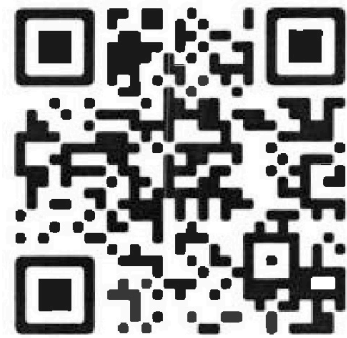




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in \mathbb{R} : \exists \text{ геом прогрессия } \text{также, что } a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, a_{10} = x+4,$$

$$a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Rightarrow$$

$$a_4 = a_1 q^3, a_{10} = a_1 q^9, a_{12} = a_1 q^{11} \quad (a_1 \text{ и } q \neq 0)$$

$$\frac{a_{12}}{a_4} = (x-3)^2 = q^8, a_4 = a_{12} = \sqrt{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^2}} = \left| \frac{15x+6}{x-3} \right| = a_1^2 q^{14}$$

$$a_{10}^2 = a_1^2 q^{18} = (x+4)^2 \Rightarrow \frac{a_{10}^2}{a_4 \cdot a_{12}} = q^4 = (x+4)^2 \cdot \left| \frac{x-3}{15x+6} \right| \Rightarrow$$

$$q^8 = (x+4)^4 \cdot \frac{(x-3)^2}{(15x+6)^2} = (x-3)^2 \quad ((x-3) \neq 0) \text{ поделим на } (x-3)^2$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2 \Rightarrow ((x+4)^2 - 15x - 6)((x+4)^2 + 15x + 6) = 0$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 23x + 22) = 0$$

$$(x-5)(x-2)(x+22)(x+1) = 0$$

$$x=5; x=2; x=-22; x=-1;$$

$$a_1 \text{ и } q \neq 0, \text{ т.к. если } a_1 \text{ или } q = 0, \text{ то } a_4 = a_{10} = a_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$x+4=0 \text{ и } 15x+6=0 \text{ (это не правда)} \Rightarrow a_1 \text{ и } q \neq 0 \Rightarrow$$

$$a_4, a_{10}, a_{12} \neq 0 \Rightarrow x+4 \text{ и } 15x+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \text{ и } x \neq -\frac{2}{5}$$

$$\text{и } x \neq 3 \text{ (т.к. } x-3 \text{ в знаменателе)}$$

Тогда при $x=5, x=2, x=-22, x=-1 \exists a_1 \text{ и } q$ (q находим из уравнения $(x-3)^2 = q^8, a_1$ и a_{10})

Ответ: 5, 2, -22, -1;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Если $y < 20$, то $|y-20| + 2|y-35| = (35-y) \cdot 2 + 20-y \Rightarrow$
 $|y-20| + 2|y-35| > 2 \cdot 15$, но $\sqrt{225-z^2} \leq 15 \Rightarrow y \geq 20$;

Если $y > 35$, то $|y-20| + 2|y-35| = 20-y + (35-y) \cdot 2 > 15$, но $\sqrt{225-z^2} \leq 15$

Значит, $20 \leq y \leq 35 \Rightarrow$

$$\sqrt{225-z^2} = (35-y) \cdot 2 + y - 20 = 50 - y \geq 50 - 35 \geq 15, \text{ но } \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

$\Rightarrow y = 35, z = 0$; Тогда 1-ое уравнение имеет вид:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = a \geq 0 \\ \sqrt{5-x} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 12; \text{ и } a - b + 6 = 2ab$$

Пусть $a - b = k, 2ab = l \Rightarrow k + 6 = l$ и $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
 $\Rightarrow k^2 = 12 - l \Rightarrow k + 6 = l$ и $l = 12 - k^2 \Rightarrow$

$$k + 6 = 12 - k^2 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow (k+3)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 2 \end{cases}$$

1 случай: $k = 2 \Rightarrow l = 8 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow (2+b)b = 4$

$$\Rightarrow b^2 + 2b - 4 = 0 \Rightarrow b = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}, b \geq 0 \Rightarrow b = \sqrt{5} - 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{5} + 1 \text{ и } b = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow x = 6 + 2\sqrt{5} - 7 = 2\sqrt{5} - 1 \\ \sqrt{5-x} = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = 5 - 6 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

Тогда $x = 2\sqrt{5} - 1, y = 35, z = 0$

2 случай: $k = -3 \Rightarrow l = 3 \Rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ 2ab = 3 \end{cases} \Rightarrow b = a + 3 \Rightarrow 2a(a+3) = 3$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}, a \geq 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15} - 3}{2};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} \Rightarrow \sqrt{x+7} = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} \Rightarrow x = -\frac{6\sqrt{15} + 4}{4} \\ a = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} \Rightarrow \sqrt{5-x} = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} \Rightarrow x = -\frac{6\sqrt{15} + 4}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{15} + 2}{2} \\ y = 35; z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\frac{3\sqrt{15} + 2}{2}; 35; 0)$ и $(2\sqrt{5} - 1; 35; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти все p : если ≥ 1 решение у уравнения

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \end{array}$$

Пусть $\cos x = a$, где $|a| \leq 1 \Rightarrow 4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p$;

Если $\exists \geq$ одно $a: |a| \leq 1$, то \exists решение для x ;

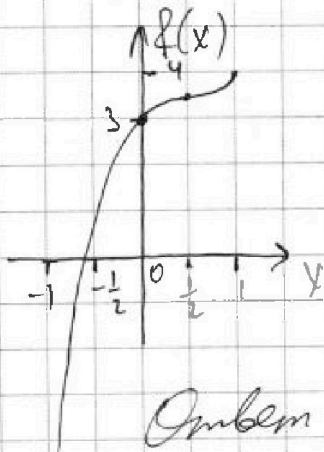
$$\underbrace{4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p}_{f(a) \Rightarrow f(a) = p} \quad |a| \leq 1 \quad f'(a) = 12a^2 - 12a + 3 = 3(2a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow f(a) \nearrow \text{ при } |a| \leq 1;$$

$$f''(a) = 24a - 12 = (2a-1) \cdot 12, \text{ если } a \leq \frac{1}{2}, \text{ то } f''(a) < 0$$

$\Rightarrow f(a)$ выпукла вверх, если $a > \frac{1}{2}$, то $f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ выпукла вниз;

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10, \quad f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4, \quad f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{4 - 12 + 12}{8} + 3 = 3,5$$



$f(x) = p$ - это горизонтальная прямая и она пересекает $f(x) \Rightarrow$

$-10 \leq p \leq 4$, так $f(x) \nearrow$, то решение для $\forall p$ единственное;

Остаток можно угадать без калькулятора в зависимости от p , но если сказать, что $x = k(p)$ подходит;

Ответ: $-10 \leq p \leq 4$

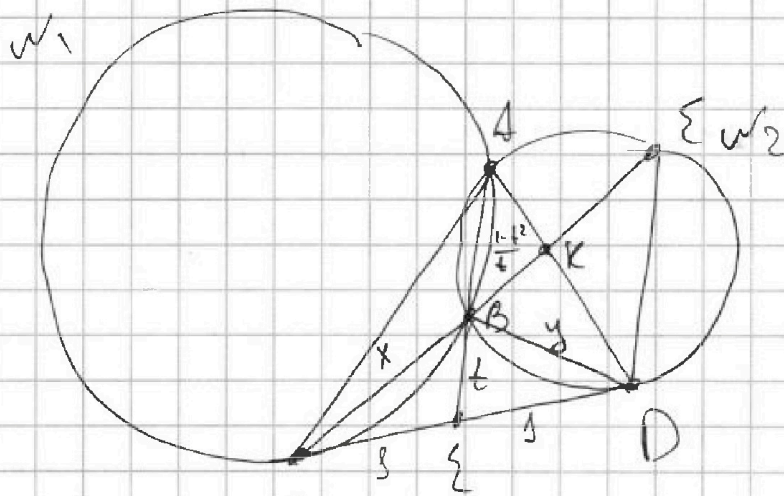


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{ED}{CD} = ?$

Если $\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$

AB-радиус осей w_1 и w_2
 $\Rightarrow E$ - середина CD ;
 Пусть $CE = ED = y$
 Пусть $CB = x, BD = y$
 $\triangle CBD$
 по т касан. найдем BE :

$$x^2 = 1 + t^2 - 2t \cos \alpha \quad (\triangle CEB) \Rightarrow x^2 y^2 = 2 + 2t^2 \Rightarrow x^2 y^2 = 2 + t^2$$

$$y^2 = 1 + t^2 - 2t \cos \alpha \quad (\triangle BED)$$

ст точки E осей w_1 : $8 \cdot 1 = t \cdot EA \Rightarrow EA = \frac{1}{t} \Rightarrow BA = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$

$\triangle BED \sim \triangle DEA$ (ED - кас к w_2) $\Rightarrow \frac{AD}{y} = \frac{1}{t} \Rightarrow AD = \frac{y}{t}$

по т Менелая в $\triangle EAD$

и применим CBK :

$$\frac{DK}{KA} \cdot \frac{1-t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{DK}{KA} = \frac{2t^2}{1-t^2} \quad \text{и} \quad DK + KA = \frac{y}{t}$$

$$\Rightarrow DK = \frac{2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{y}{t} \quad \text{и} \quad KA = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{y}{t}$$

$\triangle CBD \sim \triangle CDE$ (CD кас к w_2) $\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{DB}{BC} = \frac{y}{x}$

ст точки C осей w_2 : $y = x \cdot CE \Rightarrow CE = \frac{y}{x} \Rightarrow BE = \frac{y}{x} - x = \frac{y-x^2}{x}$

ст точки K осей w_2 : $BK \cdot BE = AK \cdot KD = \frac{2t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{y^2}{t^2}$

$$\Rightarrow BK \cdot KE = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2} \quad \text{и} \quad BK + KE = \frac{y-x^2}{x}$$

Но $\frac{x+BK}{KE} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{x+BK+KE}{KE} = \frac{34}{25}$

$$\frac{y}{x \cdot KE} = \frac{34}{25} \Rightarrow KE = \frac{100}{34x} \Rightarrow BK = \frac{y-x^2}{x} - \frac{100}{34x} = \frac{36-34x^2}{34x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BK \cdot KE = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2}, \quad BK = \frac{36-34x^2}{34x}, \quad KE = \frac{100}{34x}$$

$$t^2 = \frac{x^2 y^2 - 2}{2}, \quad \text{хотим найти } y = ?$$

$$\frac{(36-34x^2)100}{34^2 x^2} = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{(36-34x^2)100}{34^2 x^2 y^2}$$

$$1-t^2 = 1 - \frac{x^2 y^2 - 2}{2} = \frac{2 - x^2 y^2 + 2}{2} = \frac{4 - x^2 y^2}{2}$$

$$1+t^2 = 1 + \frac{x^2 y^2 - 2}{2} = \frac{x^2 y^2}{2}$$

$$\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2 \cdot \frac{4-x^2 y^2}{2}}{\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right)^2} = 4 = \frac{4-x^2 y^2}{(x^2 y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4-x^2 y^2}{(x^2 y^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 x^2 y^2} \quad \text{Пусть } y = ax \Rightarrow y^2 = a^2 x^2$$

$$\frac{4-x^2(1+a^2)}{x^4(1+a^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 x^4 a^2} \quad | \cdot x^4 \Rightarrow \frac{4-x^2(1+a^2)}{(1+a^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 a^2}$$

$$4 \cdot 34^2 a^2 - x^2(1+a^2)34^2 a^2 = 25(36-34x^2)(1+a^2)^2 =$$

$$= 25 \cdot 36 \cdot (1+a^2)^2 - 25 \cdot 34x^2(1+a^2)^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 34^2 a^2 - 25 \cdot 36(1+a^2)^2 + 25 \cdot 34x^2(1+a^2)^2 - x^2(1+a^2)34^2 a^2 = 0$$

$$4(34a - 5 \cdot 3(1+a^2))(34a + 5 \cdot 3(1+a^2)) + 34x^2(1+a^2)(25+25a^2 - 34a^2) = 0$$

$$4(15a^2 + 34a + 15)(34a - 15a^2 - 15) + 34x^2(1+a^2)(25 - 9a^2) = 0$$

$$a = \frac{5}{3}: 15a^2 - 34a + 15 = 15\left(a - \frac{5}{3}\right)\left(a - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow 34a - 15a^2 - 15 = \left(a - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{9}{5} - a\right)15$$

$$a = -\frac{5}{3}: 15a^2 + 34a + 15 = 15\left(a + \frac{5}{3}\right)\left(a + \frac{3}{5}\right)$$

$$4(15a^2 + 34a + 15)(34a - 15a^2 - 15) = 4 \cdot 15^2 \left(a^2 - \frac{25}{9}\right)\left(\frac{9}{25} - a^2\right)$$

$$\left(a^2 - \frac{25}{9}\right)\left(4 \cdot 15^2 \left(\frac{9}{25} - a^2\right) + 34x^2(1+a^2) \cdot 9\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \text{ или}$$

$$\underbrace{34x^2(1+a^2)9}_{>0} + \underbrace{\left(a^2 - \frac{9}{25}\right)}_{>0} \cdot 4 \cdot 15^2 = 0, \text{ но } a > 1, \text{ т.к. } ED > DC;$$

$$\text{Значит } \Sigma > 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{5}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 3\cos 2x = 6\cos^2 x - 3 \quad f(a) = 4a^3 - 6a^2 + 3a + 3$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^2 x + p - 3$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x = p - 3$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$$|a| \leq 1$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 - p = 0$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p$$

$$f(a) \text{ при } |a| \leq 1$$

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 3$$

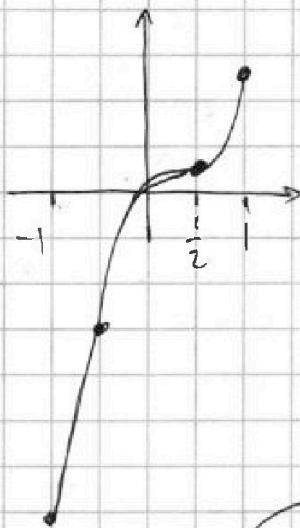
$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3$$

$$f''(x) = 24x - 12$$

$$f'(a) = 12a^2 - 12a + 3 = 3(4a^2 - 4a + 1) = 3(2a-1)^2 \geq 0$$

$$a \leq \frac{1}{2} \quad f''(a) < 0 \Rightarrow \text{впадин}$$

$$a > \frac{1}{2} \quad f''(a) > 0 \Rightarrow \text{выпукл}$$



$$2 \leq p \leq 4$$

$$p = 2 + k \quad (0 \leq k \leq 2)$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = 2 + k$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 = k \quad (0 \leq k \leq 2)$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 \quad |a+1$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 + 4a^2 \\ -10a^2 + 3a \\ -10 - 10a \\ \hline 16a + 1 \end{array}$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 = k$$

$$\begin{array}{r} -4 - 6 - 3 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 13 = 13$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 13 \quad |a+1$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 + 4a^2 \\ -10a^2 + 3a \\ -10a^2 - 10a \\ \hline 13a + 13 \end{array}$$

$$4a^2 - 10a + 13$$

$$(a+1)(4a^2 - 10a + 13) = 13$$

$$-10$$

$$-4 - 6 = -10$$

$$4 + 6 = 10$$

$$f(-1) = -4 - 6 + 3 - 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$-10 \leq p \leq 4$$

$$p = -10 + t$$

$$0 \leq t \leq 14$$

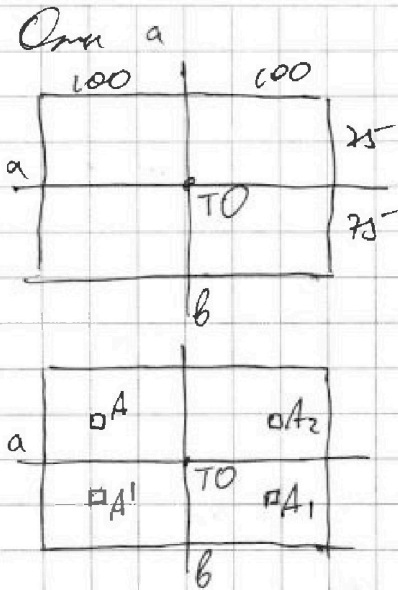


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Тогда в верхней половине
необходимо выбрать 4 клетки
 C_{15000}^4 ;

Тогда мы получаем ещё
семь отки $ТО$ и др b ;

Посмотрим на ам. отки a и b

Отки же есть клетка A

или семим отки a клетка A' ;

или семим отки b клетка A_1 ;

или семим отки a клетка A_2 ;

Тогда хотим выбрать 2 клетки
в каком-то квадрате, это
 C_{2500}^2 ;

Но сем. отки a и b или отки a и $ТО$ совпадают \Rightarrow

необходимо только один раз вычесть C_{2500}^2 ;

Тогда только отки a без b и $ТО$: $C_{15000}^4 - C_{2500}^2$

\rightarrow общее кол-во равно $3 C_{15000}^4 - 2 C_{2500}^2$

Ответ: $3 C_{15000}^4 - 2 C_{2500}^2$

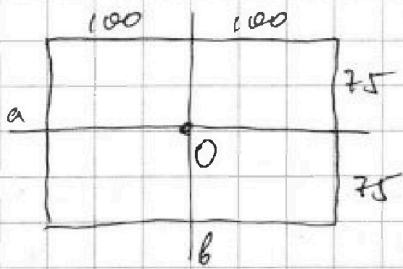


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

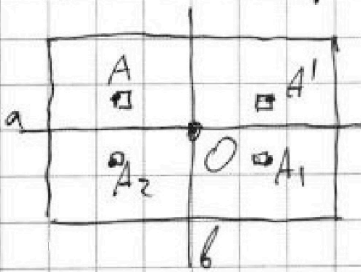


Посчитаем кол-во симметрий относительно b ;
Значит, мы выделали слева от b 4 клетки и берем симметрии в правой части;

C_{15000}^4 (отн b)
 C_{15000}^4 (отн τO)

Теперь посчитаем отн τO ;
Это значит, что слева от b снова 4 клетки и мы их симметрием отн. τO
То есть опять выделим 4 из половины доск сложим их, тогда

мы посчитаем симметрию отн. τO и прямой b .
Единицы и дванди посчитали симметрию отн. τO и прямой b вместе взятый;
То есть необходимо вывести X (кол-во симметрий отн. τO и пр b)



Пусть есть клетка A , симм. ей симм. A' отн. b
Симметр A_1 , отн. O и симм. A_2 симм. A_1 отн. O

Получим прямоугольный симметр отн. $a, b, \tau O$

Значит необходимо выделить еще $3B$ (клетки)

какую-то; Тогда от хотим выделить 3 клетки в левом верхнем квадрате (отличные выходящая един. стороны) $\rightarrow X = C_{2500}^3$

$2C_{15000}^4 - C_{2500}^3$ это отн. b , отн. τO ;

Теперь хотим добавить кол-во симметрий отн. a , без b и τO ;

Посчитаем возможные симметрии отн. a ;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ a > b \\ a - b \nmid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$a > b \Rightarrow (a-c) > (b-c) \\ \Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \end{cases} \quad \text{т.к. } p^2 = p \cdot p, 1 \cdot p^2 \\ \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \end{cases} \quad \text{не возможно, т.к. } a > b$$

$$a - b = p^2 - 1 \text{ и } a - b \nmid 3$$

$$\text{Если } p \nmid 3, \text{ то } p \equiv \pm 1 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \Rightarrow p^2 - 1 \nmid 3 \Rightarrow a - b \nmid 3$$

$$\text{Значит, } p \nmid 3, \text{ } p\text{-натурал} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow a - b = 8$$

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b = 812 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0 \\ D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2 \\ \Rightarrow b = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 28 \Rightarrow a = 36 \\ b = -29 \Rightarrow a = -21 \end{cases}$$

Итак

$$b = 28, a = 36 \text{ и } b - c = 1 \Rightarrow c = 27 \quad (36; 28; 27) \\ b = 28, a = 36 \text{ и } a - c = 1 \Rightarrow c = 37 \quad (36; 28; 37)$$

$$b = -29, a = -21 \text{ и } b - c = 1 \Rightarrow c = -30 \quad (-21; -29; -30)$$

$$b = -29, a = -21 \text{ и } a - c = 1 \Rightarrow c = -20 \quad (-21; -29; -20)$$

$$\text{Ответ: } (36; 28; 27), (36; 28; 37), (-21; -29; -30), (-21; -29; -20);$$

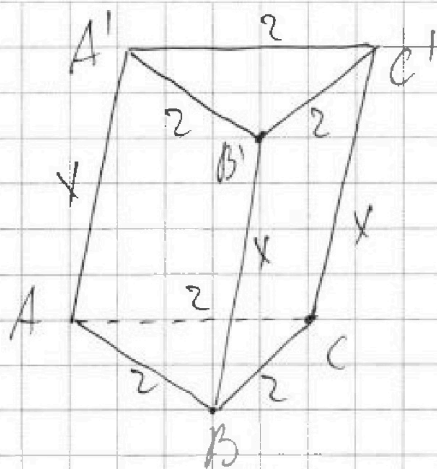


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



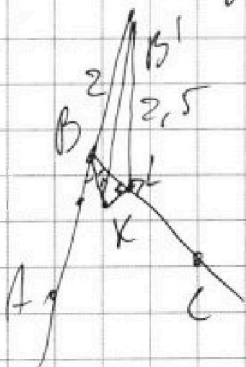
$$S_{ABB'A'} = S_{BCC'B'} = 5$$

По длине стороны и площади параллелограмма однозначно задается \Rightarrow четырехугольники $ABB'A'$ и $BCC'B'$ равны;

и это

Тогда заметим, что картинка симметрична относительно плоскости проходящей через середину отрезка AC (TM), точку B и перпендикулярную плоскости (ABC) ; (назовем эту плоскость α)

Посмотрим на $\angle AA'B'C'$ глазами при взгляде



Спроецируем B' в m (ABC) в K

Тогда из симметрии BK для $\angle ABC$ и $BK \perp KB'$

Также заметим, что m — картинка симметрична отн. α , то высота в $AA'B'C'$ совпадает по длине с $B'B$

(прямо $AA'B'C'$ — тригранник

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad (S_{AA'B'C'}) \Rightarrow KB' = 2$$

Проецируем B' на AB в L : Тогда $B'L \cdot 2 = 5$

$$\Rightarrow B'L = 2,5$$

По теореме о трех \perp : $KL \perp BC$;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 3,5 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{array}$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{(-\frac{1}{2}-3)(-\frac{1}{2}-3,5)(-\frac{1}{2}-4)} + \frac{1}{2} \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{(3,5+\frac{1}{2})(3,5-3)(3,5-4)} + 10 \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{(4+\frac{1}{2})(4-3)(4-3,5)}$$

$$y = +\frac{1}{2} \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{+3,5+4+4,5} + \frac{1}{2} \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{4+0,5-\frac{1}{2}} + \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{4,5+1+0,5}$$

$$y = \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{7+4+9} - \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{4+0,5-2} + \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{4,5+0,5}$$

$$y = \frac{(x-3)(2x-7)(x-4)}{7+4+9} - \frac{(2x+1)(x-3)(x-4)}{4} + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{9}$$

$$y = \frac{(x-3)(x-4)}{4} \left(\frac{2x-7}{7+9} - 2x-1 \right) + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{4+9+4} =$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)}{4} \left(\frac{2x-7}{16} - 2x-1 \right) + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{17}$$

$$\frac{2x^3}{7+9} - \frac{2x^3}{4} + \frac{2x^3}{9} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$2x^3 -$$

$$\frac{1}{7+9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9-36+16}{144} = \frac{-11}{144}$$

$$29+63 = 92$$

$$\frac{92}{7+9} = \frac{92}{16} = 5,75$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - 1 = p - 4$$

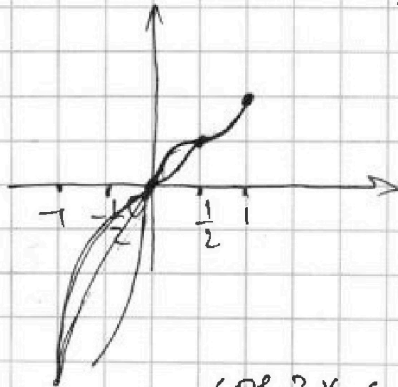
$$\begin{array}{r} 4a^3 - 6a^2 + 3a - 1 \quad | \quad a-1 \\ \underline{-4a^3 + 4a^2} \\ -2a^2 + 3a \\ \underline{-2a^2 + 2a} \\ a-1 \end{array}$$

$$(a-1)(3a^2 + (a-1)^2) = p - 4$$

$$\begin{array}{l} < 0 & \geq 0 \\ 4a^3 - 6a^2 + 3a = p - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p - 4 \leq 0 \\ p \leq 4 \end{array}$$

$$a(4a^2 - 6a + 3) = f(a) \quad D = 36 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$$



$$\begin{aligned} f'(a) &= 12a^2 - 12a + 3 = \\ &= 3(4a^2 - 4a + 1) = \\ &= 3(2a - 1)^2 \geq 0 \\ & \quad \underline{a = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$4 - 6 + 3 = 1$$

$$\frac{1}{2}(1 - 3 + 3)$$

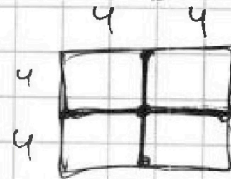
$$-1(4 + 6 + 3) = -13$$

$$-13 \leq p - 3 \leq 1$$

$$\boxed{-10 \leq p \leq 4}$$

$$\cos 3x = 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$-10 \leq p \leq 10$$



$$C_{15000}^4$$

$$C_{a-x}$$

$$15 \cdot \frac{5}{3} = x = 15$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2-z} \\ |4-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \end{cases}$$

$$\text{или } y \leq 20, \text{ или } y \geq 35 \Rightarrow 20 \leq y \leq 35$$

$$y - 20 + 2(35 - y) = \sqrt{225 - z^2}$$

$$15 \leq 50 - y = \sqrt{225 - z^2} \leq 15$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\boxed{y=35 \quad z=0}$$

$$\sqrt{x+7} = a, \quad \sqrt{5-x} = b \quad (x+7)(5-x)$$

$$2ab - a + b - 6 = 0$$

$$2ab - a + b = 6 \Rightarrow b = \frac{a+6}{2a+1}$$

$$b^2 = \left(\frac{a+6}{2a+1}\right)^2$$

$$x = a^2 - 7$$

$$5 - \left(\frac{a+6}{2a+1}\right)^2 = x = a^2 - 7$$

$$\frac{20a^2 + 20a + 5 - a^2 - 12a - 36}{4a^2 + 4a + 1} = a^2 - 7$$

$$4a^4 + 4a^3 - 46a^2 - 36a + 24 = 0$$

$$\boxed{5 \geq x \geq -7}$$

$$2ab - a + b - 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = a^2 - 7 \\ 5 - b^2 = x \end{cases}$$

$$5 - \frac{a^2 + 12a + 36}{4a^2 + 4a + 1}$$

$$16a^2 + 8a - 31 = 4a^4 + 4a^3 + a^2$$

$$-28a^2 - 28a - 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{Z} : \\ a > b \\ a - b \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (a-c)(b-c) = p^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a-b = p^2 - 1 \\ a-b = p^2 - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{array} \right. \quad p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$p \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 1, 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \nmid 3 \quad p = 3$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a = p - 3$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - 1 = p - 4$$

$$a - b = 8$$

$$a + b^2 = 820$$

$$b^2 + b = 812$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249$$

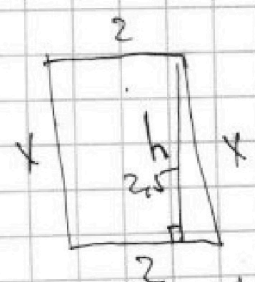
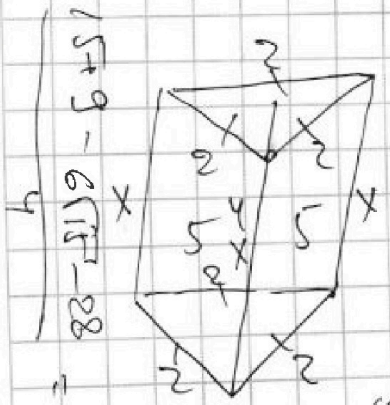
$$b = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$\begin{array}{r} +57 \\ 57 \\ \hline 399 \\ +285 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$p = ?$$

$$p \geq 1 \text{ prime}$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos x$$



$$2h = 5$$

$$h = 2.5$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) - 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 3 \cos 2x - p = 0$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) - p = 0$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

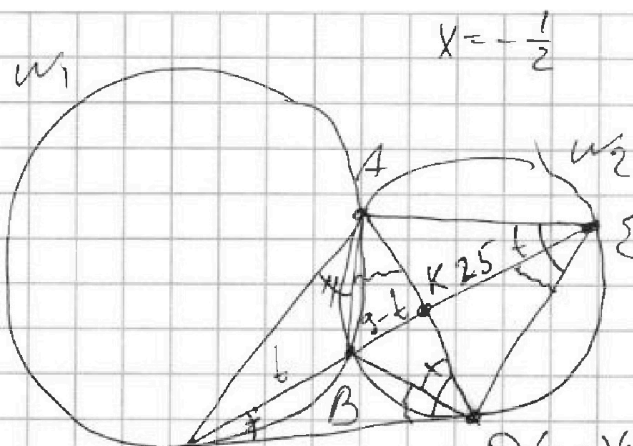
$$\begin{array}{r} 15 + 9 - 6\sqrt{17} - 28 \\ \hline -6\sqrt{17} - 4 \\ \hline \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{c} = ?$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 \\ 3,5 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} ED \\ c \end{matrix}$$

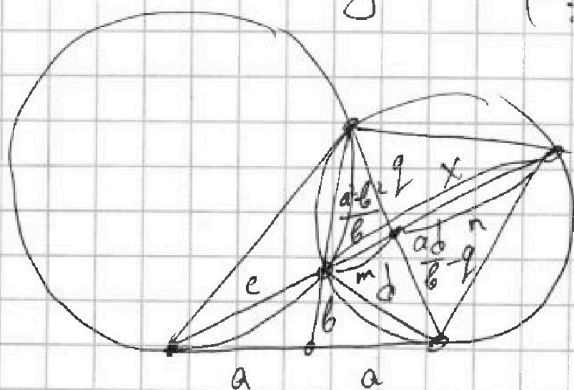
$$4 \cdot 4a^2 = c(c+x)$$

$$\frac{4a^2}{c} - c = x$$

$$\frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot D(x-3)(x-3,5)(x-4)x = \frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}-3,5\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right) = b(b-x)$$



$$\frac{a^2}{b} - b = x$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = x$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{m}$$

$$m = \frac{ad}{b}$$

$$\left(\frac{ad}{b} - q\right) \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{2a^2}{2a} = 1$$

$$\frac{ad}{bq} - 1 = \frac{2b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{ad}{bq} = \frac{2b^2}{a^2 - b^2} + 1 = \frac{2b^2 + a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$mn = \left(\frac{ad}{b} - q\right)q$$

$$m+n = \frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$\frac{ad}{b} - \frac{ad}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} =$$

$$q = \frac{ad}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{ad}{b} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{ad}{b} \left(\frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{ad \cdot 2b^2}{b(a^2 + b^2)} = \frac{2abd}{a^2 + b^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$mn = \frac{2abd}{a^2+b^2} \cdot \frac{ad}{b} \cdot \frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2} = x$$

$$m+n = \frac{4a^2-c^2}{c} = y$$

$$k^2 - yk + x = 0$$

$$k = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x}}{2}$$

$$n = \frac{100a^2}{34c}$$

$$m = \frac{4a^2-c^2}{c} - n = \frac{(4a^2-c^2) \cdot 34 - 100a^2}{34c} = \frac{136a^2 - 34c^2 - 100a^2}{34c} = \frac{36a^2 - 34c^2}{34c}$$

$$\frac{36a^2 - 34c^2}{34c} \cdot \frac{100a^2}{34c} = \frac{2abd}{a^2+b^2} \cdot \frac{ad}{b} \cdot \frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$$

$$\frac{c}{d} = ? \quad b = ax \quad a = 1$$

$$c = ay \quad d = az$$

$$\frac{36a^2 - 34c^2}{34c^2} \cdot 100 = \frac{2d^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\frac{5 \cdot 25 - 34 \cdot 5}{3} = \frac{5 \cdot 3}{3} \Rightarrow 34a = 5 \cdot 3(1+a^2)$$

$$15 \cdot \frac{25}{3} - 34 \cdot \frac{5}{3} = 15a^2 - 34a + 15 = 0$$

$$3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

$$34a = 25 \Rightarrow 34 \cdot \frac{5}{3} = 25 \Rightarrow 170 = 75 \Rightarrow 95 = 0$$

$$x = k(p)$$

$$x = p - 3$$

$$p = 4 \quad x = 1$$

$$p = 3.5 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$p = 3 \quad x = 0$$

$$x = -1 \quad p = -10$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad p = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{4a^2}{cn} = \frac{34}{25}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 16x^2 + 25x^2$$

$$x^2 + 16x^2 - 25x^2$$

$$x^2 + 16x^2 - 25x^2$$