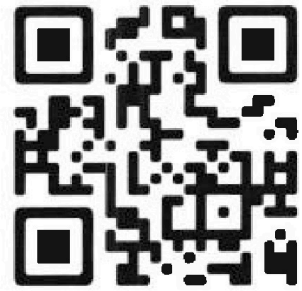




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$  имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
- [5 баллов] Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 30$ ,  $BC = 24$ ,  $AC = 18$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 23 точки:  $B_1, B_2, \dots, B_{23}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 17 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$ ?
- [4 балла]  $AH$  – высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$ , и  $AK = 5$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 240$ .
- [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 80 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 20 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $2q^2$  тыс.руб., на втором заводе  $2q^2 + 2q$  тыс.руб., и на третьем  $2q^2 - q$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

124  
 $4x^2 - (4a + 8)x + (a^2 + 4a) = 0$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a^2 + 4a \\ x_1 + x_2 = 4a + 8 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = a^2 + 4a \\ 6x_2 = 4a + 8 \Rightarrow a = 1,5x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x_2^2 &= (1,5x_2 - 2)^2 + 6x_2 - 8 \\ 5x_2^2 &= 2,25x_2^2 + 4 - 6x_2 + 6x_2 - 8 \\ 2,75x_2^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - (a+2)x + \left(\frac{a^2}{4} + a\right) = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} + a \\ x_1 + x_2 = a + 2 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = \frac{a^2}{4} + a \\ 6x_2 = a + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x_2^2 = a^2 + 4a \\ a = 6x_2 - 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 20x_2^2 &= 36x_2^2 + 4 - 12x_2 + 24x_2 - 8 \\ 16x_2^2 + 12x_2 - 4 &= 0 \\ 4x_2^2 + 3x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-3+5}{8} \\ x_2 = \frac{-3-5}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0,25 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0,25 \\ a = 6 \cdot 0,25 - 2 = -0,5 \\ x = -1 \\ a = -6 - 2 = -8 \end{cases}$$

Ответ:  $-0,5$ ;  $-8$ ;

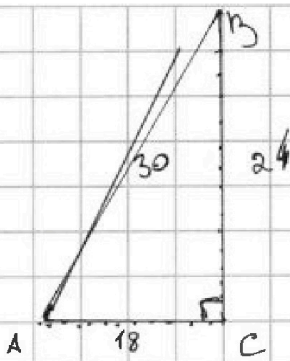
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

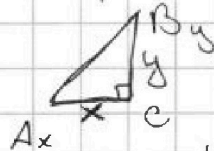
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $30^2 = 5.6$   
 $24^2 = 4.6$   
 $18^2 = 3.6$

и  $5, 4, 3$  - Пифагорова тройка, то  $\triangle ABC$  - прямоугольный

2) рассмотрим  $\triangle$ , ~~с вершинами~~  
 одна вершина которого - C



$0 \leq x \leq 18$   
 $0 < y \leq 24$

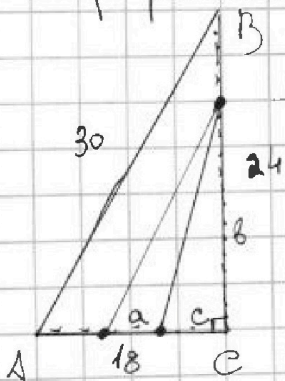
и  $\frac{x^2 + y^2}{2} = 11$

$xy \leq 22$

т.к.  $22 : 2$   
 $22 : 11$   
 $22 : 1$   
 $22 : 22$

то  $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 11 \end{cases}$   $\begin{cases} x \leq 11 \\ y \leq 2 \end{cases}$   $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 22 \end{cases}$   $\begin{cases} x \leq 22 \\ y \leq 1 \end{cases}$   
 всего 3

3) теперь рассмотрим фигуру границами  $\triangle ABC$  одной вершиной на стороне BC



можно  $\triangle$ :  $\frac{(a+c)b}{2} - \frac{bc}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{ab}{2}$

при этом  $0 < a \leq 18$  и  $\frac{ab}{2} = 11$   
 $a < b \leq 24$   
 $ab = 22$

т.к.  $22 : 1$ ;  $22 : 22$ ;  $22 : 2$ ;  $22 : 11$

то  $\begin{cases} a \leq 1 \\ b \leq 22 \end{cases}$   $\begin{cases} a \leq 11 \\ b \leq 2 \end{cases}$   $\begin{cases} a \leq 2 \\ b \leq 11 \end{cases}$

на стороне AC, вершины (а можно) разместим:  
 17 вариантов 7 вариантов 16 вариантов

всего 40



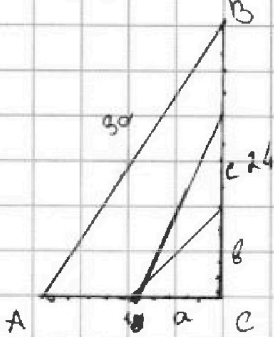
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12) продолжение.



рассматриваем  $\Delta$  с высотой проведенной на стороне AC

$$S_{\Delta} = \frac{a(b+c)}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{ac}{2}$$

$$ac = 22$$

т.к.  $22:1; 22:22; 22:2; 22:11$

$$\begin{cases} 0 < a < 18 \\ 0 < c \leq 24 \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} a \leq 1 & a \leq 2 & a \leq 11 \\ c \leq 22 & c \leq 11 & c \leq 2 \end{cases}$$

~~вариантов~~ вариантов

(размещений:)

1 вариант 13 вариантов 22 варианта

всего 37 вариантов

в итоге получается  $37 + 3 + 40 = 80 \Delta$

Ответ: 80

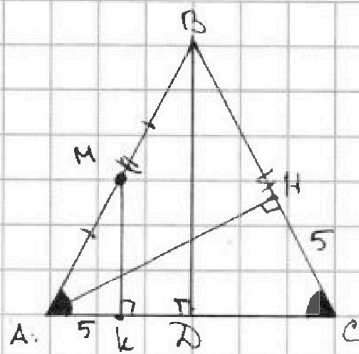


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) т.к.  $\triangle ABC$   $AB = BC$ , то  $\angle A = \angle C$   
 2)  $\triangle AMK \cong \triangle CHA$  - прямоугольные,  
 по углу и катету.  $\angle AKM = \angle AHC$   
 и  $AM = AC$   
 т.к.  $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$ , то  
 $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$

~~2)  $\angle A = \angle C$~~

~~$\angle B = 90^\circ$  ( $\angle AHC, \angle HAC = 90^\circ$ )~~

~~$\triangle ABC$   $\angle HAC = 90^\circ - \alpha$ ;  $\triangle ABC$ ,  $\angle AHC = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 2\alpha - 90^\circ$ ;  
 $\angle AHC, \angle B = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 180^\circ - 2\alpha$~~

3) проведем  $BD \perp AC$

$\triangle AMK$  и  $\triangle ABD$  по углу  $A$  (прямоугольные)

знаем  $\frac{AK}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ ;  $AD = 10$

т.к.  $\triangle ABC$   $AB = BC$ , то  $BD$  - высота, медиана и биссектриса  
 и  $AC$  - основание

знаем  $AC = 2AD = 20$

и  $AB = BC = 10$

4)  $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 10 + 10 + 20 = 40$

Ответ: 40



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

$$M = \{n; n+1; n+2; n+3; n+4\} \quad n \geq 0$$

Вариантов разложения этих чисел на квадраты: 5  
может быть 5 сумм: a, b, c, d, e:

$$a \leq n + n+1 + n+2 + n+3 = 4n+6$$

$$b \leq n + n+1 + n+2 + n+4 = 4n+7$$

$$c \leq n + n+2 + n+3 + n+4 = 4n+9$$

$$d \leq n + n+1 + n+3 + n+4 = 4n+9$$

$$e \leq n+1 + n+2 + n+3 + n+4 = 4n+10$$

или же из этих сумм - в сумме

вариантов разложения по две суммы: 10

$$(4n+6)^2 + (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+9)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+13) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+14) \leq 240$$

$$4 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+19) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+18) \leq 240$$

$$8n = 227$$

$$8n = 65$$

$$8n = 106$$

$$8n = 44$$

$$8n = 104$$

$$8n = 137$$

$$8n = 63$$

$$8n = 223$$

$$8n = 222$$

$$8n = 102$$

$$n \leq 28,5$$

$$n \leq 8,125$$

$$n \leq 23,25$$

$$n \leq 5,5$$

$$n \leq 13$$

$$n \leq 17,1$$

$$n \leq 7,875$$

$$n \leq 27,8$$

$$n \leq 27,75$$

$$n \leq 12,75$$

Т.к. n - натуральное, то оно должно быть целым  
возможна  $n \leq 13$

$$\text{возможна } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



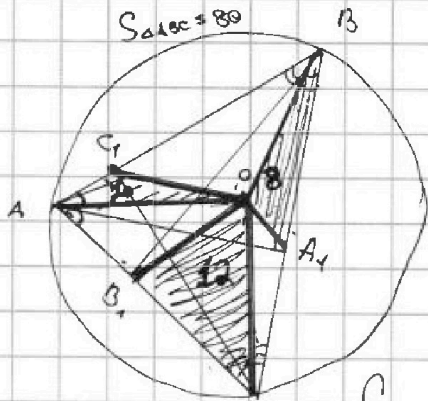
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№51



1)  $OA = OB = OC = R$   $\wedge$   $AA_1, BB_1, CC_1$  — высоты,  
~~то  $\Delta A_1OC = \Delta C_1OA$~~   
 но  $\Delta A_1OC = \Delta C_1OA$   
 $\Delta B_1OC = \Delta C_1OB$   
 $\Delta A_1OB = \Delta B_1OA$

поэтому

$$S_{\Delta A_1OB} + S_{\Delta B_1OC} + S_{\Delta C_1OA} + S_{\Delta A_1OB} + S_{\Delta B_1OC} + S_{\Delta C_1OA} = S_{\Delta ABC}$$

$$2S_{\Delta A_1OB} + 2S_{\Delta B_1OC} + 2S_{\Delta C_1OA} = S_{\Delta ABC}$$

$$80 = 2S_{\Delta A_1OB} + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12$$

$$S_{\Delta A_1OB} + 20 + 12 = 40$$

$$S_{\Delta A_1OB} = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
14 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 & (1) \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 2ab^2 - 4 = 0 \\ b^3 - 3a^2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{a^3 - 4}{2a}$$

$$\frac{a^3 - 4}{2a} \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} - 3a^2 \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} = 8$$

$$\sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (a^3 - 6a^2) = 16a$$

$$-4 - 5a^3 \leq 16a \sqrt{\frac{2a}{a^3 - 4}}$$

разделим (2) на (1)

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8 + 3ab}{4 + 2ab}; \quad 4b^2 + 2ab^3 = 8a^2 + 3a^3b$$

$$4(b^2 - 2a^2) = ab(3a^2 - 2b^2)$$

разделим на  $b$

$$4\left(\frac{a^3 - 4}{2a} - 2a^2\right) = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} \left(3a^2 - \frac{a^3 - 4}{a}\right)$$

$$-6a^3 - 8 \leq a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2a^3 - 4)$$

$$3a^3 + 4 \leq a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)$$

$$\frac{a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)}{3a^3 + 4} \leq 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \\ a^3 = 4 \\ a^3 = 2 \\ 3a^3 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ a = \sqrt[3]{2} \\ a \neq \sqrt[3]{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq \sqrt[3]{4} \\ b \leq 0 \\ a = \sqrt[3]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

I  $2q^2 = a$

II  $2q^2 + 2q = b$  т.к.  $q \geq 0$ , то  $\Rightarrow c \leq a \leq b \leq 100$

III  $2q^2 - q = c$  и  $q \leq 100$

значит для минимальных затрат надо, чтобы III выполнялся как можно меньше; ~~а I~~ а I — как можно больше.

I можно выполнить только 100

значит, чтобы для II осталось как можно меньше, то можно сделать III максимум возможное, т.е. 100.

тогда для III осталось 50.

Ответ:  
1: 100  
2: 100  
3: 50

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

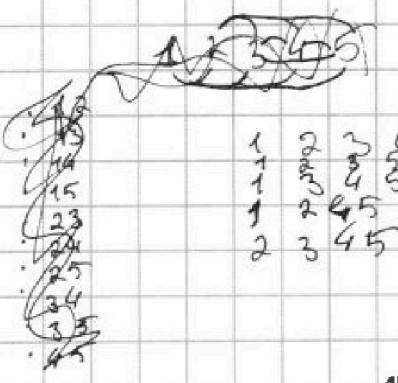


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 170 \overline{) 31} \\ 155 \quad 0,54838 \\ \hline 150 \\ 124 \\ \hline -260 \\ \quad 248 \\ \hline \quad 120 \\ \quad \quad 93 \\ \quad \quad \quad 270 \\ \quad \quad \quad \quad 848 \end{array}$$



(1 2 3 4 5)

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	3	4	5	

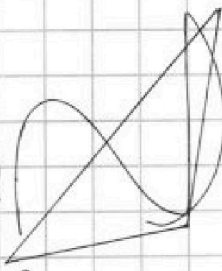
$$\begin{array}{r} 12 \quad 23 \quad 34 \quad 45 \\ 13 \quad 24 \quad 35 \\ 14 \quad 25 \\ 15 \\ \hline 27 \quad 31 \\ 186 \quad 0,677 \\ \hline 240 \\ 214 \\ \hline 230 \\ 217 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 227 \overline{) 8} \\ 16 \quad 28,47 \\ \hline 67 \\ 64 \\ \hline 30 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -57 \end{array}$$

8, 125      5 4 5 4 5

$$\begin{array}{r} 240 \\ 13 \\ \hline 227 \end{array}$$

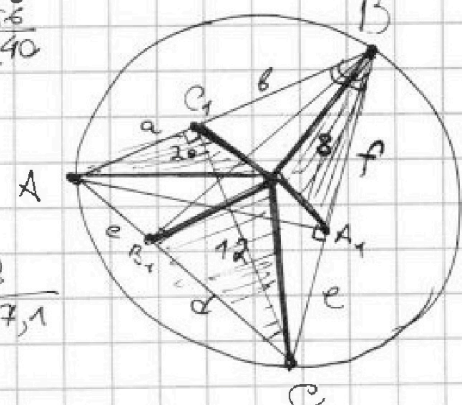
$$\begin{array}{r} 106 \overline{) 8} \\ 8 \\ \hline 26 \\ 20 \\ \hline 16 \\ -14 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 222 \overline{) 8} \\ 16 \quad 27,75 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \end{array}$$

1, 2, 3, 7, 4, 5

$$\begin{array}{r} 80 - 15 \\ 120 - 14 \\ 60 - 16 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 8} \\ 8 \\ \hline 22 \\ 20 \\ \hline 16 \\ -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 104 \overline{) 8} \\ 8 \quad 13 \\ \hline 24 \\ \hline 223 \overline{) 8} \\ 16 \quad 27,8 \\ \hline 63 \\ -56 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \overline{) 8} \\ 8 \quad 17,1 \\ \hline 57 \\ -56 \\ \hline 10 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} a^3 - 4a^2 + a^3 \\ \hline 2a^2 \\ \hline -6a^2 - 8 \\ \hline a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a^3 - a^2 + 4 \\ \hline 2a^3 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 260 \overline{) 31} \\ 248 \quad 0,838709 \\ \hline 120 \\ 93 \\ \hline 270 \\ -248 \\ \hline 220 \\ 217 \\ \hline 200 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \times (9a^6 + 16 + \cancel{4a^3}) = a^{\cancel{3}} (a^3 - 4)(4 + a^6 - 4a^3)$$

$$\begin{array}{r} 4 - 4 = 0 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \end{array}$$