МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

?

C_1 C_5

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7:20$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть (b_n) – эта самая геом. прогрессия.

$$\begin{cases} b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ b_{12} = 2-x \\ b_{13} = \sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \qquad x = ?$$

$\begin{cases} x \neq -\frac{2}{3} \\ x \leq 2 \end{cases}$ – ОДЗ

$b_{13} = b_{10} \cdot q^3$, где q – знаменатель прогрессии

(если $x = -\frac{34}{25}$, то $b_{10} = b_{13} = 0$, т.е. посл. стационарная, но $b_n \neq 0$)

$$q^3 = \frac{b_{13}}{b_{10}} = \sqrt{\frac{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}{(25x+34)(3x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{3x+2}}$$

$b_{12} = b_{10} \cdot q^2$ – или ~~подставим~~ „накладываем" на место x.

$$2-x = \sqrt{\frac{(25x+34)\cancel{(3x+2)}}{\cancel{3x+2}}} = \sqrt{25x+34}$$

$$\begin{cases} 4-4x+x^2 = 25x+34 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-29x-30=0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-30)=0 \text{ по т. Виета} \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-1}$$

Проверим: $b_{10} = \sqrt{9 \cdot (-1)}$ – это число некорректно $\Rightarrow$ такого x вовсе не существует.

Ответ: такого не существует

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(Зд. 2)

1) $t=\frac{5}{2}$:

$\sqrt{(x+6)(3-x)}=\frac{5}{2}$

$4(-x^2-3x+18)=25$

$-4x^2-12x+72-25=0$ $\quad -4x^2-12x+47=0$

$4x^2+12x-47=0$

47^2, $\times 4$: $188 + 36 = 224$

$D_{/4}=36+47\cdot 4=36+188=224$ $\quad 14<\sqrt{224}<15$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{224}}{4}$ — входят в $[-6;3]$.

Проверка: $\sqrt{(x+6)(3-x)}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2\sqrt{(x+6)(3-x)}-x-7=-2$.

При $x=\frac{-6-\sqrt{224}}{4}$ $\sqrt{x+6}<\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}<0\Rightarrow$

(ведь они равны в $x=-1{,}5$) $\Rightarrow$ (*) верно.

При $x=\frac{-6+\sqrt{224}}{4}$ $\sqrt{x+6}>\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*) не выполнено.

Поэтому $x=\frac{-6-\sqrt{224}}{4}=\frac{-3-\sqrt{23}}{2}$

2) $t=4$:

$\sqrt{-x^2-3x+18}=4$

$-x^2-3x+18=16$

$-x^2-3x+2=0$

$x^2+3x-2=0$

$D=9+8=17\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\in[-6;3]$.

При $t=4$ $\quad 2\sqrt{(x+6)(3-x)}-7=8-7=1>0$

При $x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ $\sqrt{x+6}<\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}<0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*) не выполнено.

При $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}>0$ и (*) выполнено.

Поэтому $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ (понятно, что мы проверяем только знак, ведь модули этих чисел уже равны).

Ответ: $(x;y;z)=\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};18;0\right)$ и $\left(\frac{-3-\sqrt{23}}{2};18;0\right)$.

Задача №2 (стр. 1)

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2): $-/-$; $-/+$; $+/+$ — раскрытие модулей:

y: -2, 18

1) $y \in (-\infty; -2]$: $|y+2| = -y-2$
$|y-18| = 18-y$

$-y-2+36-2y = \sqrt{400-z^2}$

Здесь заметим, что $400 - z^2 \le 400 \Rightarrow \sqrt{400-z^2} \le 20$

$\cancel{-3y \ge}$ $-3y+34 \le 20$ — левое мин. возможное знач. (равенство в $z=0$)

$-3y \le -14$ $\quad y \ge \frac{14}{3} > -2 \Rightarrow$ на (≤ -2) нет реш. y

2) $y \in [-2; 18]$: $|y+2| = y+2$
$|y-18| = 18-y$

$y+2-2y+36 \le 20$
$-y \le -18$ $\quad y \ge 18 \to$ реш. $y = 18$

3) $y \in [18; +\infty)$: $|y+2| = y+2$ и $|y-18| = y-18$

$y+2+2y-36 \le 20$
$3y \le 54$ $\quad y \le 18$ — ед. реш. $y = 18$

Значит y может быть равен только 18, иначе выражение слева больше 20, а справа всегда ≤ 20.

$\underline{y=18}$:

$\cancel{18}$ $|y+2| + 2|y-18| = |18+2| = 20 = \sqrt{400-z^2} \Rightarrow$
$\underline{z=0}$ (см. выше).

(1): $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-(x+6)(x-3)} = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{3-x}$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} \cancel{+7} = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} - 7$ $\quad (*)$

$\cancel{x}+6+3\cancel{-x} - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + \cancel{49}\ 40$

~~[illegible]~~ — после сделаем проверку!

Пусть $t = \sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$

Тогда: $-2t = 4t^2 - 28t + 40$

$4t^2 - 26t + 40 = 0$

$2t^2 - 13t + 20 = 0$ $\quad D = 169 - 20\cdot 8 = \underline{9} \Rightarrow t = \frac{13 \pm 3}{4} = \underline{\frac{5}{2}; 4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$! реш., $p = ?$

$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x\cos 2x - \sin x \sin 2x =$

$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x\cos x = \cos x(2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 1) =$

$= \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$

Пусть $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$

$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$

$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + (3p+12)t + 10 = 0$

$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$

$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$

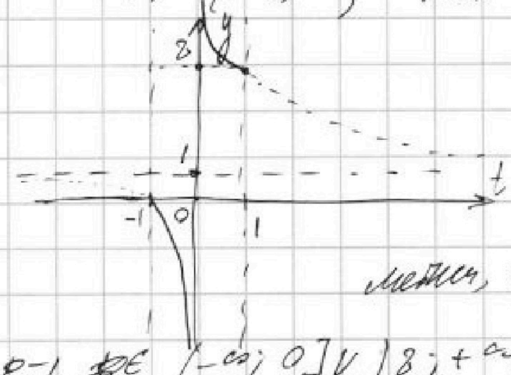
$pt^3 + (t+1)^3 - t^3 = 0$

$t^3(p-1) + (t+1)^3 = 0$

$p = -\frac{(t+1)^3}{t^3} + 1$ (заметим, что $t = 0$ не явл. решением ур-ия $\forall p$: $0 - 6 + 0 + 10 = 4 \neq 0$)

$p = (1 + \frac{1}{t})^3 + 1$

$f(t) = (1 + \frac{1}{t})^3$, $f'(t) = 3(1+\frac{1}{t})^2 \cdot (-\frac{1}{t^2}) \Rightarrow f(t) \downarrow$ на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.



Таким образом, на отрезках $[-1; 0)$ и $(0; 1]$ функция $f(t)$ принимает значения $M = [-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$, а также заметим, что если $(p-1) \in M$, то $\exists!$ решение $f(t) = p$, т.к. $f(t)$ биективна

$p - 1 \in [-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$, т.е. $p \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

Теперь решим:

$(1 + \frac{1}{t})^3 = p - 1$

$1 + \frac{1}{t} = \sqrt[3]{p-1}$

$\frac{1}{t} = \sqrt[3]{p-1} - 1 \neq 0$, т.к. $p \neq 2$

$t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} - 1}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} - 1}$

$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} - 1}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

~~$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}-1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $p \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$, при этих p

$x = \cancel{\pi} \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}-1}\right) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

при $p \in (1; 9)$ $x \in \varnothing$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

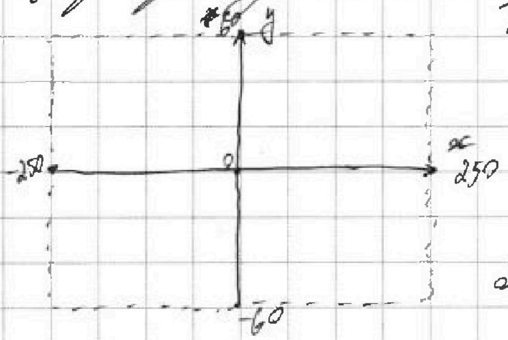
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Введём следующую систему координат: поместим её ~~центр~~ начало в центр прямоугольника:



Тогда ~~отмеченными~~ закрашенными квадратами будем считать отмеченные точки с полу-целыми координатами (т.е. вида $\frac{2n+1}{2}$ $n+\frac{1}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$) в пределах от -250 до 250 по X и от -60 до 60 по Y.

Соответственно, отмеченная точка обозначает центр закрашенного квадрата.

Тогда условие задачи сводится к следующему вопросу:

Сколько существует способов выбрать 8 точек так, чтобы сумма их координат хотя бы по 1 ~~координате~~ оси давала 0, причём она делится на пары, внутри которой хотя бы по одной оси ~~равн~~ значения равны по модулю (равносильно симметричности).

$$\left[\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{8} x_i = 0 & (1) \\ \sum_{j=1}^{8} y_j = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$\forall i\in\{1,2,\dots,8\}\ \exists$ „пара" $j\neq i$

Условие симметричности упрощает нам поиск количества решений для ~~каждого~~ ур-ий совокупности по-отдельности: к примеру, для (1) это кол-во способов выбрать 4 ~~коор~~ разл. координаты от $\frac{1}{2}$ до $\frac{499}{2}$ (положительные коорд.), ведь оставшиеся 4 по модулю такие же с минусом.

(1): C_{250}^{4}

(2) C_{60}^{4} — аналогично с (1).

центр. симм. — выбираем 4 точки в I и II четв. и отражаем их относительно $(0;0)$ — $C^{4}_{500\cdot 60} = C^{4}_{30000}$

Задача №6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{cases} a < b \\ (b-a) \not\vdots\, 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \in \mathbb{P} \\ a^2 + b = 1000 \end{cases} \rightarrow b = 1000 - a^2$$

$b - a = 1000 - a^2 - a \equiv 1 - a^2 - a \pmod 3$

1) Если $a \overset{3}{\equiv} 0$, то $1 - a^2 - a \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow$ не $\vdots$

2) Если $a \overset{3}{\equiv} 1$, то $1 - 1 - 1 \overset{3}{\equiv} -1 \Rightarrow$ не $\vdots$

3) Если $a \overset{3}{\equiv} 2$, то $1 - a^2 - a \equiv 1 - 1 - 2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$ не $\vdots$

Поэтому в любом случае $(b-a) \not\vdots\, 3$, т.е. это условие выполнено.

В силу $a < b$: $a - c < b - c$

$(a-c)(b-c) = p^2 = p \cdot p = (-p)\cdot(-p) = \overset{①}{1 \cdot p^2} = \overset{②}{(-1)\cdot(-p^2)}$ — все возможн. на 2 множ.

эти 2 случая невозможны из-за $a - c < b - c$

① $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$ ~~$a = c+1$~~ ~~$c = 1 + a$~~ ~~$b = c =$~~

$\begin{cases} c = a - 1 \\ b - a + 1 = p^2 \end{cases}$ ~~$\begin{cases} c = a - 1 \\ 1000 - a^2 - a = p^2 - 1 \end{cases}$~~

$\begin{cases} c = a - 1 \\ b - a = p^2 - 1 \end{cases}$ — вспомним, что $(b-a) \not\vdots\, 3$, но если $p \neq 3$ (это простое), то

$p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, ведь $1^2 \overset{3}{\equiv} 1$ и $2^2 \equiv 4 \overset{3}{\equiv} 1 \pmod 3$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow p = 3$:

$\begin{cases} c = a - 1 \\ b - a = 8 \end{cases} \longrightarrow 1000 - a^2 - a = 8$

$$\begin{array}{r} 992 \\ \times\quad 4 \\ \hline 3968 \end{array}$$

$a^2 + a - 992 = 0$

$D = 1 + 992 \cdot 4 = 3969 = 63^2 \Rightarrow a = \dfrac{-1 \pm 63}{2} = -32; 31$

$b = 8 + a = 8 - 32; 8 + 31$

$-24; 39 \longrightarrow a$ действ. $< b$

$c = a - 1 = -33; 30$

Итак, 2 решения: $(a; b; c) = (-32; -24; -33)$ и $(31; 39; 30)$.

Теперь же рассмотрим 2ой случай:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

② $\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \Rightarrow c=b+1 \end{cases}$

$a-b-1=-p^2 \Rightarrow a-b=1-p^2$

$b-a=p^2-1$ – те же самые рассуждения, откуда $p=3$ (см. п. ①).

$\begin{cases} a-c=-9 \\ c=b+1 \end{cases}$

$a-b-1=-9$ $\quad a-b=-8$

$b-a=8$ – мы уже решили это ур-ие. ранее в п. ①, просто в ② у c будут другие значения. $c=b+1=-23;40$

Ещё 2 решения: $(-32;-24;-23)$ и $(31;39;40)$.

Больше возможных случаев нет $\Rightarrow$ все эти решения – единственные возможные.

Ответ: $(a;b;c)=(-32;-24;-33)$, $(31;39;30)$, $(-32;-24;-23)$ и $(31;39;40)$.

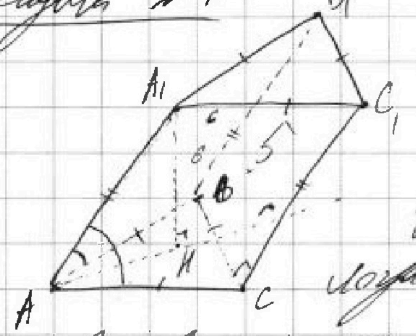
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №7



Пусть без ограничения общности

$S_{AA_1C_1C} = 6 = S_{AA_1B_1B}$, а $S_{BB_1C_1C} = 5$.

Поскольку боковые рёбра равны у параллелограммов, $AA_1 = BB_1 = CC_1$

~~Sa~~ $S_{AA_1C_1C} = \cancel{AC} \cdot \cancel{AA_1} \cdot \sin\angle A_1AC = S_{AA_1B_1B} = \cancel{AA_1} \cdot \cancel{AB} \cdot \sin\angle A_1AB \Rightarrow$

$AB = AC$ по $\triangle ABC$ р/ст.

$\Rightarrow$ ~~$AA_1 AC$~~ $\sin\angle A_1AC = \sin\angle A_1AB$.

~~кратко Докажем, что $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, а не $180° - \angle A_1AB$:~~
~~Пусть есть трёхгранный угол между прямыми a, b и c:~~

~~Если сделать проекцию это дела на плоскость (случайную), то b и "развёрнутые" углы будут~~

1) ~~А~~ Если $\angle A_1AC = \angle A_1AB$:
Тогда получим, ~~что~~ ~~данная~~ ~~конструкция~~ что ~~A_1~~ если $A_1H \perp$ пл. ABC,
то $H \in m$, где m — ~~высота~~ биссектриса из вершины A в $\triangle ABC$. высота (также медиана и ~~биссектриса~~), ведь конструкция получилась симметрична относительно ~~этой~~ ~~оси~~ пл. AHA_1.

Из этого следует, что $\angle C_1CB = 90°$ (как и ост. углы в BB_1C_1C) $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{CBB_1C_1} = 5 = BC \cdot CC_1$

~~В~~ $S_{ABC} = \cancel{2}\,4$ по условию, ~~а~~ по формуле S-и прав. $\triangle$-а:

$4 = \dfrac{BC^2\sqrt3}{4} \Rightarrow BC = \dfrac{4}{\sqrt[4]{3}} = AC = AB$.

$CC_1 = \dfrac{5\sqrt[4]{3}}{4} = AA_1 = BB_1$

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot \cancel{B}\, AC \cdot \sin\angle A_1AC = 6$, т.е. $\dfrac{5\sqrt[4]{3}}{4} \cdot \dfrac{4}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sin\angle A_1AC = 6$

~~Поэтому~~ $\angle A_1AC = 180° - \angle A_1AB$:

$\sin\angle A_1AC = \dfrac{6}{5}$ невозможно

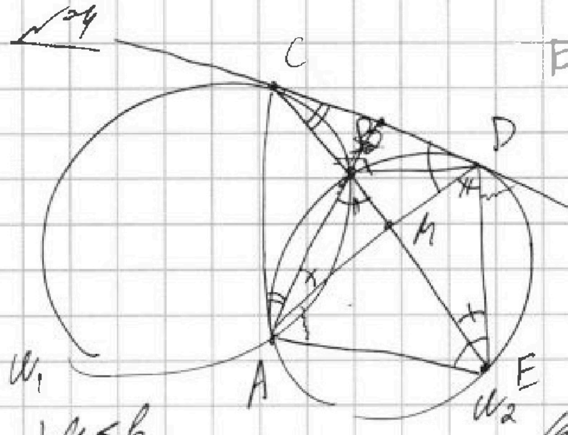
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4



~~ED : DC = ?~~

$CM : ME = 7 : 20$

$CD^2 = CB \cdot CE$

$BM \cdot ME = AM \cdot MD$

~~$S_{\triangle CMA}$~~ $= CM \cdot AM \cdot \sin$

$S_{\triangle EMA}$

$\begin{cases} a < b \\ (b-a) \vdots 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2, \ p \in \mathbb{R} \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$

$(a;b;c) = ?$

$b = 1000 - a^2$

$a < 1000 - a^2$

$a^2 + a - 1000 < 0$

$D = 1 + 4000 = \underline{4001}$

$(1000 - a - a^2) \vdots 3$

$a \overset{3}{\equiv} 1$

$a \equiv 0$

$a \equiv 2$

$1000 - a(a+1) \vdots 3$

$1 - 2 - 1 = -2$

$(a-c)(1000 - a^2 - c) = p^2$

$a - c < b - c$

$p^2 = p \cdot p = (-p)(-p)$

$= 1 \cdot p = (-p) \cdot (-1)$

1) $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 + c \\ 1000 - a^2 - c = p^2 \end{cases}$

$1000 - 1 - 2c + c^2 - c = p^2$

$c^2 - 3c + 999 = p^2$

$1000 - a^2 - a = 0$

$a^2 + a - 1000 = 0$

$D = 1 + 4000 = \underline{4001}$

$60^2 = 3600$

$63^2 =$

$500 + 1ac$

$\begin{array}{r} 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array}$

не успел

$b_{10} = c_1$ $\quad q_2 = q_1^2$

$b_{12} = b_{10} \cdot q_1^2 = c_1 \cdot q_2 = c_2$ $\quad q_2 > 0$

$b_{13} = c_4$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5$

$c_3 = c_1 \cdot c_5 = \dfrac{25x + 34}{3x + 2}$

$q^2 = \dfrac{c_3}{c_1} = \dfrac{\frac{25x+34}{3x+2}}{(25x+34)(3x+2)} = \dfrac{1}{3x^2+2}$

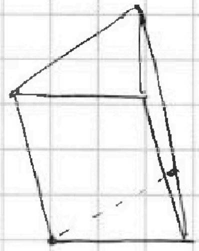
$c_1 \cdot q = c_2 \Rightarrow$

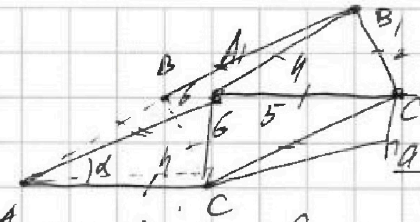
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются** отдельно. Порча QR-кода недопустима!





$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4$

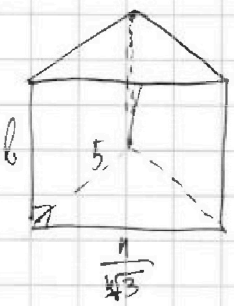
$a^2\sqrt{3} = 16$

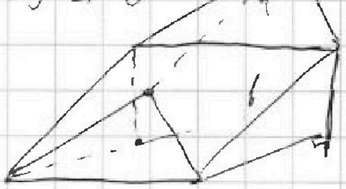
$a = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}}$

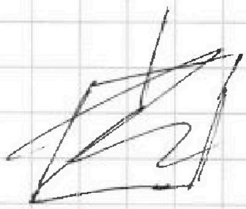
$V = S_\triangle \cdot h = 4h, \quad h = ?$

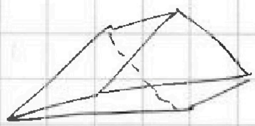
$S_{AA_1C_1C} = 6 = AA_1 \cdot AC \cdot \sin\alpha$

$\frac{4}{\sqrt[4]{3}} \cdot b = 5 \Rightarrow b = \frac{5\sqrt[4]{3}}{4}$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

③ $y+2+2y+36 \le 20$

$3y \le 54$

$y \le \frac{54}{3} = 18$ $y=18$ – ед. реш.

$2 \cdot 112 = 4 \cdot 28$

$20 = \sqrt{100-z^2} \Rightarrow$

$18-3x-x^2$

$D = 9+4\cdot18 = 9+40+32 = 40+41 = 81$.

$x = \frac{3 \pm 9}{-2} = 3; -6$

$x+6+19+14\sqrt{x+6} = 3-x+4(x+6)(3-x)+4\sqrt{x+6}(3-x)$.

$x \in [-6; 3]$.

$\sqrt{x+6} \le 3$.

$\sqrt{3-x} \le 3$

$a-b+7 = 2ab$

$18-3x-x^2$

$x_{верш} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

$18+3\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{4} = 18+\frac{9}{2}-\frac{9}{4} =$

$18+\frac{9}{4} = \frac{18\cdot4+9}{4} = \frac{81}{4}$

$\max(\sqrt{18-3x-x^2}) = \frac{9}{2}$

$(\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x})^2 = (2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}-7)^2$

$x+6+3-x-2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4(x+6)(3-x)-28\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}+49$

$t = \sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$

$-2t = 4t^2-28t+40$ $4t^2-26t+40=0$

t

$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$

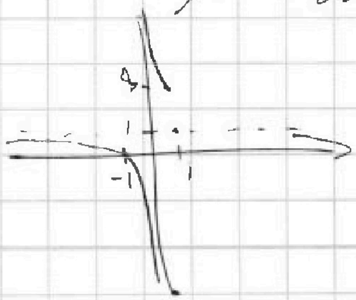
$\cos 3x =$

$-2\sin^2 x = -2(1-\cos^2 x) = -2+2\cos^2 x$

$f(t) = pt^3+3t^2+3t+1$

$f'(t) = 3pt^2+6t+3$

pt^2+t+1



$1+\frac{1}{t} = \sqrt[3]{p}$

$\frac{1}{t} = \sqrt[3]{p}-1$

$t = \frac{1}{\sqrt[3]{p}-1}$

$N(2)$ 500

$500\cdot120 = S$

$C_5^1 \cdot 3 = 3C_5^1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$b_{12} = 2-x$

$b_{18} = \sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

$\begin{cases} b_{12} = q^2 \cdot b_{10} \\ b_{18} = q^8 \cdot b_{10} \\ b_{18} = q^6 \cdot b_{12} \end{cases}$

$2-x \geq 0$
$x \leq 2$

$\sqrt{b_{10} \cdot b_{18}} = b_{14}$

$b_{10} \cdot b_{18} = \sqrt{\dfrac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}} = \dfrac{25x+34}{3x+2} = (2-x)q^2$

$\dfrac{25x+34 - (3x+2)(2-x)q^2}{3x+2} = 0$

$25x+34 + (x-2)(3x+2)q^2 = \quad q^2(3x^2+2x-6x-4) = q^2(3x^2-4x-4)$

$25x + 34 + 3q^2x^2 - 4q^2x - 4q^2 = 0$

$3q^2x^2 + x(25-4q^2) + 34 - 4q^2 = 0$

$D = (25-4q^2)^2 - 3q^2(34-4q^2) = 625 - 200q^2 + 16q^4 - 102q^2 + 12q^4 = 28q^4 - 302q^2 + 625$

$D/4 = 151^2 - 625 \cdot 28$

151×151: 151, 755, 151, 22801

625×28

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$

$|y+2| + 2|y-12| = \sqrt{400-z^2}$

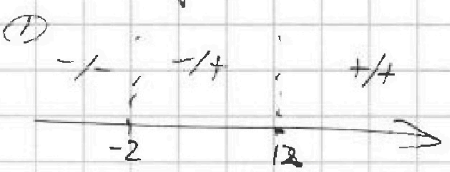
$-x^2 - 3x + (y+z) \qquad D = 9 + 4(y+z) \geq 0$

$x \geq -6 \qquad y+z \leq \frac{9}{4}$

$-x^2 - 3x + (y+z)$

$x_{min} = \frac{3}{-2}$

$|y+2| + 2|y-12| \leq 20$



(1) $-y-2-2y+36 \leq 20$

$-3y \leq -14$

$y \geq \frac{14}{3} \to$ не входит в обл. опр.

(2) $y+2 - 2y + 36 \leq 20$

$-y \leq -18$

$y \geq 18 \to y = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	\	X

СТРАНИЦА 2 ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2) Если $\angle A_1AC = 180^\circ - \angle A_1AB$: