



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть четвертый член арифметической прогрессии равен a , а разность арифметической прогрессии равна k , тогда четвертый член равен a , шестой член арифметической прогрессии равен $a+2k$, и десятый член арифметической прогрессии равен $a+6k$. Тогда есть система:

$$\begin{cases} a = 6 - 9x \\ a + 2k = (x^2 - 2x)^2 \\ a + 6k = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 6 - 9x = x^4 + 4x^2 - 4x^3 \\ 6k + 6 - 9x = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \\ 2k = 3x^2 + 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2 + 3x - 2$$

$$(x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$(x-1)^2 (x^2 - dx - 4) = 0$$

$$x=1 \quad D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{D}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

2) ~~другой способ~~
 ~~$(a+dk) = (x^2 - 2x)^2$~~

1 способ: $x=1$

$$\text{Тогда } \begin{cases} a = 6 - 9 \\ a + dk = (1-2)^2 \\ a + 6k = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a + dk = 1 \\ a + 6k = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3 \quad k = 2$ Число арифм.

последовательность: $-9, -7, -5, \textcircled{-3}, -1, \textcircled{1}, 3, 5, 7, \textcircled{9}$

$x=1 \quad \checkmark$

д) считая $x = 1 + \sqrt{5}$

$$\begin{cases} a = 6 - 9 - 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 9 \cdot 6 + 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 + 18\sqrt{5} \end{cases} \begin{cases} \frac{(a+dk)-a}{2} \\ \Rightarrow k = 9.5 + 4.5\sqrt{5} \end{cases}$$

$$+ 6(9.5 + 4.5\sqrt{5}) = -3 - 9\sqrt{5} + 57 + 27\sqrt{5} = 54 + 18\sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$$

Также проверит

$$3. \begin{cases} a = 6 - 9 + 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 - 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 + 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 - 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{16 + 3 - 9\sqrt{5}}{2} = 9.5 - 4.5\sqrt{5}$$

и $(a, k) = (-3 + 9\sqrt{5}, 9.5 - 4.5\sqrt{5})$ тоже решение \Rightarrow

\Rightarrow Ответ: $1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дд.

Найти max. знач. $3y+6x$ при условии $\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$

Ответ: 13

Пример: $x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$
 $|x-2y| = |\frac{4}{3} - \frac{10}{3}| = |-\frac{6}{3}| = 2 \leq 2 \checkmark$
 $|2x-y| = |\frac{8}{3} - \frac{5}{3}| = |1| = 1 \leq 1 \checkmark$

Решение: Рассмотрим 4 случая.

① $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases}$ тогда по усл. $\begin{cases} x-2y \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2+2y \\ 2x \leq y+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq \frac{y+1}{2}$, но м.к. $x-2y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2y \Rightarrow \frac{y+1}{2} \geq 2y \quad / \cdot 2$
 $y+1 \geq 4y$
 $1 \geq 3y$
 $\frac{1}{3} \geq y$

$3y+6x \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 6 = 5$

Итак, в ① случае $3y+6x \leq 5$.

② $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y \\ 2x \leq y \end{cases}$ но тогда $2x \geq 4y$, а $2x \leq y \Rightarrow y \geq 4y \Rightarrow 0 \geq 3y \Rightarrow y \leq 0$. $y \geq 2x \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y+6x \leq 0$. Итак в ② случае $3y+6x \leq 0$

③ $\begin{cases} x-2y \leq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2x \geq y \end{cases}$ по условию: $\begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \leq x+2 \\ 2x \leq y+1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4y \leq x+4 \stackrel{③^*}{=} y+5$
 $3y \leq 5 \Rightarrow y \leq \frac{5}{3} \Rightarrow$ из ②* $2x = y+1 \leq \frac{5}{3} + 1 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$

Итак: $3y+6x \leq 5 + \frac{4}{3} \cdot 6 = 5 + 8 = 13$

④ $\begin{cases} x-2y \leq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2x \leq y \end{cases}$ по усл. $\begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ y-2x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y \leq x+2 \\ y-1 \leq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \leq x+2 \\ y \leq 2x+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{2} \geq dx \Rightarrow x+2 \geq 4x$
 $2 \geq 3x$
 $\frac{2}{3} \geq x$

$3y+6x \leq 2 + 6 \cdot \frac{2}{3} = 10$

Итак $3y+6x$ всегда ≤ 13 м.к. каждая пара (x, y) попадает под 1 из случаев, а на 13 есть пример.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m + 2n)(m + 2n - 7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

1 случай: $B = 11p^2, A = 75q^2$

$$11p^2 = mn(m + 2n + 9) \Rightarrow \text{если } m, n > 1. \text{ То } \text{пропуска}$$

либо $m = 11$ и $n = m + 2n + 9 = p$ 1.1

либо $n = 11$ и $m = m + 2n + 9 = p$ 1.2

либо $n = m = p$ и $m + 2n + 9 = 11$ 1.3

1.1 тогда $n = 11 + 2n + 9 \Rightarrow n = -20$, n -натур противоречие.

1.2 тогда $2n + 9 = 0$, но $n = 11$ противоречие.

1.3 тогда $m + 2n + 9 = 3p + 9 = 11$ но $11 \not\equiv 3$ противоречие (а $3p + 9 \equiv 3$)

\Rightarrow либо $m = 1$ либо $n = 1$.

1.4 $m = 1$ тогда $11p^2 = n(10 + 2n) \Rightarrow m$ и $10 + 2n$ - чет. $\Rightarrow 11p^2$ - чет.

а значит $p = 2$ тогда $11 \cdot 4 = n(10 + 2n) \Rightarrow 2n^2 + 10n - 44 = 0$

$$n^2 + 5n - 22 = 0 \quad D = 25 + 4 \cdot 22 = 113, \Rightarrow n_1 = \frac{-5 + \sqrt{113}}{2} \quad n_2 = \frac{-5 - \sqrt{113}}{2}$$

n_1, n_2 - нецелые \Rightarrow не натур противоречие.

1.5 $n = 1$ тогда $11p^2 = m(m + 11)$, заметим что $m, m + 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow m$ и $m(m + 11) \equiv 11$ и 11 - простое $\Rightarrow m \equiv 11$ и $m + 11 \equiv 11$

$\Rightarrow 11p^2 \equiv 11^2 \Rightarrow p = 11 \quad 11^3 = m^2 + 11m \quad m^2 + 11m - 11^3 = 0$

$$D = 11^2 + 4 \cdot 11^3 = 11^2 \cdot (4 + 11) = 11^2 \cdot 15 \Rightarrow m_1 = \frac{-11 + 11\sqrt{15}}{2}; m_2 = \frac{-11 - 11\sqrt{15}}{2}$$

m_1, m_2 - нецелые противоречие.

2 случай: $B = 75q^2, A = 11p^2$

$$11p^2 = (m + 2n)(m + 2n - 7) \Rightarrow \text{либо } m + 2n = 11 \text{ и } m + 2n - 7 = p^2$$

1) Заметим, что $m + 2n > 0 \Rightarrow (m + 2n - 7) > 0$

Тогда случаи: 2.1 $m + 2n = 11$ и $m + 2n - 7 = p^2$

2.2 $m + 2n = 1$ и $m + 2n - 7 = 11p^2$

2.3 $m + 2n = p$ и $m + 2n - 7 = 11p$

2.4 $m + 2n = p^2$ и $m + 2n - 7 = 11$

2.5 $m + 2n = 11p^2$ и $m + 2n - 7 = 1$

2.6 $m + 2n = 11p$ и $m + 2n - 7 = p$

2.1 Тогда $(m + 2n) - 7 = 11 - 7 = 4 \Rightarrow p = 2$ Тогда ~~два варианта~~ $n = 5$

но если $n \geq 6$ то $m + 2n \geq 12$ и $m, n \geq 1, n = 1, m = 9$ тогда

$A = 11 \cdot 4, B = 1 \cdot 9 \cdot 20 = 75q^2$, но $75 \cdot 13 \Rightarrow B = 13$, но $13 \neq 9 \cdot 20$

еще случаи $n = 2, m = 7 \quad A = 11 \cdot 4, B = 2 \cdot 7 \cdot 20 \Rightarrow B = mn \cdot 20$, но

$B = 75q^2 \Rightarrow m$ и $B \equiv 2 \quad (B = 20mn)$ значит $q = 2$, тогда $mn \cdot 20 = 75q^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$mn \cdot 20 = 75q^2$$

$$mn \cdot 20 = 75 \cdot 4$$

$$mn = 13 \Rightarrow m, n \text{ и } m+2n = 11 \text{ и } m, n \text{ - натуральные противоречие}$$

$$(mn = 13 \Rightarrow m = 13 / n = 13 \Rightarrow m+2n \geq 13, \text{ но } m+2n = 11)$$

$$d. 2. m+2n = 1, \text{ но } m \geq 1 \text{ и } 2n \geq 2 \text{ (и.и. } n \geq 1)$$

$$\Rightarrow m+2n \geq 3 \text{ противоречие.}$$

$$d. 3. m+2n = p \text{ и } m+2n-7 = 11p \text{ } p \text{ - натуральное. } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11p > p$$

$$m+2n-7 > m+2n$$

$$-7 > 0 \text{ противоречие}$$

$$d. 4. m+2n = p^2 \text{ и } m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = m+2n-7+7 = 11+7 = 18, \text{ но } 18 \neq p^2 \text{ противоречие}$$

$$d. 5. m+2n = 11p^2; m+2n-7 = 1 \text{ тогда } m+2n = m+2n-7+7 = 1+7 = 8 \text{ но } 8 \neq 11p^2 \text{ и.и. } 8 \neq 11$$

$$d. 6. m+2n = 11p \text{ и } m+2n-7 = p \Rightarrow m+2n = p+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p+7 = 11p$$

$$7 = 10p, \text{ } p \text{ - натуральное противоречие.}$$

А значит таких пар (m, n) не существует.

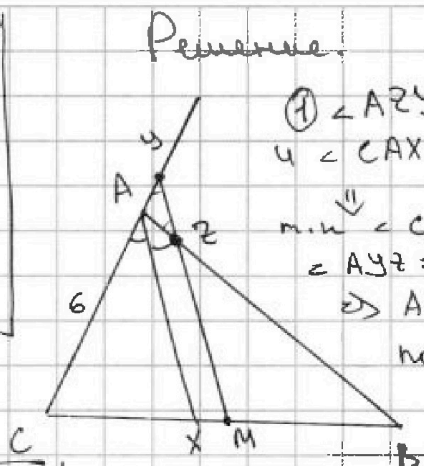


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4
Дано:
 $AC = 6$
 $AZ = 3$
 $YZ = 4$
 $CM = MB$
 AX - биссектр. $\angle BAC$
 $BC = ?$



Решение.

выполняет перес.

① $\angle AZY = \angle XAZ$ (по $\parallel AX$ и YZ)
и $\angle CAZ = \angle CBM$ (по $\parallel AX$ и YZ)

т.к. $\angle CAZ = \angle XAZ$ известны,
 $\angle AZY = \angle XAZ \Rightarrow \triangle AYZ$ - равноб.

$\Rightarrow AZ = AY = 3$. Тогда
по т. косинусов, $\triangle AYZ$

$$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{где } \alpha = \angle YAZ$$

$$\cos \alpha = \frac{18 - 16}{18} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(180 - \alpha) = -\frac{1}{9}$$

$$\textcircled{1} \cos(\angle CAB) = -\frac{1}{9}$$

② Заметим, что если
 $AC = a$, $AB = b$, $CB = c$
то $CX = c \cdot \frac{a}{a+b}$ т.к.
 $\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB}$, $MB = \frac{c}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow XM = c - \frac{c}{2} - c \cdot \frac{a}{a+b} = c \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a+b} \right) = c \cdot \frac{a+b-2a}{2(a+b)} = \frac{c}{2} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)$$

~~с другой стороны~~ Также т.к. $ZM \parallel AX \Rightarrow$ по обратной т. Талеса
где YZ и $ZM \parallel AX$: $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{MX} \Leftrightarrow \frac{b-3}{3} = \frac{\frac{c}{2} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)}{\frac{c}{2} \left(\frac{b-a}{a+b} \right)} \cdot 3 \cdot \frac{b-a}{a+b}$

$$\Leftrightarrow (b-3) \left(\frac{b-a}{a+b} \right) = 3, \quad a = AC = 6.$$

$$(b-3) \left(\frac{b-6}{6+b} \right) = 3 \quad / \cdot (6+b)$$

$$(b-3) \cdot (b-6) = 18 + 3b$$

$$b^2 - 9b + 18 = 18 + 3b$$

$$b^2 = 12b \Rightarrow b = 12 \quad (b > 0 \text{ т.к. это длина стороны})$$

\Rightarrow по т. Косинусов: $\triangle CAB$ $BC^2 = 6^2 + 12^2 + 12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}$ $\textcircled{1}^*$

$$\Rightarrow BC^2 = 36 + 144 + 16 = 196 = 14^2 \Rightarrow BC = 14 \quad \text{т.к. } BC > 0$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} & (1) \\ x^3 + 3x - \sqrt{2x} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y & (2) \end{cases}$$

(2): $x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2x}$ Заметим, что $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ - возрастающая м.к x^3 возраст. $3x$ возраст. $\sqrt{2x}$ возраст. $\Rightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ возраст. \Rightarrow

$\Rightarrow x = y, x \geq 0$ м.к $\sqrt{2x} \geq 0$

(1): ~~$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2}$~~

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$ Т.е. если обозначить

$a = \sqrt{x+2}$
 $b = \sqrt{7-x}$ м.к

$a - b + 7 = 2ab$

при этом

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$7-x > 0 \Rightarrow x < 7$

$\Rightarrow x \in [0; 7]$

$2ab + b - a - 7 = 0, a; b > 0$

$2ab + b - a = 7$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 7 - \frac{1}{2}$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

$a+\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2b-1 > 0$

$2b-1 = \frac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = 1 + \frac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = \frac{a+\frac{1}{2} + 6.5}{a+\frac{1}{2}} \Rightarrow 2b = \frac{a+7}{a+\frac{1}{2}}$

$b = \frac{a+7}{2a+1} = 0.5 + \frac{6.5}{2a+1}$

$\neq 1 \Rightarrow (\sqrt{9-a^2-1})(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

~~$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2 + \sqrt{x+2} + b}$~~

~~$2 + \sqrt{x+2} + b = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{\sqrt{7-x}}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{9-a^2} - 1) \left(a + \frac{1}{2}\right) = 6.5$$

$$\left(\frac{1}{2} + a\right) \sqrt{9-a^2} - a - \frac{1}{2} = 6.5$$

$$\left(\frac{1}{2} + a\right) \sqrt{9-a^2} = 7 + a \quad \text{возведем в кв.}$$

$$(9-a^2) \left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) = 49 + a^2 + 14a$$

$$9a^2 + 9a + \frac{9}{4} - a^4 - a^3 - \frac{a^2}{4} = 49 + a^2 + 14a$$

$$a^4 + a^3 + a^2 \left(1 - 9 + \frac{1}{4}\right) + a(14 - 9) - \frac{9}{4} = 0$$

$$a^4 + a^3 + a^2 \cdot \frac{31}{4} + a \cdot 5 - \frac{9}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$4a^4 + 4a^3 + 31a^2 + 20a - 9 = 0$$

$$(4a^4 + 4a^3 - 9) + (31a^2 + 20a) = 0$$

решив это уравнение, мы найдем a , а дальше найдем x так как $a^2 = 2$, $x = y$, и нужно проверить все ограничения.

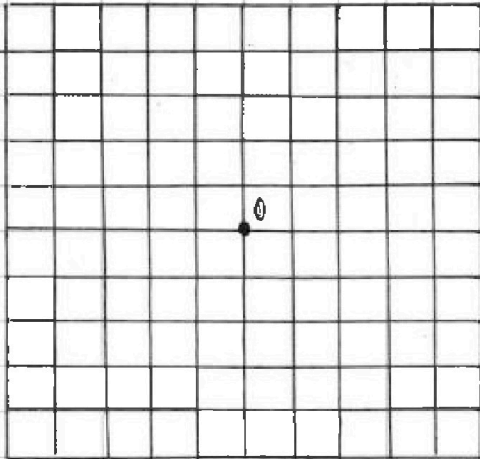


1 2 3 4 5 6 7

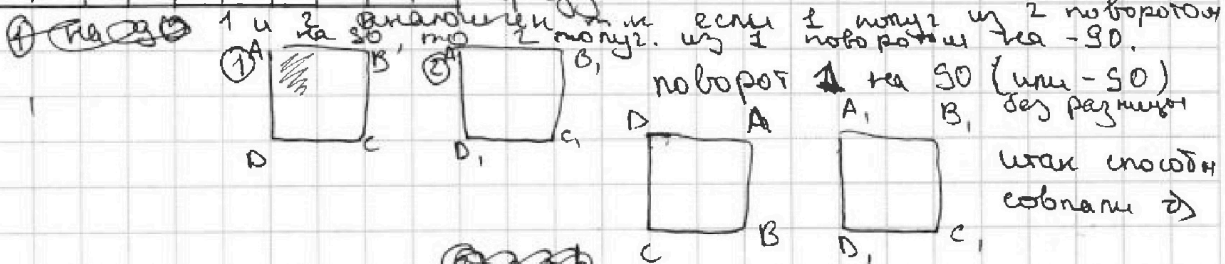
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.



Итак было 121 узел. Выбрать 2 и перекрасить из C_{121}^2 способами, но некоторые из них получатся поворотом. Рассмотрим 2 таких способа. Рассмотрим 2 способа. Пусть в 1 способе выбраны точки a и b а во 2 c и d . при повороте на ① 90° , ② -90° , ③ 180° углов они совпали:



① на 90°

$(a, b) \rightarrow (c, d)$

параметры в пары точки.

$a \rightarrow c$
 $b \rightarrow d$

т.е. совпад. при повороте

повороте точки a на 90° , аналогично d попу. при повороте b на 90° . Такая точка ровно 1. т.к.

1	2
4	3

при повороте 1 кв. переходит во 2, 2 в 3, 3 в 4, 4 в 1. \Rightarrow Выбраны точки a и b а

или наоборот. отрез. точки c и d так. ~~Решение~~

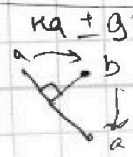
В каждом способу соответствует 1 способ совпадения на $+90^\circ$, и 1 совпадающий на -90° .

③ поворот на 180° аналогично $(a, b) \rightarrow (c, d) \Rightarrow a \rightarrow c, b \rightarrow d$ и т.н операции поворота на $+180^\circ$ и на -180° совпадают по (a, b) совпа. ровно 1 пара совпадающих при повороте на $\pm 180^\circ$ отнесит. 0. Также стоит отметить что пара

$(a, b) \rightarrow (a, b)$ при повороте

① $a \rightarrow a \Rightarrow a, b = 0$ - центр
 $b \rightarrow b \Rightarrow a, b$ - разн.

либо $a \rightarrow b$
 $b \rightarrow a$



на $\pm 90^\circ$ т.н тогда противоречие и.н. точки a и b совпадают $\Rightarrow a = b = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но при повороте на $\pm 180^\circ$ они совпасть могут а это случится когда a и b шир. Относите 0.

Итак.

Каждому из способов $(C_{121}^2 - C_{61}^2) = \#$ способов где a и b не шир. Относите 0 сопоставляем 3 группы разн. способа которые совпадают при наложении, а остальные

C_{61}^2 только 2 (без способа поворота на 180°)

Итак ответ: $\frac{C_{121}^2 - C_{61}^2}{3} + \frac{C_{61}^2}{2}$ т.к. у шир. при повороте на 90° совпадают

$$C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60$$

$$C_{61}^2 = \frac{61 \cdot 60}{2} = 61 \cdot 30$$

~~2725~~ 2725

$$\frac{121 \cdot 60 - 61 \cdot 30}{3} + \frac{61 \cdot 30}{2} = \frac{121 \cdot 20 - 61 \cdot 10 + 61 \cdot 15}{1} =$$

$$= 242 \cdot 10 + 61 \cdot 5 = 2420 + 305 = 2725$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 5 \\ \hline 305 \end{array}$$

Ответ: 2725

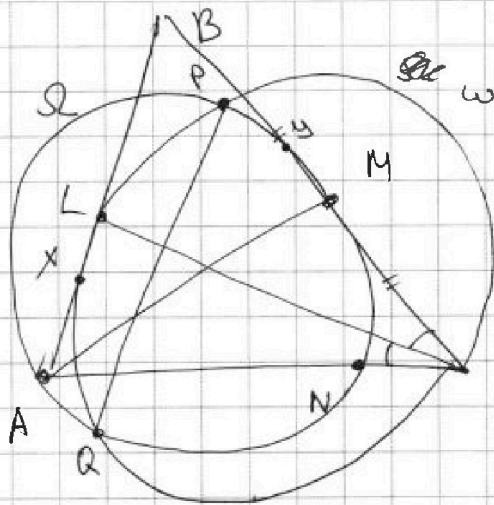


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$PQ \perp AC$

1) CX - высота к AB

$\angle LXC = 90^\circ$ (LC - диаметр
г Γ ω)

AY - высота к BC

$\angle MYA = 90^\circ$ (AM диаметр
г Γ ω)

X - пересек. $CX \perp AB$, Y пересек. $AY \perp BC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$f(1) = 1 - 4 + 1 - 6 - 4 < 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 16 - 32 + 4 - 12 - 4 < 0$$

$$f(4) = 256 - 64 \cdot 4 + 16 - 24 - 4 = 16 - 24 - 4 = -12 < 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

~~$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$~~

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 + 1 - x) + x^3$$

$$-4x^3 - 4 = -4(x^3 + 1) = -4(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 6x = x(x^2 - 6)$$

$$(x^2 - 1 - x)(x^2 - 4x - 4) + x(x^2 - 6)$$

$$x = 5$$

$$16 + 4 = 20$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$81 - 4 \cdot 27$$

$$-27 + 9 - 18 - 4 < 0$$

$$x = d + a$$

$$\begin{cases} x + a = d + a \\ 2x + 2a = 2d + 2a \\ 3x + 3a = 3d + 3a \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - dy| \leq d \\ |2x - y| = 1 \end{cases}$$

$$y + dx$$

$$\begin{cases} x \geq dy \\ 2x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - dy \leq d \\ 0 \leq 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - dy < d \\ 2x - y < 1 \end{cases}$$

$$y \geq 2x \geq 4y \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq dy \\ 2x \geq y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq dy \\ 2x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$2y = d + x \Rightarrow y = \frac{d+x}{2}$$

$$\begin{cases} x < dy + d \\ 2x < y + 1 \\ x < \frac{y+1}{2} \end{cases}$$

$$x < \frac{2}{3} + 2$$

$$x < \frac{2}{3}$$

$$y + 2x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{y+1}{2} > dy \\ y+1 > 4y \\ 1 > 3y \\ \frac{1}{3} > y \Rightarrow x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x \leq y+1 \\ 4y = y+3 \\ y \leq 1 \\ 2x \leq d \\ x \leq 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_4 &= a \\ a_5 &= a + b \\ a_6 &= a + 2b \\ a_9 &= a + 6b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 6 - 9x \\ (x^2 - 2x)^2 = a + 2b \\ 9x^2 = a + 4b \end{cases} \begin{cases} x^4 + 4x^2 - 4x^3 = 6 - 9x + 2b \\ 9x^2 = 6 - 9x + 4b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4b &= 9x^2 + 9x - 6 \\ 2b &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \\ 9x^2 + 9x - 6 &= 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \end{aligned}$$

$$2x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$$

$$\sqrt{56} = 7.8$$

$$x^2(2x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \quad x_3 = \frac{4 - \sqrt{56}}{4}$$

$$x_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \quad x_3 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$7.5 =$$

$$\frac{\sqrt{56}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$



$$\begin{aligned} a &= 6 \\ 6 &= 6 + 2b \Rightarrow b = -3 \\ 6 &= 6 + \end{aligned}$$

$$6k = 9x^2 + 9x - 6 = 3(3x^2 + 3x - 2)$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$\begin{aligned} 2k &= 3x^2 + 3x - 2 \\ 4k &= 6x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

$$4k = 6 \cdot \left(x + \frac{3 - \sqrt{33}}{6}\right) \left(x + \frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} 4k &= (5x - x^2)(x^2 + x) \\ 4k &= (5x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x) \\ 4k &= (5x - x^2 - 6 + 9x)(x + 1) \\ 2k &= (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x \\ 2k &= x^4 + 4x^2 - 4x^3 + 9x - 6 \end{aligned}$$

$$4k = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$16 - 4 \cdot 8 + 4 = 12 - 4 = 0$$

$$x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{33}}{12}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{33}}{12}$$

$$a = 6 - 9x$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 1)(x^2 - 4x) = 2x + 4 \\ &= (6 - 9x) \cdot x \\ &= 4x^2(x^2 + 1) - 4x^3(x^2 + 1) + 2x - 4 \end{aligned}$$

9x²

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4$$

$$a = \dots$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including a QR code, instructions, and a solution for a geometry problem. The solution involves a triangle with sides 4, 6, and 4, and a point X on the side of length 6. The goal is to find the length of AX.

Problem Statement: In a triangle with sides 4, 6, and 4, a point X is on the side of length 6. The angle between the side of length 4 and the segment AX is 30° . Find the length of AX.

Solution:

Let the triangle have vertices A, B, and C, with AB = 4, BC = 6, and AC = 4. Let X be a point on BC such that $\angle BAX = 30^\circ$. We need to find AX.

Using the Law of Cosines in $\triangle ABC$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$4^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos B$$

$$16 = 16 + 36 - 48 \cos B$$

$$-20 = -48 \cos B$$

$$\cos B = \frac{5}{12}$$

Using the Law of Sines in $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{4}{\sin B} = \frac{6}{\sin A}$$

$$\sin A = \frac{3 \sin B}{2}$$

Using the Law of Sines in $\triangle ABX$:

$$\frac{AX}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle AXB}$$

$$\frac{AX}{\sin B} = \frac{4}{\sin \angle AXB}$$

Using the Law of Sines in $\triangle ACX$:

$$\frac{AX}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle AXC}$$

$$\frac{AX}{\sin C} = \frac{4}{\sin \angle AXC}$$

Since $\angle AXB + \angle AXC = 180^\circ$, we have $\sin \angle AXB = \sin \angle AXC$.

Therefore, $\frac{AX}{\sin B} = \frac{4}{\sin \angle AXB} = \frac{4}{\sin \angle AXC} = \frac{4}{\sin C}$.

Thus, $AX = \frac{4 \sin B}{\sin C}$.

Using the Law of Sines in $\triangle ABC$ again:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{4}{\sin C} = \frac{6}{\sin A}$$

$$\sin C = \frac{2 \sin A}{3}$$

Substituting $\sin A = \frac{3 \sin B}{2}$ into $\sin C = \frac{2 \sin A}{3}$:

$$\sin C = \frac{2 \cdot \frac{3 \sin B}{2}}{3} = \sin B$$

Since $\sin C = \sin B$, we have $C = B$ or $C = 180^\circ - B$. Since C and B are angles in a triangle, $C = B$.

Therefore, $AX = \frac{4 \sin B}{\sin B} = 4$.

The length of AX is 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{9 - b^2} \quad 4 + 5x - y^2 \geq 0$$

$$7 - y \geq 0 \quad y^2 \geq 0$$

$$a^2 = \dots \quad 2x^4 + 8x^2 + 8x^3 + 9x - 6 = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$a^2 = 9 - b^2 \quad b^2 = 9$$

$$2x^4 + 8x^2 + 8x^3 + 9x - 6 = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 9x - 6 = 0$$

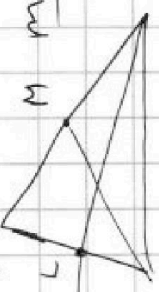
$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$y - dx \geq 0 \Rightarrow y \geq dx$$

$$\frac{x+2}{2} \geq dx$$

$$\frac{x+2}{x+2} \geq 4x$$

$$2 \geq 3x$$

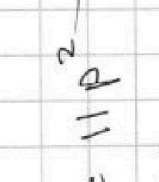


$$(7 - m + n)(m + n) = (m + n)^2 - m^2 - n^2$$

$$= (m + n)^2 - m^2 - n^2$$

$$y = \frac{x+2}{2}$$

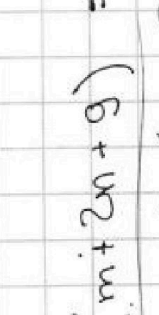
$$y \leq \frac{x+2}{2}$$



$$(m + n)^2 - m^2 - n^2 = 2mn$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2 + 4mn + 4n^2 + 9mn$$

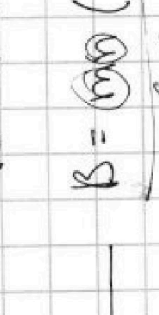


$$A = (m + n)^2 - m^2 - n^2$$

$$B = (m + n)^2 + 9mn$$

$$dy - x \leq 2$$

$$dy - 2x \leq 1$$



$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 0$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 + 9mn = 0$$

$$x \leq dy$$

$$2x \leq dy$$



$$5 - m + 11 = 0$$

$$6 + m + 11 = m$$

$$6 + m + m = m$$

$$11 = m$$

$$a^2 = 9 - b^2$$

$$b^2 = 9$$

$$2x^4 + 8x^2 + 8x^3 + 9x - 6 = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(33 - 31)(33 + 31) = 32^2 = 63$$

$$31^2 + 9 \cdot 4 = 31^2 + 36 = 32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$a^2 = 9 - b^2$$

$$b^2 = 9$$

$$2x^4 + 8x^2 + 8x^3 + 9x - 6 = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

$$32^2 = 63$$

