



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$, тринадцатый член равен $5 - x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$+ 3(2\cos^2 x - 1) + 6 \cos x = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos 3x + 6\cos^3 x + 6\cos x$$

$$- 3 = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3. \text{ Пусть } u = \cos x, \text{ тогда } u$$

$$f(u) = 4u^3 + 6u^2 + 3u - 3. \text{ Нам нужно решить уравнение } f(u) = p,$$

$$u \in [-1, 1]. \text{ Заметим, что } f'(u) = 12u^2 + 12u + 3. D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 3 = 0,$$

значит т.к. $f'(u)$ — парабола с ветвями вверх, то $f(u)$,

имеет ровно одно чисто реальное, т.е. $f(u)$ строго возрастает.

Тогда $f(u)$ для $u \in [-1, 1]$ больше $f(-1)$ и меньше $f(1)$.

Тогда решение существует для $p \in [f(-1), f(1)]$, т.е. $p \in [-4, 10]$

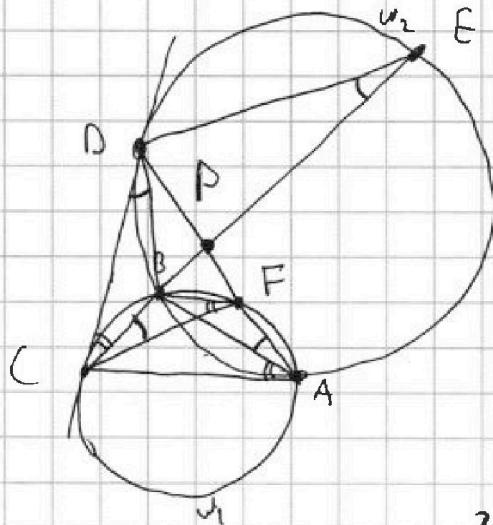


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $P = CE \cap AD$, а F -

второе пересечение AD и w_1 .

Пусть $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle BAC$.

1) По вписанным углам $\angle AFB = \angle BAD = \alpha$

$= \alpha$ равен $\angle BCF$, а так же $\angle BFC$
 $= \angle DAC = \beta$.

2) По вписанным углам $\angle ABD = \angle DEB = \alpha$.

3) По свойству касательной, $\angle DCB = \angle BAC = \beta$, $\angle BDC = \angle BED = \alpha$.

4) т.к. $\angle FCE = \angle CEP$, то $CF \parallel ED$, откуда $\triangle PFC \sim \triangle PDE$

$$\Rightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{PC}{PE} = \frac{\cancel{CF}}{\cancel{DE}} = \frac{3}{10} \quad (\text{по условию } PC : PE = 3 : 10)$$

$(\text{по } \angle FCP = \angle DEP \text{ и } \angle FPC = \angle DPE \text{ так как вертикальные})$

5) $\angle BCF = \angle CDB$ и $\angle BFC = \angle BCD \Rightarrow \triangle CBF \sim \triangle DBC$.

Тогда ~~$\frac{BC}{BF} = \frac{BD}{BC}$~~ \Rightarrow их имена относятся как квадрат котр. нодного, т.е. $\frac{CF^2}{CD^2} = \frac{S_{BCF}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot CF \cdot CB}{\frac{1}{2} \cdot \sin \beta \cdot CD \cdot CB} =$
 $= \frac{\sin \alpha \cdot CF}{\sin \beta \cdot CD} \Leftrightarrow \frac{CF^2}{CD^2} = \frac{\sin \alpha \cdot CF}{\sin \beta \cdot CD} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CF}{CD}$.

6) ~~$\frac{PF}{CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$~~ $\frac{PF}{CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \angle FPC}$ из т. синусов для $\triangle CFP$. из т.

синусов для $\triangle CPD$ $\frac{PD}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle DPC} \Rightarrow \frac{PF}{CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \angle FPC} = \frac{\frac{PD}{CD}}{\frac{\sin \beta}{\sin \angle DPC}}$

$$\Rightarrow \frac{PF \cdot CD}{PD \cdot CF} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \angle DPC}{\sin \beta \cdot \sin \angle FPC} \quad \text{т.к. } \angle DPC \text{ и } \angle FPC \text{ дополнительны}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{друг друга } go 180^\circ, \text{ т.к. } \sin \alpha = \frac{PF}{PD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{PF \cdot CD}{PD \cdot CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$= (\text{н. 5}) \quad \frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{CF^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{CF^2}{CD^2} = \frac{3}{10} \quad (\text{т.к. } \frac{PF}{PD} = \frac{3}{10})$$

$$\frac{CF}{CD} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

(н. 6) (н. 4)

$$7) \frac{ED}{CD} = \frac{CF}{CD} \cdot \frac{ED}{CF} = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{10}{3} = \sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ т.к. ио}$$

$$\text{n. 6 } \frac{CF}{CD} = \sqrt{\frac{3}{10}}, \text{ а ио n. 4 } \frac{RF}{DE} = \frac{CF}{ED} = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{ED}{CF} = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

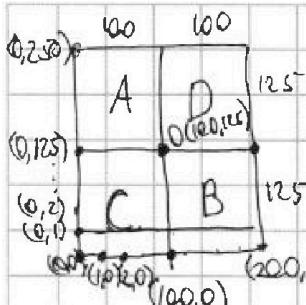


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если ~~номер~~ Закрашенное мн-во

обладает двумя симметриями из трёх, то

третьей оно тоже обладает. Действительно, пусть мн-во в верхней левой четверти имеет форму А, в

нижней правой В, в нижней левой С, в верхней правой

Д. Тогда ~~мы~~ проанализируем введеную декартову систему координат с началом в левом нижнем углу так, чтобы правый нижний угол имеет координату (200,0), а левый верхний - (0,250). Тогда

четырёхугольника имеет координаты (100,125). Тогда пусть мн-во

удовлетворяет условию симметричности относительно обеих ор. мн-ий горизонтальной

При симметрии относительно первой оси мн-ни точки (x, y) переходят в точку $(x, 250-y)$, а при симметрии относительно вертикальной

- в точку $(200-x, y)$. Тогда при обеих симметриях она

переходит в точку $(200-x, 250-y)$. Но ровно в такую

же точку она переходит при симметрии относительно О.

Значит, если в мн-ве есть клетка с центром (x_0, y_0) , то

если в клетке с центром $(200-x_0, 250-y_0)$, значит мн-во

симметрично относительно О. Если же в мн-ве есть клетка с центром (x_0, y_0) и есть условия симметричности относительно

вертикальной ор. мн-ии и центра, то у нас есть и клетка



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

с центром $(200 - x_0, 250 - y_0)$, как симметрична (x_0, y_0) относ. О.
с центром

А значит есть и клетка $(x_0, 250 - y_0)$, как симметричная клетке с центром $(200 - x_0, 250 - y_0)$ относительно вертикальной ср. линии. А эта точка симметрична $(x_0, 250 - y_0)$ симметрична тоже (x_0, y_0) относительно горизонтальной средней линии, значит у моделей точек есть симметрия относительно гориз. ср. линии, значит все м-ва симметрично относительно гориз. ср. линии. Ну и если есть симметрия относительно центра и гориз. ср. линии, то наше симметрии относительно верт. ср. линии должны выполняться одновременно

Тогда начнем пар-во способов поставить клетки так, чтобы чтобы было центрально симметричными. Заметим, что при такой симметрии клетки из А меняются местами с клетками из В, а из С-с D.

Тогда м-ва В и D по м-вам A и C восстановляются одновременно

Тогда способов выбрать такое м-во = пар-во способов выбрать $\frac{3}{2} = 4$ клетки в А и С, т.е. $C_{125 \cdot 100 + 125 \cdot 100}^4$, т.к в А и С по $125 \cdot 100$ клеток. Способ выбрать м-во, симметричное вертикальной линии тоже $C_{125 \cdot 100 + 125 \cdot 100}^4$, т.к м-ва D и В одновременно восстанавливаются по А и С. Ну и аналогично, способов выбрать м-во, симметричное гориз. ср. линии тоже $C_{125 \cdot 100 + 125 \cdot 100}^4$

Но в каждом из этих случаев мы по разу исключали каждое м-во, оставляющее в целом третий симметрический, значит нам нужно

вычесть удвоенное их пар-во, т.к их $C_{125 \cdot 100}^2$, т.к если мы выберем 2 клетки в А, то м-ва в В, С, D восстанавливаются одновременно из-за симметрии. Значит, что ответ ~~$2C_{125 \cdot 100}^2 + 3C_{125 \cdot 100 + 125 \cdot 100}^4$~~

$$3C_{125000}^4 - 2C_{12500}^2$$

$$\text{ответ: } 3C_{125000}^4 - 2C_{12500}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\beta = \frac{1}{2}$, значит, нам достаточно найти только значение β таких, что $f(\beta) = 23$.

$$f(0) = 560 \quad f(1) = 558 \quad f(2) = 554 \quad f(3) = 548 \quad f(4) = 540$$

$$f(5) = 530 \quad f(6) = 518 \quad f(7) = 504 \quad f(8) = 488 \quad f(9) = 470$$

$$f(10) = 450 \quad f(11) = 428 \quad f(12) = 404 \quad f(13) = 378 \quad f(14) = 350$$

$$f(15) = 320 \quad f(16) = 288 \quad f(17) = 254 \quad f(18) = 218 \quad f(19) = 180$$

$$f(20) = 140 \quad f(21) = 98 \quad f(22) = 54 \quad f(23) = 8.$$

Также из них $p^2 - 1$ для какого-то p равны $f(23) = 8$

$= 3^2 - 1$ и $f(16) = 288 = 17^2 - 1$. Тогда (с учётом симметрии)

у нас есть 4 возможных β : $23, -24, 16, -17$.

a) при $\beta = 23 \quad \alpha = 560 - 23^2 = 31, \quad f(\beta) = 8$, значит $p = 3$
Тогда с мод 22 мод 32. Но условие $\alpha - \beta \neq 3$ не выполняется

b) $\beta = -24 \quad \alpha = 560 - (-24)^2 = -16. \quad \alpha - \beta = 8 \neq 3. \quad f(\beta) = 8$

$\Rightarrow p = 3 \Rightarrow c \cdot = \text{мод } -25 \text{ мод } -15. \quad$ не выполняется

c) $\beta = 16 \Rightarrow \alpha = 560 - 16^2 = 304 \quad 304 + 16 \not\equiv 3 \quad \beta = -17$

$\beta = 16 \Rightarrow \alpha = 560 - 16^2 = 304 \quad 304 - 16 = 288 \not\equiv 3 \Rightarrow$

тройка не подходит

d) $\beta = -17 \Rightarrow \alpha = 560 - (-17)^2 = 271. \quad 271 - (-17) = 288 \not\equiv 3$

тройка не подходит

Итого ответ: $(31, 23, 22), (31, 23, 32), (-16, -24, -25)$

$(-16, -24, -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем последнее условие как $a = 560 - b^2$.

так т.к $a-c$ и $b-c$ целые, то второе условие равносильно системе $\begin{cases} b-c=1 & (\text{p-простое}) \\ a-c=p^2 \end{cases}$, т.к $a-c \neq b-c$ и они одного знака. Подставив $a=560-b^2$:

$$\begin{cases} b-c=1 \\ 560-b^2-p^2 \end{cases}$$

Тогда система преобразуется в такую:

$$\begin{cases} b-c=1 \\ 560-b^2-c=p^2 \\ b-c=-p^2 \\ 560-b^2-c=-1. \end{cases}$$

Заметим, что в обоих случаях получаем в обоих случаях верхнее из нижнего, получим $560-b^2-b=p^2-1$.

Условие $a>b$ равносильно $560-b^2>b \Leftrightarrow 560-b^2-b>0$.

Пусть $f(x) = 560-x^2-x$.

Тогда нам нужно найти все такие числа b , что $f(b) > 0$,

и $f(b) = p^2-1$ для каждого простого p , потому что тогда

здесь счёт изменения c мы можем найти ровно одно

решение для каждой системы. Заметим, что $f(x)$ - парабола с ветвями вниз, значит ~~если~~ $f(x) > 0$ при x таких, что

$f(x)>0$ - интервал с концами в его корнях. Заметим, что $f(23) = 560-23^2-23 = 8 > 0$, а $f(24) = 560-24^2-24 = -40 < 0$

$f(-24) = 560-(-24)^2-(-24) = 8 > 0$, $f(-25) = 560-(-25)^2-(-25) < 0$. Значит, в целых числах условие $f(x) > 0$ удовлетворяет

числа из отрезка $[-24, 23]$. Заметим, что значение

$f(x)$ равно b тождественно, если x является отрицательно - $\frac{b}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(0) = 560$$

$$f(1) = 558$$

$$f(2) = 554$$

$$f(3) = 548$$

$$f(4) = 540$$

$$f(5) = 530$$

$$f(6) = 518$$

$$f(7) = 504$$

$$f(8) = 488$$

$$f(9) = 490$$

$$f(10) = 450$$

$$f(11) = 428$$

$$f(12) = 404$$

$$f(13) = 378$$

$$f(14) = 350$$

$$f(15) = 320$$

$$f(16) = 288$$

$$f(17) = 254$$

$$f(18) = 218$$

$$f(19) = 180$$

$$f(20) = 140$$

$$f(21) = 98$$

$$f(22) = 54$$

$$f(23) = 8$$

$$3^2 - 1 =$$

$$2^2 - 1 = ?$$

$$3^2 - 1 = 8 \quad \checkmark$$

$$4^2 - 1 = 15$$

$$5^2 - 1 = 24$$

$$6^2 - 1 = 35$$

$$7^2 - 1 = 48$$

$$8^2 - 1 = 63$$

$$9^2 - 1 = 80$$

$$10^2 - 1 = 120$$

$$11^2 - 1 = 168$$

$$12^2 - 1 = 288$$

$$13^2 - 1 = 360$$

$$14^2 - 1 = 528$$

$$15^2 - 1 > 560$$

$$\frac{1}{4} + h^2 = 36$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$(-9\sqrt{3})^2$$

$$+ h^2 = 36$$

$$= 28$$

$$-\sqrt{3}x = 28$$

$$-\sqrt{3}x = 28$$

$$B = 23$$

$$B = 16$$

$$B = -17$$

$$AM^2 + MT^2 - BT^2 =$$

$$\frac{1}{4} + (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - x^2 = 28$$

$$\frac{1}{4} + x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}x^2 = 28$$

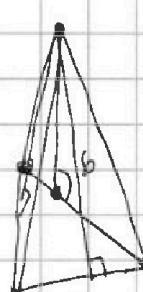
$$d = 31 \quad c = 22$$

$$B = 23 \quad d = 31 \quad c = 22$$

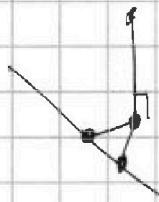
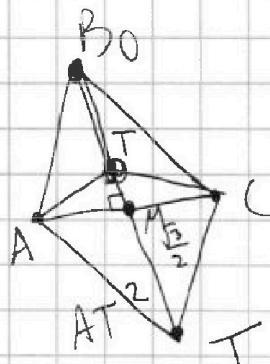
$$B = 23 \quad d = 31 \quad c = 32$$

$$B = -24 \quad d = -16 \quad c = -25$$

$$B = -24 \quad d = -16 \quad c = -15$$



$$q \neq 0$$



$$ST^2 + BT^2 =$$

$$x = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$= 8\sqrt{3}$$

$$(-9\sqrt{3})^2$$

$$+ h^2 = 36$$

$$1 - \sqrt{3}x = 28$$

$$-\sqrt{3}x = 28$$

$$B = 23$$

$$B = -24$$

$$B = -17$$

$$AM^2 + MT^2 - BT^2 =$$

$$\frac{1}{4} + (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - x^2 = 28$$

$$\frac{1}{4} + x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}x^2 = 28$$

$$d = 31 \quad c = 22$$

$$B = 23 \quad d = 31 \quad c = 32$$

$$B = -24 \quad d = -16 \quad c = -25$$

$$B = -24 \quad d = -16 \quad c = -15$$

$$f(24) \geq 0 \quad < 0$$

$$f(23) = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{560 - b^2} \quad b^2 - 560 - b^2 > 0$$

1

20

$$0 \dots 23$$

$$-1 \dots -24$$

$$f(0) = 560$$

$$f(1) = 560 - 1 - 1 = 558 \quad [0, 23]$$

$$23^2 = 20^2 + 6 \cdot 20 + 9 \\ = 529$$

$$24^2 = 400 + 8 \cdot 20 + 16 = 576 \quad \frac{1}{2}$$

$$[24, 23]$$

$$25^2 = 625 \quad f(x) = 560 - x^2 - x$$

$$a = 560 - b^2$$

$$560 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$560 - b^2 \equiv b$$

$$\Rightarrow b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow d \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 560 - b^2 - b > 0$$

$$\Rightarrow a, b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$560 - b^2 - b > 0$$

$$\Rightarrow x$$

\Rightarrow

$$d = b + k$$

$$d = (-1)^2 + 4 \cdot 560 = 2241$$

$$(b - c) \cdot (b - c + k) = p^2$$

$$b - c + k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - c = -p^2 \\ b - c + k = -1 \end{cases}$$

$$b - c = 1$$

$$\begin{cases} b - c = 1 \\ b - c + k = p^2 \\ b^2 - c = p^2 \end{cases} \quad b$$

$$560 - b^2 - c = p^2$$

$$\begin{cases} b - c = 1 \\ 560 - b^2 - c = p^2 \\ b^2 - c = p^2 \end{cases}$$

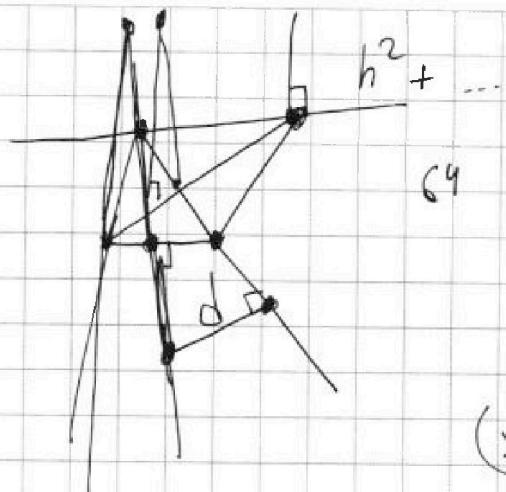
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 6^2$$

$$d = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{575}}{6}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$-4\left(\frac{1}{4}x^2 + h^2\right) = 6^2 - 4 \cdot 8^2$$

$$h^2 + \frac{1}{4}x^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow h \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 = -28$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = -28$$

$$\frac{3}{4}x^2 - \sqrt{3}x - 27\frac{1}{4} = 0$$

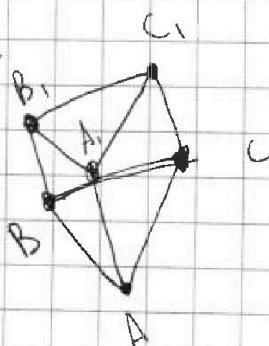
$$D = \frac{3 + \frac{3}{4} \cdot 27\frac{1}{4}}{6}$$

$$= \frac{48}{16} + \frac{58\frac{1}{4}}{16} = \frac{575}{16}$$

$$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{575}{16}}$$

$$2 - \frac{3}{4} \quad \sqrt{\frac{575}{16}} \geq 23$$

$$\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{575}}{6}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ

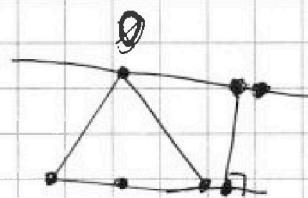
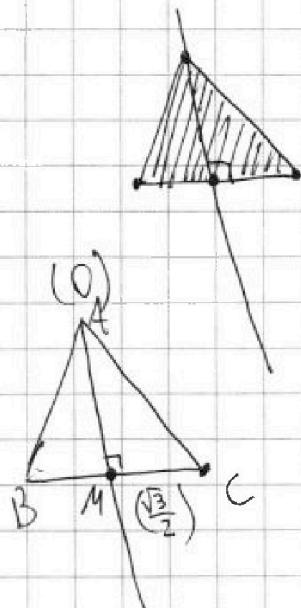
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть геометр. прогрессия - b_n , и её знаменатель - q . Тогда $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$

$$\text{Тогда } \frac{b_{15}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^{15-1}}{b_1 \cdot q^{7-1}} = \frac{q^{14}}{q^6} = q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{(13x-35)}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$= (x+1)^2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{(x+1)^2}. \quad \text{Тогда } \frac{b_{13}}{b_{15}} = \frac{b_1 \cdot q^{13-1}}{b_1 \cdot q^{15-1}} = \frac{1}{q^2} = \frac{5-x}{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} = \frac{5-x}{\sqrt{(13x-35)(x+1)}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{(x+1)^2} \cdot (5-x) = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$



$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 6^2$$

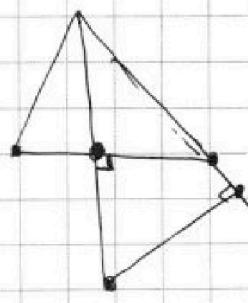
$$\frac{1}{4}t^2 + h^2 = 3^2$$

$$t^2 - \sqrt{3}t + \frac{3}{4} + h^2 = 6^2$$

$$\frac{1}{4}t^2 + h^2 = 8^2$$

$$\frac{3}{4}t^2 - \sqrt{3}t + \frac{3}{4} = 6^2 - 8^2$$

$$\frac{3}{4}t^2 - \sqrt{3}t + 28\frac{3}{4} = 0$$



$$\frac{1}{4}AT^2 + h^2 = 8^2$$

$$MT^2 + h^2 = 6^2$$

$$\textcircled{1} = 3 - \frac{3}{4} \cdot 28\frac{3}{4} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad q = \pm \sqrt[4]{x+1} \Rightarrow x+1 > 0 \\ \Rightarrow x > -1$$

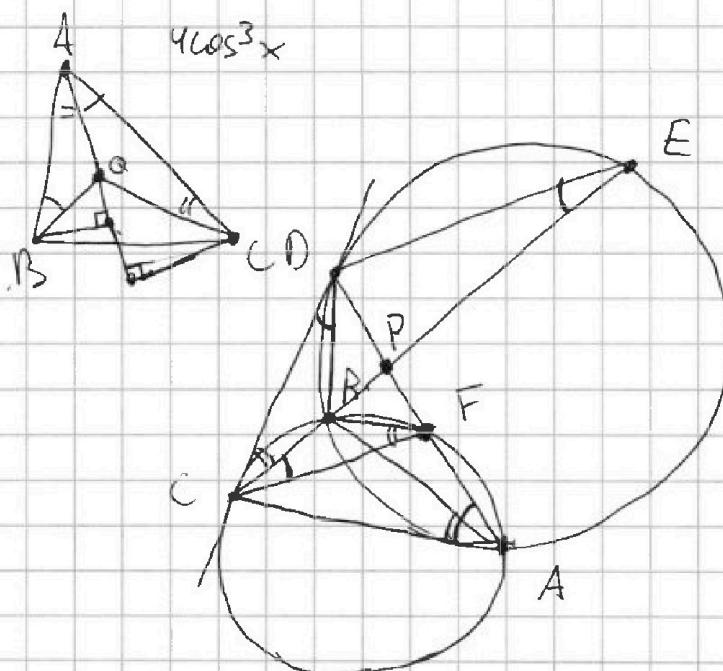
$$\Leftrightarrow \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 6\cos x = p$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)(\cos x + 3(2\cos^2 x - 1)) + 6\cos x$$

$$= \underline{\cos^3 x} - \underline{3\cos x} + \underline{3\cos^3 x} + \underline{6\cos^2 x} - \underline{3} + \underline{6\cos x}$$

$$= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$(2\cos x - 1)^2 (\cos x - 1) = p$$



$$\frac{PC}{PE} = \frac{3}{10} = \frac{FC}{DE}$$

$$\frac{10}{3} = \frac{DE}{FC} = \frac{EP}{CF}$$

$$\frac{\sqrt{10}q^4}{\sqrt{5-x}} = q^2$$

$$q^2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5-x} = q^2$$

$$\Leftrightarrow q \cdot \frac{\sqrt{10}}{5-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10} = 5-x$$

$$\Leftrightarrow 5-x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5-x)^2$$

$$\frac{3}{10} = \frac{PF}{PD} = \frac{CF^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \quad \frac{CF}{CD} \cdot \frac{ED}{CD} = \frac{ED}{CD} \\ = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

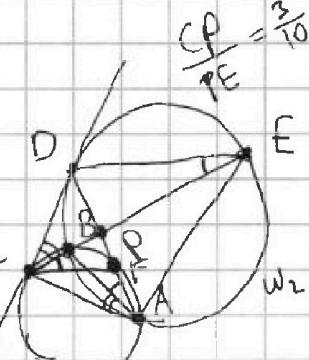
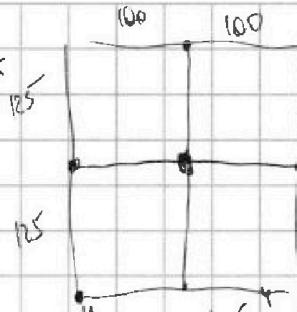
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x - (3 + 3\cos^2 x) \cos x + 3\cos^2 x$$

$$2C_{250.00}^4 - C_{125.00}^2$$



b_1 b_2 b_3

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{B_{15}}{B_2} = \frac{B_1 \cdot q^{15-1}}{B_1 \cdot q^{2-1}}$$

$$C \quad w_i \quad \frac{PB \cdot PC}{PB \cdot PC} = \frac{1}{10}$$

$$(b-c)^2 + 4(b-c) = n^2$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A circle with center } C(x+1) \text{ and radius } r = \sqrt{x+1}. \\
 & \text{Given: } \frac{61 \cdot q^{14}}{61 \cdot q^6} = f^8 \Rightarrow q^8 = \frac{\sqrt{r(x+1)}}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}}} = \frac{\sqrt{(x+1)}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \text{From the diagram: } \frac{CF}{DE} = \frac{CP}{PE} = \frac{3}{10} \quad \left(\frac{ax+by+cz+d}{x+1} \right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+1)^2} \\
 & \Rightarrow q^8 = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow q = \pm \sqrt[8]{x+1} \\
 & \Rightarrow q = \pm \sqrt[8]{x+1} \\
 & \Rightarrow (q^8)^2 = (x+1)^{-1} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{x+1} \\
 & \Rightarrow q^2 = \frac{3}{10} \Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{3}{10}}
 \end{aligned}$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x + \underline{B \cdot P C} = \frac{3}{10}$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cancel{\sin x} \cos^2 x \cdot \underline{P.B. \cdot P.E.}$$

$$+ 3i^2 \sin^2 x \cos x + i^3 \sin^3 x$$

P.D. • PA = PB • PE

$$= \omega s^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 6\cos x = p$$

$$= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x) \cos x + 3\cos^2 x - 3(1-\cos^2 x) + 6\cos x = P$$

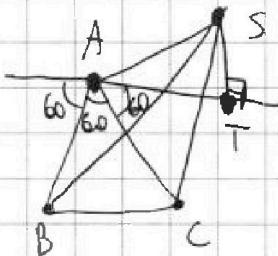


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть основание

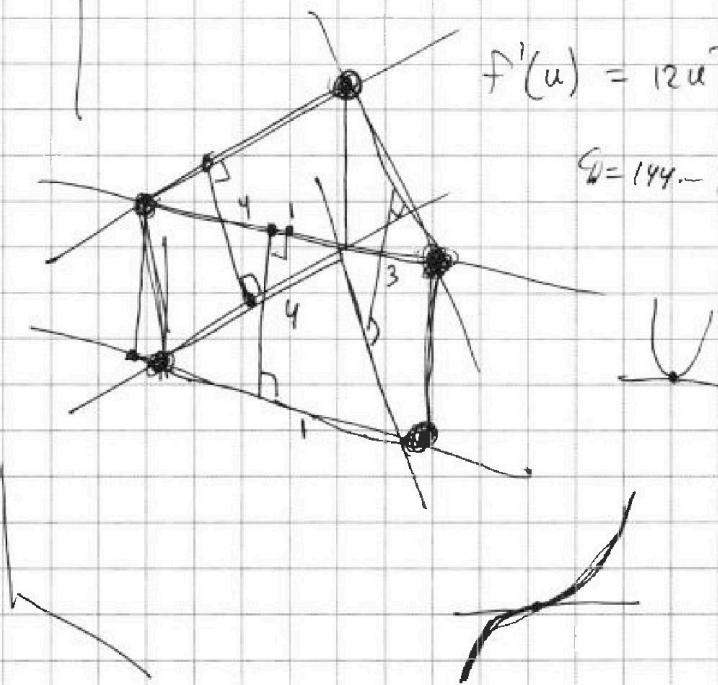
$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$u = \cos x$$

$$4u^3 + 6u^2 + 3u - 3 = p$$

$$f'(u) = 12u^2 + 12u + 3$$

$$\Delta = 144 - 192 > 0$$



\cos

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(0) =$$

$$f(1) = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4, 10]$$