МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases} |x-2y| \leqslant 2 \\ |2x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=4$, $AN=5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть четвертый член арифметической прогрессии равен a, а разность арифметической прогрессии равна k, тогда четвертый член равен a, шестой член арифметической прогрессии равен $a+2k$, и десятый член арифметической прогрессии равен $a+6k$. Тогда есть система:

$$\begin{cases} a = 6-9x \\ a+2k = (x^2-2x)^2 \\ a+6k = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+6-9x = x^4+4x^2-4x^3 \\ 6k+6-9x = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = x^4-4x^3+4x^2+9x-6 \\ 2k = 3x^2+3x-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-4x^3+4x^2+9x-6 = 3x^2+3x-2$$

~~С другой стороны~~ $\cancel{2(a+2k-a) = (x^2-2x)^2 - 6+9x}$

$$\boxed{x^4-4x^3+x^2+6x-4=0}$$

$$(x-1)^2(x^2-2x-4)=0$$

$x=1$ $\quad D = 4+4\cdot 4 = 20$

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt5}{2} = 1+\sqrt5$$

$$x_2 = 1-\sqrt5$$

1 случай: $x=1$

Тогда $\begin{cases} a = 6-9 \\ a+2k = (1-2)^2 \\ a+6k = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a+2k = 1 \\ a+6k = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=-3 \quad k=2$ Итого арифм. последовательность: $-9, -7, -5, \underset{4}{-3}, -1, \underset{6}{1}, 3, 5, 7, \underset{10}{9}$

$x=1$ ✓

2 случай $x = 1+\sqrt5$

$$\begin{cases} a = 6-9-9\sqrt5 \\ a+2k = 16 \\ a+6k = 9\cdot 6+18\sqrt5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3-9\sqrt5 \\ a+2k = 16 \\ a+6k = 54+18\sqrt5 \end{cases} \Big| \ \frac{(a+2k)-a}{2} \Rightarrow k = 9.5+4.5\sqrt5$$

Тогда $a+6k = -3-9\sqrt5 + 6(9.5+4.5\sqrt5) = -3-9\sqrt5+57+27\sqrt5 = 54+18\sqrt5 \Rightarrow x = 1+\sqrt5$ тоже подходит.

3. $$\begin{cases} a = 6-9+9\sqrt5 \\ a+2k = 16 \\ a+6k = 54-18\sqrt5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3+9\sqrt5 \\ a+2k = 16 \\ a+6k = 54-18\sqrt5 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{16+3-9\sqrt5}{2} = 9.5-4.5\sqrt5$$

и $(a,k) = (-3+9\sqrt5, 9.5-4.5\sqrt5)$ тоже решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $1;\ 1+\sqrt5;\ 1-\sqrt5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2.

Найти max. знач. $3y+6x$ при условии $\begin{cases} |x-2y| \le 2 \\ |2x-y| \le 1 \end{cases}$

Ответ: 13

Пример: $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{5}{3}$

$|x-2y| = \left|\frac{4}{3}-\frac{10}{3}\right| = \left|\frac{6}{3}\right| = 2 \le 2$ ✓

$|2x-y| = \left|\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\right| = |1| = 1 \le 1$ ✓

Оценка: Рассмотрим 4 случая.

① $\begin{cases} x-2y \ge 0 \\ 2x-y \ge 0 \end{cases}$ тогда по усл. $\begin{cases} x-2y \le 2 \\ 2x-y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2+2y \\ 2x \le y+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \le \frac{y+1}{2}$, но т.к. $x-2y \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2y \Rightarrow \frac{y+1}{2} \ge 2y \quad /\cdot 2$

$y+1 \ge 4y$

$1 \ge 3y$

1^* $\frac{1}{3} \ge y$ $\quad \frac{y+1}{2} \ge x$

$\frac{\frac{1}{3}+1}{2} \ge x$

2^* $\frac{2}{3} \ge x$

из 1^* и 2^*

$3y+6x \le 1+\frac{2}{3}\cdot 6 = 5$

Итак. в ① случае $3y+6x \le 5$.

② $\begin{cases} x-2y \ge 0 \\ 2x-y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2y \\ 2x \le y \end{cases}$ Но тогда $2x \ge 4y$, а $2x \le y \Rightarrow$

$\Rightarrow y \ge 4y$

$0 \ge 3y \Rightarrow y \le 0$. $y \ge 2x \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y+6x \le 0$. Итак во ② случае $3y+6x \le 0$

③ $\begin{cases} x-2y \le 0 \\ 2x-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2y \\ 2x \ge y \end{cases}$ по условию: $\begin{cases} 2y-x \le 2 \\ 2x-y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \le x+2 \; ①^* \\ 2x \le y+1 \; ②^* \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y \overset{①^*}{\le} 2x+4 \overset{②^*}{\le} y+5$

$3y \le 5 \Rightarrow y \le \frac{5}{3} \Rightarrow$ из ②* $2x \le y+1 \le \frac{5}{3}+1 \Rightarrow x \le \frac{4}{3}$

Итак: $3y+6x \le 5+\frac{4}{3}\cdot 6 = 5+8 = 13$

④ $\begin{cases} x-2y \le 0 \\ 2x-y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2y \\ 2x \le y \; (1) \end{cases}$ по усл: $\begin{cases} 2y-x \le 2 \\ y-2x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y \le 2+x \\ y-1 \le 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \le x+2 \\ y \le 2x+1 \end{cases} \Rightarrow y \le \frac{x+2}{2}$ но $y \ge 2x$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+2}{2} \ge 2x \Rightarrow x+2 \ge 4x$

$2 \ge 3x$

$\boxed{\frac{2}{3} \ge x} \Rightarrow 2y \le x+2$

$2y \le \frac{2}{3}+2$

$y \le 1+\frac{1}{3}$

$\boxed{y \le \frac{4}{3}}$

$3y+6x \le 2+\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}} = 10$

Итак $3y+6x$ всегда ≤ 13 т.к. каждая пара (x,y) попадает под 1 из случаев, а на 13 есть пример.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

1 случай: $B = 11p^2$, $A = 75q^2$

$11p^2 = mn(m+2n+9) \Rightarrow$ если $m, n > 1$. То ~~…~~,

либо $m = 11$ и $n = m+2n+9 = p$ 1.1

либо $n = 11$ и $m = m+2n+9 = p$ 1.2

либо $n = m = p$ и $m+2n+9 = 11$ 1.3

1.1 тогда $n = 11+2n+9 \Rightarrow n = -20$, n-натур противоречие.

1.2 тогда $2n+9 = 0$, но $n = 11$ противоречие.

1.3 тогда $m+2n+9 = 3p+9 = 11$ но $11 \not\vdots 3$ противоречие (a $3p+9 \vdots 3$)

$\Rightarrow$ либо $m = 1$ либо $n = 1$.

1.4 $m = 1$ тогда $11p^2 = n(10+2n) \Rightarrow$ т.к $10+2n$ - чет. $\Rightarrow 11p^2$ - чет., а значит $p = 2$ тогда $11 \cdot 4 = n(10+2n) \Rightarrow 2n^2 + 10n - 44 = 0$

$n^2 + 5n - 22 = 0$ $D = 25 + 4 \cdot 22 = 113$, $\Rightarrow n_1 = \frac{-5+\sqrt{113}}{2}$ $n_2 = \frac{-5-\sqrt{113}}{2}$

n_1, n_2 - нецелые $\Rightarrow$ не натур противоречие.

1.5 $n = 1$ тогда $11p^2 = m(m+11)$, заметим что $m \underset{11}{\equiv} m+11 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к $m(m+11) \vdots 11$ и 11 - простое $\Rightarrow m \vdots 11$ и $m+11 \vdots 11$

~~$\Rightarrow 11p^2 \vdots 11^2 \Rightarrow p = 11$ $11^3 = m^2 + 11m$~~ $m^2 + 11m - 11^3 = 0$

$D = 11^2 + 4 \cdot 11^3 = 11^2 \cdot (4+11) = 11^2 \cdot 15 \Rightarrow m_1 = \frac{-11+11\sqrt{15}}{2}$; $m_2 = \frac{-11-11\sqrt{15}}{2}$

m_1, m_2 - нецелые противоречие.

2 случай: $B = 75q^2$, $A = 11p^2$

$11p^2 = (m+2n)(m+2n-7) \Rightarrow$ ~~либо $m+2n = 11$ и $m+2n-7 = p^2$~~

1) Заметим, что $m+2n > 0$ ~~либо $m+2n$~~ $\Rightarrow (m+2n-7) > 0$

Тогда случаи:
2.1 $m+2n = 11$ и $m+2n-7 = p^2$
2.2 $m+2n = 1$ и $m+2n-7 = 11p^2$
2.3 $m+2n = p$ и $m+2n-7 = 11p$
2.4 $m+2n = p^2$ и $m+2n-7 = 11$
2.5 $m+2n = 11p^2$ и $m+2n-7 = 1$
2.6 $m+2n = 11p$ и $m+2n-7 = p$

2.1 Тогда $(m+2n) - 7 = 11 - 7 = 4 \Rightarrow p = 2$ Тогда ~~…~~ $n \le 5$

~~так если $n \ge 6$ то $m+2n \ge 12$ т.к $m, n \ge 1$. $n = 1$, $m = 9$ тогда $A = 11 \cdot 4$, а $B = 1 \cdot 9 \cdot 20 \overset{?}{=} 75q^2$, но $B \vdots 75 \vdots 13 \Rightarrow B \vdots 13$, но $B = 9 \cdot 20 \not\vdots 13$~~

~~след. случай $n = 2$, $m = 7$ $A = 11 \cdot 4$,~~ $B = 2 \cdot 7 \cdot 20 \Rightarrow B = mn \cdot 20$, но

$B = 75q^2 \Rightarrow$ т.к $B \vdots 2$ $(B = 20mn)$ значит $q = 2$, Тогда $mn \cdot 20 = 75q^2 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$mn\cdot 20 = 75q^2$

$mn\cdot 20 = 75\cdot 4$

$mn = 13 \Rightarrow$ т.к $m+2n = 11$ и m, n - натур противоречие

$(mn = 13 \Rightarrow m = 13 \,/\, n = 13 \Rightarrow m+2n \geq 13$ но $m+2n=11)$

2.2. $m+2n = 1$, но $m \geq 1$ и $2n \geq 2$ (т.к $n \geq 1$)

$\Rightarrow m+2n \geq 3$ противоречие.

2.3 $m+2n = p$ и $m+2n-7 = 11p$ p - натур. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 11p > p$

$m+2n-7 > m+2n$

$-7 > 0$ противоречие

2.4 $m+2n = p^2$ и $m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = m+2n-7+7 = 11+7 =$

$= 18$, но $18 \neq p^2$ Противоречие

2.5 $m+2n = 11p^2$; $m+2n-7 = 1$ тогда $m+2n = m+2n-7+7 =$

$= 1+7 = 8$ но $8 \neq 11p^2$ т.к $8 \not\vdots\, 11$

2.6 $m+2n = 11p$ и $m+n-7 = p \Rightarrow m+2n = p+7 \Rightarrow$

$\Rightarrow p+7 = 11p$

$7 = 10p$, p-нецелое Противоречие.

A значит таких пар (m, n) не существует.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Дано:

AC = 6

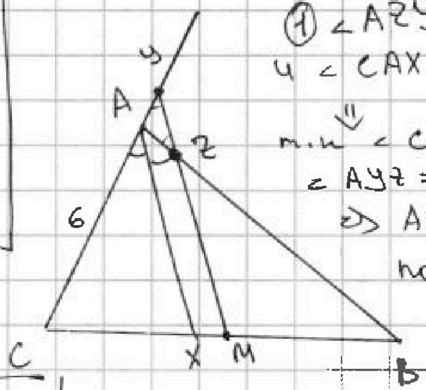
AZ = 3

YZ = 4

CM = MB

AX - биссектр. ∠BAC

BC = ?



Решение.

накрест лежс.

① ∠AZY = ∠XAZ (по ∥ AX и YM)

и ∠CAX = ∠CYM (по ∥ AX и YM) соотв.

т.к. ∠CAX = ∠XAZ значит,

∠AYZ = ∠AZY ⇒ △AYZ - равноб.

⇒ AZ = AY = 3. Тогда

по Т. косинусов, △AYZ

$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot \cos\alpha$,

где α = ∠YAZ

$\cos\alpha = \frac{18-16}{18} = \frac{1}{9}$ ⇒

⇒ $\cos(180 - \alpha) = -\frac{1}{9}$

①* $\boxed{\cos(\angle CAB) = -\frac{1}{9}}$.

② Заметим, что если

AC = a, AB = b, CB = c

то $CX = c \cdot \frac{a}{a+b}$ т.к.

$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB}$, $MB = \frac{c}{2}$ ⇒

$\Rightarrow XM = c - \frac{c}{2} - c \cdot \frac{a}{a+b} = c\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a+b}\right) = c \cdot \frac{a+b-2a}{2(a+b)} = \frac{c}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)$

~~с другой~~ Также т.к. ZM ∥ AX ⇒ по обратной т. Фалеса

для угла и ZM ∥ AX : $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{MX} \Leftrightarrow \frac{b-3}{3} = \frac{\cancel{c}/2}{\frac{\cancel{c}}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)}$ $/\cdot 3 \cdot \frac{b-a}{a+b}$

$\Leftrightarrow (b-3)\left(\frac{b-a}{a+b}\right) = 3$, a = AC = 6.

$(b-3)\left(\frac{b-6}{6+b}\right) = 3$ $/\cdot(6+b)$

$(b-3)\cdot(b-6) = 18 + 3b$

$b^2 - 9b + \cancel{18} = \cancel{18} + 3b$

$b^2 = 12b \Rightarrow b = 12$ (b > 0 т.к. это длина сторон)

⇒ по т. Косинусов : △CAB $BC^2 = 6^2 + 12^2 + 12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}$ ①*

⇒ $BC^2 = 36 + 144 + 16 = 196 = 14^2$ ⇒ BC = 14 т.к. BC > 0

Ответ: 14

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \quad (1) \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \quad (2) \end{cases}$$

(2): $x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$ Заметим, что $f(x) = x^3+3x+\sqrt{2x}$ − возрастающая т.к x^3 возраст. $3x$ возраст. $\sqrt{2x}$ возраст. $\Rightarrow x^3+3x+\sqrt{2x}$ возраст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$, $x \geq 0$ т.к $\sqrt{2y} \geq 0$

(1):

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$ Т.е если обозначить

$a = \sqrt{x+2}$
$b = \sqrt{7-x}$ то $a - b + 7 = 2ab$

$\Updownarrow$

$2ab + b - a - 7 = 0$, $a; b > 0$

$2ab + b - a = 7$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 7 - \frac{1}{2}$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

при этом
$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
$7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$
$\Rightarrow x \in [0; 7]$

$b = \sqrt{7-x} \leq \sqrt{7+2} = 3$
$0 \leq b \leq 3$
$a = \sqrt{x+2} \leq \sqrt{7+2} = 3$
$a \leq 3$
Также $a^2+b^2 = x+2+7-x = 9$
#1

$a+\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2b-1 > 0$

$2b-1 = \dfrac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = 1 + \dfrac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = \dfrac{a+\frac{1}{2}+6.5}{a+\frac{1}{2}} \Rightarrow 2b = \dfrac{a+7}{a+\frac{1}{2}}$

$b = \dfrac{a+7}{2a+1} = 0.5 + \dfrac{6.5}{2a+1}$

$\#1 \Rightarrow (\sqrt{9-a^2} - 1)(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(\sqrt{9-a^2}-1)(a+\frac{1}{2})=6.5$

$(\frac{1}{2}+a)\sqrt{9-a^2}-a-\frac{1}{2}=6.5$

$(\frac{1}{2}+a)\sqrt{9-a^2}=7+a$ возводим в кв.

$(9-a^2)(a^2+a+\frac{1}{4})=49+a^2+14a$

$9a^2+9a+\frac{9}{4}-a^4-a^3-\frac{a^2}{4}=49+a^2+14a$

$-8-\frac{1}{4}=-7\frac{3}{4}$

$a^4+a^3+a^2(1-9+\frac{1}{4})+a(14-9)-\frac{9}{4}=0$

$a^4+a^3-a^2\cdot\frac{31}{4}+a\cdot5-\frac{9}{4}=0 \quad /\cdot4$

$4a^4+4a^3-31a^2+20a-9=0$

$(4a^4-31a^2-9)+(4a^3+20a)=0$

решив это уравнение, мы найдем a, а дальше найдем x ~~как~~ как a^2-2, $x=y$, и нужно проверить все ограничения.

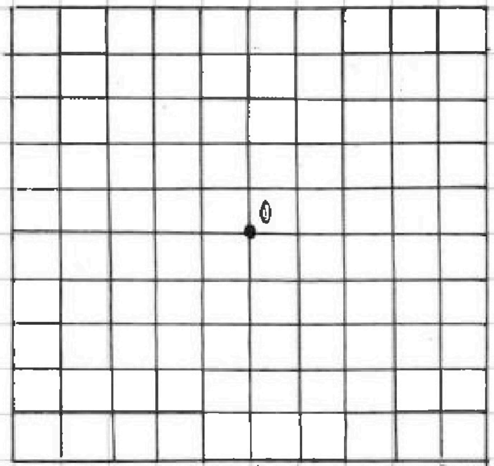
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	■	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

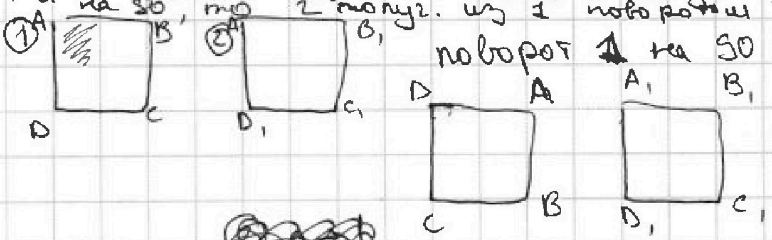
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.



Итак всего 121 узел. Выбрать 2 и перекрасить из C_{121}^{2} способа, но некоторые из них попарно совпадают поворотом. ~~Рассмотрим 2 таких спо-~~ ~~соба~~ ~~Рассмотрим 2 выборки~~ ~~докажем что практические выбор~~ Рассмотрим 2 таких способа. Пусть в 1 способе выбраны точки a и b а во 2 c и d. при повороте на (1) 90, (2) −90, (3) 180 градусов они совпали:

~~(1) на 90~~ 1 и 2 аналогичен т.к. если 1 получ. из 2 поворотом на 90, то 2 получ. из 1 поворотом на −90.



поворот 1 на 90 (или −90) без разницы

итак способы совпали ⇒

⇒ ~~...~~

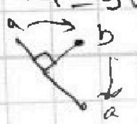
(1) $(a, b) \to (c, d)$ пара точек в пару точек. ⇒ БОО $a \to c$, $b \to d$ т.е ~~c~~ получ. при повороте точки a на 90 аналогично d получ. при повороте b на 90. Такая точка ровно 1. т.к при повороте 1 кв. переходит во 2, 1 в 3 3 в 4, 4 в 1.

1	2
4	3

⇒ ~~Точка~~ Выбраны точки a и b a ими однозначн. опред. точки c и d итак. ~~В всеспосо~~ ~~бы~~ ~~В~~ Каждому способу сопоставляется 1 способ ~~до~~ совмещ. на +90, и 1 совмещающийся на −1.

(3) поворот на 180 аналогично $(a, b) \to (c, d) \Rightarrow$ БОО $a \to c$, $b - d$ и т.к операции поворота на +180 и на −180 совпадают то (a, b) соотв. ровно 1 пара совпадающих при повороте на ±180 относит. 0. Также стоит отметить что пара $(a, b) \not\to (a, b)$ при по~~в~~вороте на ±90 т.к тогда

(1) $a \to a$, $b \to b$ ⇒ $a, b = 0$ - центр X a, b - различ. либо $a \to b$, $b \to a$



противоречие т.к точки a и ~~b~~ ~~сим.~~ совпадают ⇒ $a = 0$ $b = 0$ ↗

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Но при повороте на ±180 они совпасть могут а это случай когда a и b сим. относит 0.

Итак.

Каждому из способов $(C_{121}^2 - C_{61}^2) = \#$ способов где a и b не сим. относит 0 сопоставлено ~~еще~~ 3 других разл. способа которые совпадают при наложении, а остальным C_{61}^2 только 2 (без способа поворота на 180)

Итак ответ: $\dfrac{C_{121}^2 - C_{61}^2}{3} + \dfrac{C_{61}^2}{2}$ т.к у сим. при повороте на 90° совпадают

$C_{121}^2 = \dfrac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60$

$C_{61}^2 = \dfrac{61 \cdot 60}{2} = 61 \cdot 30$

2725

$\dfrac{121 \cdot 60 - 61 \cdot 30}{3} + \dfrac{61 \cdot 30}{2} =$ ~~121·20 − 61·10 + 61·15~~ $=$

$=$ ~~242·10 + 61·5 = 2420 + 305 = 2725~~

$61 \cdot 5 = 305$

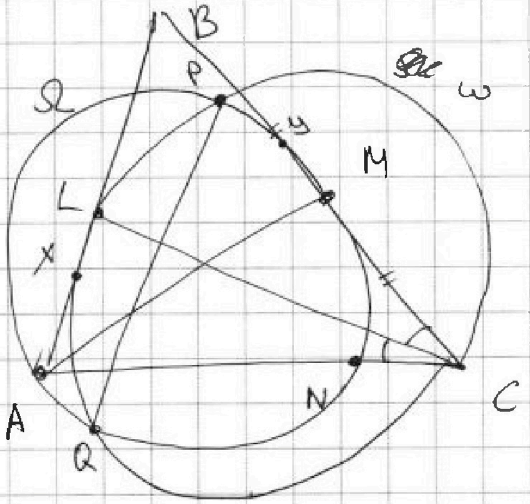
Ответ: ~~2728~~ 2725

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$PQ \perp AC$

1) CX – высота к AB

т.к $\angle LXC = 90$ (LC – диам гр ω)

и AY – высота к BC

т.к $\angle AYM = 90$ (AM диам гр Ω)

X – пересеч. ω с AB, Y пересеч Ω с BC.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$

$f(1) = 1 - 4 + 1 - 6 - 4 < 0$

$f(0) < 0$

$f(2) = 16 - 32 + 4 - 12 - 4 < 0$

$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$

$x^4 + x^2 = x^2(x^2+1) = x^2(x^2+1-x) + x^3$

$-4x^3 - 4 = -4(x^3+1) = -4(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3 - 6x = x(x^2-6)$

$\cancel{(x^2+1-x)}(x^2-4x-4) + x(x^2-6)$

$x = 5$

$-2 \quad 16 + 32 + 4 - 24 - 4$

$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$

$81 - 4 \cdot 27$

$-27 + 9 - 18 - 4 < 0$

$y = \frac{5}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{6}{3}$

$x^4 - 4 = (x^2-2)(x^2+2)$

$4x^3 - x^2 + 6x = x(4x^2 - x + 6)$

$3y + 6x$

$\begin{cases} |x - 2y| \le 2 \\ |2x - y| \le 1 \end{cases}$

$y + 2x$ $\cdot 3$

② $\begin{cases} x \ge 2y \\ 2x \le y \end{cases}$

$x \ge 2y$

$y \ge 2x \ge 4y \Rightarrow y \le 0 \Rightarrow x \le 0$

① $\begin{cases} x \ge 2y \\ 2x \ge y \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y < 2 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

$x < 2y + 2$

$2x < y + 1$

$x < \frac{y+1}{2}$

$\frac{y+1}{2} > 2y$

$y + 1 > 4y$

$1 > 3y$

$\frac{1}{3} > y \Rightarrow x < \frac{2}{3}$

$x < \frac{2}{3} + 2$

$\frac{4}{3} \quad x < \frac{2}{3}$

③ $\begin{cases} x \le 2y \\ 2x \ge y \end{cases}$

$x > 0,\ y > 0$

$2y - x \le 2$

$2x - y \le 1$

$2x \le y + 1$

④ $\begin{cases} x \le 2y \\ 2x \le y \end{cases}$

$2y \le 2 + x$

$4y \le 2 + 2x \le y + 3$

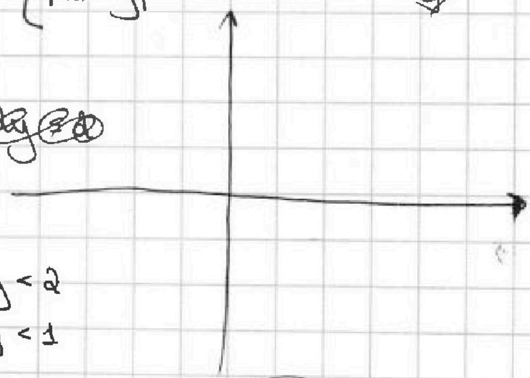
$4y \le y + 3$

$y \le 1$

$2x \le 2$

$x \le 1$

$y + 2x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$



$\begin{cases} x \le 2y \\ 2x \le y \end{cases}$

$y \ge 2x$, $x \le 2y$, $a \le y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_4 = a$

$a_5 = a + b$

$a_6 = a + 2b$

$a_8 = a + 6b$

$$\begin{cases} a = 6 - 9x \\ (x^2 - 2x)^2 = a + 2b \\ 9x^2 = a + 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 - 4x^3 = 6 - 9x + 2b \\ 9x^2 = 6 - 9x + 4b \end{cases}$$

$4b = 9x^2 + 9x - 6$

$2b = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$

$9x^2 + \cancel{9x} - \cancel{6} = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \cancel{9x} - \cancel{6}$

$2x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$

$\sqrt{56} = 7.8$

$x^2(2x^2 - 4x - 5) = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 16 + 40 = 56$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \quad x_3 = \frac{4 - \sqrt{56}}{4}$

$x_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \quad x_3 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$

$$\begin{cases} a = 6 \\ 0 = 6 + 2b \Rightarrow b = -3 \\ 0 = 6 + . \end{cases}$$

$75 =$

$6k = 9x^2 + 9x - 6 = 3(3x^2 + 3x - 2)$

$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 3 =$

$2k = 3x^2 + 3x - 2$

$4k = 6x^2 + 6x - 4$

$4k = 6 \cdot \left(x + \frac{3 - \sqrt{33}}{6}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)$

$4k = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$

$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{33}}{12} \quad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{33}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

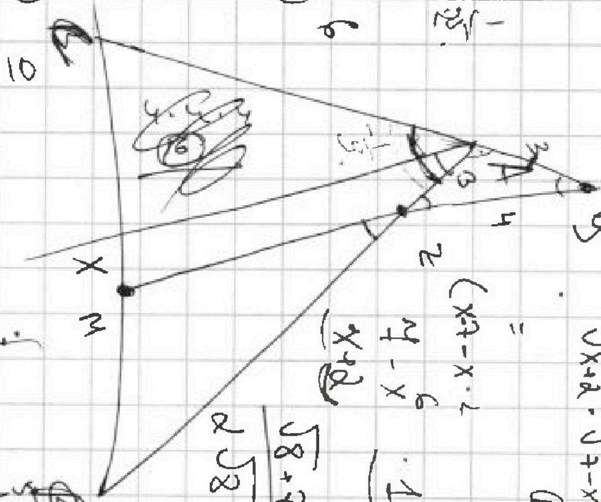
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

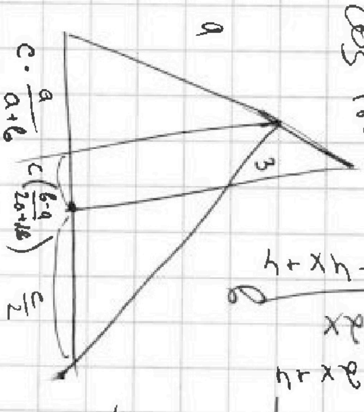
$(x+2)(7-y) =$

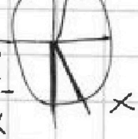
$= 7x + 14 - 2y \ldots$

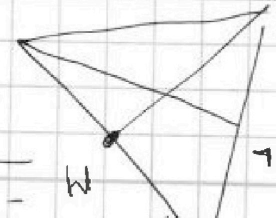
$4\cdot16 - 31\cdot4 - 9 + 4\cdot8 + 20\cdot2$

$64 - 124 - 9 + 32 + 40$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a=\sqrt{9-b^2}$ $14+5x-y^2\geq 0$ $6-9x$

$7-y\geq 0$

$2((x^2-2x)^2-6+9x)=9x^2-(x^2-2x)^2$

$a^2=$

$2x^4-4$

$x+2=-(7-x)+$

$2x^4+8x^2-8x^3+9x-6=9x^2-x^4-4x^2+4x^3$

$a^2=9-b^2$

$a^2+b^2=9.$

$3x^4-12x^3+3x^2+9x-6=0$

$x^4-4x^3+x^2+3x-2=0$