



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за q знаменатель геометрической прогрессии, a_i - i -й член прогрессии. Условие записывается в виде системы

$$\begin{cases} a_2 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \\ a_5 = x+3 \\ a_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 = x+3 \\ \frac{a_9}{a_3} = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}} & (1) \\ \frac{a_{15}}{a_9} = \frac{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}}{x+3} & (2) \end{cases}$$

можно делить одно уравнение на другое, так как члены геометрической прогрессии не равны нулю.

Так как $\frac{a_i}{a_j} = q^{i-j}$, то преобразуем уравнения (1) и (2):

$$(1): q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$(2): q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(25x-9)(x-6)}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

из уравнения (1) $q^8 = \frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2 \cdot (x-6)^2}$ из этого следует, что

$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1$$

$$\left(\frac{x+3}{25x-9}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x+3}{25x-9} = 1$$

$$\text{или} \quad \frac{x+3}{25x-9} = -1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = -25x + 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$D = 19^2 - 4 \cdot 18 = 361 - 72 = 289$$

$$x(x + 31) = 0$$

$$\sqrt{D} = 17$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -31$$

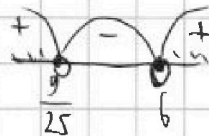
$$x_1 = \frac{19 - 17}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{19 + 17}{2} = 18$$

Теперь рассмотрим необходимость построения выражений бинми
иногда можно использовать (max, min $a_i \neq 0$)

$$(25x - 9)(x - 6) \geq 0$$

$$\text{или} \quad \frac{25x - 9}{(x - 6)^3} \geq 0$$

метод интервалов



Итак $x < \frac{9}{25}$ или $x > 6$, поэтому и найденные ранее значения

или $x = 2$ не подходят.

$$\text{Для } x = 18 \quad a_2 = \sqrt{25 \cdot 18 - 9} \quad \text{Для } x = 18 \quad a_2 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} =$$

$$= \sqrt{9(50 - 1) \cdot 12} = 21 \cdot \sqrt{12} = 42\sqrt{3}, \quad a_5 = 21 \quad \text{и}$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{8\sqrt{3}}$$

с $q = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$, члены не равны $\frac{a_2}{a_6}$

$$\text{Для } x = 0 \quad a_2 = \sqrt{(-9) \cdot (-6)} = 3\sqrt{6}; \quad a_5 = 3; \quad a_{15} = \sqrt{\frac{-9}{(-6)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{6^3}} = \frac{3}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \text{Получим прогрессия с } q = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{6}}}$$

$$a_2 = \frac{a_2}{q^6} \quad \text{Для } x = -31 \quad a_2 = \sqrt{(-31 \cdot 25 - 9) \cdot (-31 - 6)} = \sqrt{784 \cdot 37}$$

$$= \sqrt{784 \cdot 37} = 28 \cdot \sqrt{37}, \quad a_5 = -28; \quad a_{15} = \sqrt{\frac{-784}{(-37)^3}} = \sqrt{\frac{384}{37^3}} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{15} = \sqrt{\frac{384}{37^3}} = \frac{2 \cdot 14}{37} \cdot \sqrt{\frac{1}{37}}$$

Порядок прогрессии $q =$

Так как $\frac{a_9}{a_7} < 0$, то $q^2 < 0$, что невозможно.

Ответ: 0; 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4z-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad (2)$$

Запишем модуль в правой части уравнения (2) в виде суммы

$$\text{1) Если } y \in (-\infty; -4], \text{ то } y+4 = -y-4 \text{ и } -4y+20 = \sqrt{81-z^2}$$

$$-5y+16 = \sqrt{81-z^2}$$

$$\text{так как } 0 \leq \sqrt{81-z^2} \leq 9, \text{ то } 0 \leq -5y+16 \leq 9$$

$$-16 \leq -5y \leq -7$$

$$\frac{16}{5} \geq y \geq \frac{7}{5}$$

Поскольку y не принадлежит $(-\infty; -4]$ и следовательно

этим образом решение уравнения решение не имеет
уравнение и система

$$2) y \in [-4; 5], \text{ то } y+4 = y+4 \text{ и } -4y+20 = \sqrt{81-z^2}$$

$$0 \leq -3y+24 \leq 9$$

$$-24 \leq -3y \leq -15$$

$$8 \geq y \geq 5$$

Единственное решение в этом случае при $y=5$. Тогда

$$|5+4| + 4|5-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$9 = \sqrt{81-z^2}$$

$$z=0$$

$$3) y \in [5; +\infty)$$

$$y+4 + 4y-20 = \sqrt{81-z^2}$$

$$0 \leq 5y-16 \leq 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq 5y - 16 \leq 9$$

$$16 \leq 5y \leq 25$$

$$\frac{16}{5} \leq y \leq 5$$

Решение системы неравенств методом интервалов при $y = 5$. Уже рассмотрели.

Итак, уравнение (2) имеет 1 решение: $y = 5, z = 0$.

Подставим это в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 4 \cdot 0 + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2} + 0$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2-4x+5}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$

Поскольку из ОДЗ $x+5 \geq 0$ и $1-x \geq 0$, то $\sqrt{(1-x)(x+5)} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5}$

$$\sqrt{x+5} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 4$$

~~$$\sqrt{x+5} = \frac{\sqrt{1-x} + 4}{2\sqrt{1-x}}$$~~

Выделим 0 вынесем 6 катете прямоугольного треугольника

~~$$x+5 = \frac{1-x+16-8\sqrt{1-x}}{1+4\sqrt{1-x}+4(1-x)}$$~~

Замени $\sqrt{1-x} = t$ Тогда $1-x = t^2, 5+x = -t^2+6$

$$\sqrt{-t^2+6} - 2t\sqrt{-t^2+6} = t - 4$$

$$\sqrt{-t^2+6} = \frac{t-4}{1-2t}$$

$$\frac{t-4}{1-2t} \geq 0$$

$$\frac{(t-4)^2}{(1-2t)^2} = -t^2+6 \quad (3)$$

Решим уравнение (3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(t-4)^2}{(1-2t)^2} = -t^2 + 6$$

$$\frac{t^2 - 8t + 16}{1 + 4t^2 - 4t} = -t^2 + 6$$

$$\frac{t^2 - 8t + 16}{4t^2 - 4t + 1} + \frac{(t^2 - 6)(4t^2 - 4t + 1)}{4t^2 - 4t + 1} = 0$$

$$\frac{t^2 - 8t + 16 + 4t^4 - 4t^3 + t^2 - 24t^2 + 24t - 6}{4t^2 - 4t + 1} = 0$$

$$\frac{4t^4 - 4t^3 - 18t^2 + 16t + 10}{4t^2 - 4t + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вернёмся от k к p :

$$k \geq 0 \quad k \leq -2$$

$$\sqrt[3]{p-1} \geq 0 \quad \sqrt[3]{p-1} \leq -2$$

$$p-1 \geq 0 \quad p-1 \leq -8$$

$$p \geq 1 \quad p \leq -7$$

$$k=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{p-1} = 0 \Leftrightarrow p=1$$

~~Ответ: если $k \in \mathbb{Z}$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~если $p=1$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

Ответ: если $p=1$, то $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

если $p \in (-\infty; -7] \cup (1; +\infty)$, то $x \in \mathbb{R}$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x\right)^3 + (\cos x - 1)^3 = 0 \quad \text{минимизировать формулу упрощая вычисления}$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x + \cos x - 1\right) \left(\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x\right)^2 - \sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x (\cos x - 1) + (\cos x - 1)^2\right) = 0$$

Возьмем $\sqrt[3]{p-1}$ как зад k .

$$k \cdot \cos x + \cos x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (k \cdot \cos x)^2 - k \cdot \cos x \cdot (\cos x - 1) + (\cos x - 1)^2 = 0$$

Сократим обе части на $\cos x - 1$:

$$1) \cos x (k+1) = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{k+1}$$

решение существует тогда и только тогда, когда $|k+1| \geq 1$, тогда

$$\text{тогда как } |\cos x| \leq 1, \text{ то есть когда } \begin{cases} k+1 \geq 1 \\ k+1 \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{тогда решение } x = \pm \arccos \frac{1}{k+1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) k^2 \cdot \cos^2 x - k \cdot \cos^2 x + k \cdot \cos x + \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x \cdot (k^2 - k + 1) + \cos x \cdot (k - 2) + 1 = 0$$

$$D = (k-2)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^2 - 4k + 4 - 4k^2 + 4k - 4 =$$

$$= -3k^2 \quad \text{Если } k \neq 0, \text{ то } D < 0 \text{ и решений нет.}$$

$$\text{Если } k = 0, \text{ то } D = 0$$

$$\cos x = \frac{2-k}{2k^2 - 2k + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

значит, что для $k=0$ существуют только решения в первом случае. Тогда решение $\cos x = 1$ тогда не надо в 1 случае 2.

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$\cos x = 1$
тогда не надо
в 1 случае 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\left(\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (1-2\sin^2 x) \cdot \cos x - \\ &- 2\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - 4\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - 4(1-\cos^2 x) \cdot \cos x = \\ &= \cos x - 4\cos x + 4\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned} \right)$$

$$p \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x) + 3 \cdot p \cdot \cos x + 12\cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cdot \cos^3 x + 12\cos x = 6 \cdot (2\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cdot \cos^3 x + 12\cos x - 12\cos^2 x + 6 - 10 = 0$$

$$\cancel{4p \cdot \cos^3 x - 4} + 12\cos x(1 - \cos x) = 0$$

$$= 4(\cos^3 x + (p-1)\cos^3 x - 1) - 12\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x + 3\cos x - 3\cos^2 x - 1 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$$\text{Замена переменной: } \cos x = t$$

$$\left(\frac{3p}{4} \cdot t \right)^3 - 1^3 + 3\cos x(1 - \cos x)$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + \cos^3 x - 1 + 3\cos x(1 - \cos x) = 0$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1) - 3\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x - 2\cos x + 1) = 0$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle ABC = \angle EBA$, при этом $\angle C = 90^\circ$ (слепые) \Rightarrow
 $\Rightarrow AB \perp EC$

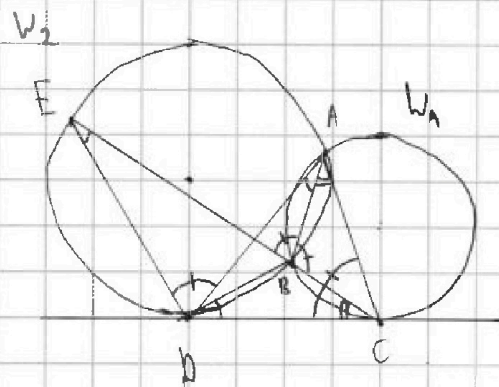
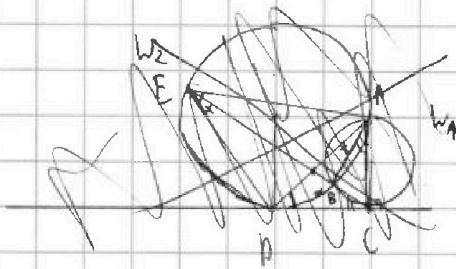
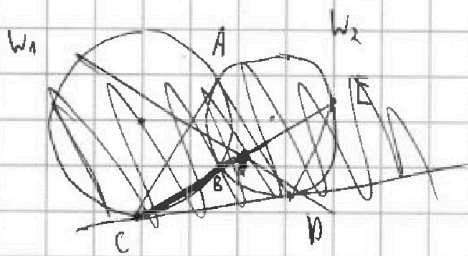


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle P = \angle B \cdot \angle E$$

$$\angle B^2 =$$

$$2\alpha + \beta + \dots = 2\alpha + \beta + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta =$$

$$= 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle BCF = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle ABC = \angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle DEB = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Тогда $\angle PAB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$.

Тогда $\angle BPC = \alpha$ как угол между касательной и хордой,

$\angle BCD = \beta$ (такой же угол между касательной и хордой).

$\angle DEB = \angle BAD$ (вписанные) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle DEB = \alpha$$

$$\triangle EDC: \angle EDC = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle EPA = 180^\circ - \alpha - \beta - \angle APC = 180^\circ - \alpha - \beta - (180^\circ - \alpha - \beta) - \angle APC =$$

$$= \angle APC$$

$\angle EPA = \angle EBA$ (вписанные в W_2).

$\angle APC$ - угол между касательной и хордой $\Rightarrow \angle APC = \angle ABC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

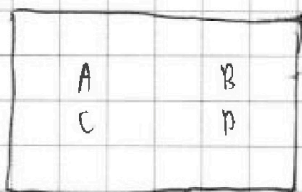
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого из трёх видов симметричных симметричных клеток разбивается на $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$ пар, в каждой паре симметричные друг другу. Поэтому сделать множество с количеством из видов симметричных $\binom{20000}{4}$ ^{способов} _{ман. из 20000 пар} выборов по 4 элемента.

Заметим, что если множество образует симметрию относительно центра и одной из средних линий, то в этом множестве все клетки разбиваются на 2 группы по 4 клетки



или, где каждая группа 2 симметричные ~~каждому~~ ~~если~~ ~~для~~ ~~каждого~~ ~~из~~ ~~них~~ ~~каждый~~ ~~как~~ ~~каждый~~ образует ~~пару~~

образует вершинам прямоугольника с центром в центре прямоугольника. Например, если в множестве записана вершина A, то записана и вершина D, а также вершина B и вершина C (только симметрично друг другу относительно второй средней линии или симметричны A и D) (не обязательно совместно).

Поэтому множество симметрично и относительно второй средней линии.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, если множество симметрично относительно двух средних линий, то симметрично и относительно центра (заключаем вершина $A \Rightarrow$ заключаем B и $C \Rightarrow$ заключаем D) и разбивается на 2 группы по 4 элемента.

Итак, если множество обладает свойством 2 вида симметрии, то обладает и третьим. Третья группа симметричных обладает C_{10000}^2 множествами, так как для каждого такого множества необходимо выбрать 2 из существующих 10000 групп по 4 элемента.

конкретный

При удвоении способов составить множество с одной симметрией, мы утратим множества с тремя симметриями 3 раза, а добавим 1. Поэтому всего способов $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$

$$3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2 = 3 \cdot \frac{20000!}{4! \cdot 16000!} - 2 \cdot \frac{10000!}{2! \cdot 9998!}$$

$\approx 3 \cdot$ Ответ: $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + b = 710$$

$$710 \equiv 2 \pmod{3}$$

Если $a \equiv 1 \pmod{3}$, то $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b-a) : 3$, что невозможно. Поэтому $a \equiv 0 \pmod{3}$ или $a \equiv 2 \pmod{3}$

$(a-c) | (b-c)$ - квадрат простого числа p , тогда $a-c = p$ и

$b-c = p$; или $a-c = -p$ и $b-c = -p$; или $a-c = 1$ и $b-c = p^2$;

или $a-c = p^2$ и $b-c = 1$; или $a-c = -p^2$ и $b-c = -1$; или

$a-c = -1$ и $b-c = -p^2$. Первые 2 случая не реализуются, так

как $a \neq b$ по условию. Рассмотрим остальные 4 случая:

$$1) \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ a-b = 1-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ b-a = p^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a-1 \\ b-a+1 = p^2 \end{cases}$$

Система имеет решение тогда и только тогда, когда $b-a+1$ - ^{квадрат} простое

число

$$2) \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ c = b-1 \end{cases} \Rightarrow b-a < 0, \text{ что противоречит условию } a < b$$

$$3) \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2-1 \\ c = b+1 \end{cases} \Rightarrow \text{Имеется решение тогда и только тогда, когда } b-a+1 \text{ - } \begin{cases} \text{квадрат} \\ \text{простое число} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} a-c = p-1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = -p^2+1 \\ c = b+p^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Для } b-a < 0, \text{ что противоре-} \\ \text{чит условию } a < b \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, условие $(b-c)(b+c) = p^2$ эквивалентно условию

$$b-a+1 = p^2$$

Если $a \equiv 2 \pmod{3}$, то $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $b \equiv 1 \pmod{3}$

$b-a+1 \equiv 1-2+1 = 0 \pmod{3}$ Тогда $p^2 \div 3$, что невозможно

~~Итак, обратимся к случаю $a \equiv 3$. Возможно, наоборот, тогда $p \div 3$.~~

Итак, пусть $p = 3$. Если $a \equiv 0 \pmod{3}$, то $b \equiv 2 \pmod{3}$, $b-a+1 \equiv 2-0+1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$, $p=3$

$$\begin{cases} b-a+1 = 9 \\ a^2+b = 710 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 8+a \\ a^2+a+8 = 710 \quad (1) \end{cases}$$

(1): $a^2+a-702 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809 \quad \sqrt{D} = 53$

$a = \frac{-1-53}{2} = -27$ или $a = \frac{-1+53}{2} = 26$

$b = -27+8 = -19$

$b = 26+8 = 34$

$c = a-1 = -28$ или $c = b+1 = -18$ $c = a-1 = 25$ или $c = b+1 = 35$

Проверим, $(-27 - (-28)) \cdot (-19 - (-28)) = 9 = 3^2$

$(-27 - (-18)) \cdot (-19 - (-18)) = 9 = 3^2$

$(26 - 25) \cdot (34 - 25) = 9 = 3^2$

$(26 - 35) \cdot (34 - 35) = 9 = 3^2$

Все случаи рассмотрены отсюда и на 3 варианта рассмотрены

Ответ: ~~не существует~~ $(-27; -19; -28)$; $(-27; -19; -18)$; $(26; 34; 25)$; $(26; 34; 35)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 31 \\
 \times 125 \\
 \hline
 + 155 \\
 62 \\
 \hline
 + 775 \\
 5 \\
 \hline
 28 \\
 \hline
 38 \\
 36 \\
 \hline
 29
 \end{array}$$

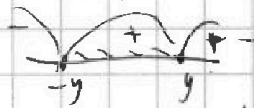
$$x \geq -5$$

$$1 - x - 4z \geq 0$$

$$x + 4z \leq 1$$

$$81 - z^2 \geq 0$$

$$(9-z)(9+z) \geq 0$$



$$z \in [-9; 9]$$

Если $y \in (-\infty; -4]$, то

$$400 \cdot 100 = 40000$$

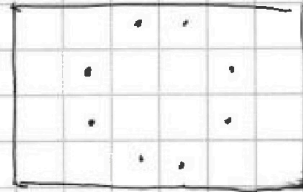
$$20000 \text{ руб}$$

$$\binom{4}{20000} + \binom{4}{20000} + \binom{4}{20000} - 3 \cdot \binom{4}{20000} - 2 \cdot 5000 \cdot 9999$$

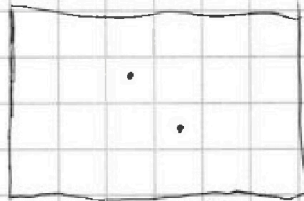
~~20000~~



$$\binom{4}{20000}$$



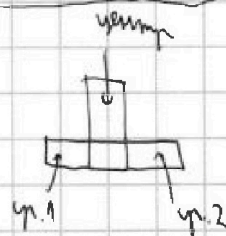
$$\binom{2}{8}$$



$$20000 \cdot 19999$$

$$20000 \cdot 19999$$

$$\begin{array}{r}
 20000 \cdot 19999 \\
 40000 \cdot 39998 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$



$$\frac{10000 \cdot 19999}{2} = 5000 \cdot 9999 - \text{близкие} - 2 \cdot 5000 \cdot 9999$$