0$$

$$6 - y^2 \geq 0$$

~~Решение~~

$$2 = \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{6+5\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{5}$$



$$\begin{aligned} 6 + 5x &\geq 6 \\ x &\geq 0 \\ y^2 &\geq 6 \\ y^2 - 6 &\geq 0 \\ (y - \sqrt{6})(y + \sqrt{6}) &\geq 6 + 5x \geq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 + 5x &\geq 6 \\ x &\geq 0 \\ 5x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$1 + 3 + 4$

$3 + 5 + 5 = 13$

$5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 6 =$
 $= 7 + 10 + 8 + 6 =$
 $= 7 + 14 =$
 $= 21$

$3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 =$
 $= 7 + 10 + 8 =$
 $= 15 + 10 = 25$

$3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 =$
 $= 19$

18
 24
 96
 48

576
 $+ 250$
 8262

18
 24
 96
 48

$19/31$

18
 24
 96
 48

18
 24
 96
 48

Дано:
 $\triangle ABC$
 AX - биссектриса $\triangle ABC$
 $ZM \parallel AX$
 r. M. середина BC
 $ZM \cap AB = Z$
 $ZM \cap AC = Y$
 $AC = 18$
 $AZ = 6$
 $YZ = 8$
 BC = ?

Решение:

6
 $\times 18$
 108
 $+ 144$
 252
 324
 $+ 900$
 1224

1224
 $+ 120$
 1344
 1344
 336
 336
 112

1344
 336
 112

$69/2$
 2
 162
 336
 112

$2280 = 20$

$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YB} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

1. $\frac{18+6}{6} \cdot \frac{8}{2B} = 1$
 $2B = 24$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $8^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$
 $8 = 12 \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$
 $\frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$