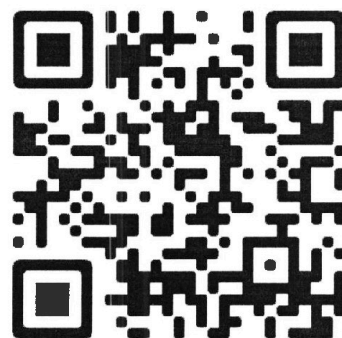




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



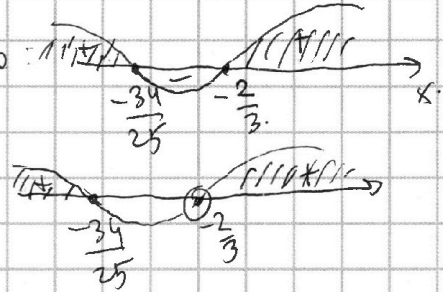
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала найдем ОДЗ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ 3x+2 \neq 0 \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

Теперь отметим монотонность, то $2-x \geq 0$, т.к. пусть q - знаменатель

прописи, а $2-x = x_{12}$, $\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = x_{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{12} = q^2 x_{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} q^2 \geq 0 - \text{т.к. это квадрат} \\ x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \text{ т.к. это корень} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 x_{10} = x_{12} = 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Теперь мы получаем, то $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$

Затем теперь найдем, то т.к. $2-x$ - 12-й член прописи,

а $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$ - 10-й, то то $\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = q^2$

(также отметим, то $x \neq 2$, иначе $2-x=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 0$, но

тогда $x = -\frac{34}{25}$). Аналогично: $\frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3} = q^6$, т.к. это 18-й

и 10-й 12-й члены соответственно

Отсюда следует, то $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{2-x} \Leftrightarrow$

$$(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

т.к. у нас $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$, то $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$

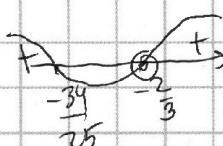
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из метода интервалов для выражения $\frac{25x+34}{3x+2}$: 
 Это приписываем неотрицательные значения на
 множестве чисел x , которое мы рассматриваем \Rightarrow

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2} = \frac{25x+34}{3x+2}$$

Тогда $(2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)(3x+2) - \frac{25x+34}{3x+2} \Leftrightarrow (2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2$

Значит, $\begin{cases} 25x+34 = (2-x)^2 \\ 25x+34 = -(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1): $D = 29^2 + 120 = 841 + 120 = 961 = 31^2$ (2) $D = 441 - 38 \cdot 4 = 289 = 17^2$

$x_1 = \frac{29+31}{2} = 30 \notin \text{ОДЗ}$

$x_1 = \frac{-21+17}{2} = -2 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

$x_2 = \frac{29-31}{2} = -1 \notin \text{ОДЗ}, \text{ м.к.}$

$x_2 = \frac{-21-17}{2} = -19 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

находятся между $-\frac{34}{25}$ и $-\frac{2}{3}$.

Теперь заметим, что все $x \in$ нашему ОДЗ и являющиеся решениями данного уравнения обязательно негодным, т.к. все члены уравнения при $x = -2$ и $x = -19$ будут > 0

и будет выполнено: $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^{3/2}}$ тогда в

числителе q можно будет взять либо $\sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}}$, а

в числителе $x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$.

В таком случае $2-x$ выразится, как $x_{10} \cdot q^2$, т.е. как x_{12} ,

а $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$, как $x_{12} \cdot q^6$, т.е. как $x_{18} \Rightarrow -2$ и -19 негодны.

Ответ: $x_1 = -2$.

$x_2 = -19$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Замена: $t = \cos x \Rightarrow$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$ чтобы уравнение имело решение, нужно, чтобы для корня $t \in [-1; 1]$.

$$p(4t^3 - 3t) + 12t^2 + 12t + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0.$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0.$$

$$(t+1)^3 = -(p-1)t^3$$

$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

Если опустим, то $\sqrt[3]{p-1} \neq -1$, иначе

$(1 + \sqrt[3]{p-1}) = 0 \Rightarrow$ уравнение не имеет корней,

т.е. справа не найд.

тогда $p-1 \neq -1 \Rightarrow p \neq 0.$

Итак, $t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

Мы хотим, чтобы $-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1]$

Пусть $\sqrt[3]{p-1} = k \Rightarrow -\frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Rightarrow 1+k \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \quad \text{м.к.р.}$$

$$\sqrt[3]{p-1} \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Решением для уравнения p является:

$$\cos x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑
Ответ.

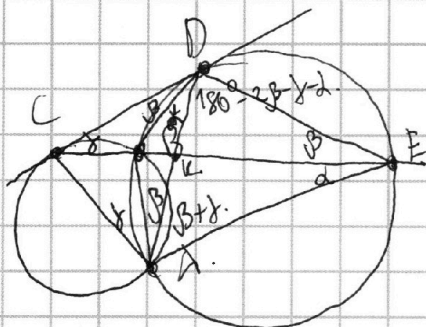
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$.

Тогда из условия: $\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$

Пусть $\angle AEC = \delta$; $\angle CED = \beta$; $\angle CAB = \gamma$. Тогда заметим, что из вписанности $\angle BAD = \angle CED = \beta$. Аналогично $\angle BDK = \delta$.

Теперь заметим, что $\angle CDB = \beta$ — т.к. это угол между касательной CD и хордой BD , на которую опирается вписанный $\angle CED = \beta$. Также, заметим $\angle CAB = \angle DCE = \gamma$. Т.к. DK — высота в $\triangle CDE$, то $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. С другой стороны, по

формуле площади треугольника δ -ка: $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDK}{\frac{1}{2} DE \cdot DK \cdot \sin \angle EDK} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$. Тут имеем, $\angle CDK = \delta + \beta$ (как сумма $\angle CDB$ и $\angle BDK$).

Также $\angle EDK = 180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta = 180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta$ (по сумме углов $\triangle CDE$).

$\Rightarrow \sin \angle EDK = \sin(180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta) = \sin(2\beta + \gamma + \delta)$

$\sin \angle CDK = \sin(\delta + \beta) \Rightarrow \frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$

Тогда $\frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$

Теперь найдем, что $\angle DAE = 180^\circ - \delta - \beta - (180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta) = 180^\circ - \delta - \beta - 180^\circ + \gamma + \delta + 2\beta = \beta + \gamma$ (по сумме углов $\triangle DAE$).

По т. синусов для $\triangle ADE$: $\frac{AE}{\sin(180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta)} = \frac{AD}{\sin(\delta + \beta)} \Rightarrow \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{AD}{AE}$

Тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE}$. Также мы знаем, что $\angle DAE = \beta + \gamma$. Также, $\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \beta + \gamma \Rightarrow AK$ — биссектриса в $\triangle CAE$.

Тогда по свойству б-биссектрисы: $\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. Пусть тогда $AC = 7x$; $AE = 20x$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь заметим, что $\triangle ADC \sim \triangle AED$ (м.к. $\angle CAD = \angle DAE = \beta + \gamma$ и $\angle CDA = \angle DEA = \alpha + \beta$). \Rightarrow из подобия: $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = 7x - 20x = 7 \cdot 20x^2 \Rightarrow AD = x \cdot 2\sqrt{35}$$

Тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{20}{7} \cdot \frac{x \cdot 2\sqrt{35}}{20x} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{35}}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

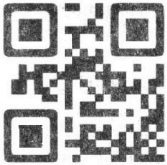
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямоугольник симметричен по одной средней линии, то он центрально-симметричен. Если он симметричен относительно центра и по одной из средних линий, то он также и симметричен и по второй средней линии. Отсюда следует, что либо ни один из прямоугольников обладает всеми тремя свойствами, либо только одна из трёх. Значит, давайте считать количество способов, как количество прямоугольников, симметричных по первой средней линии + количество прямоугольников, симметричных по 2-й средней линии + кол-во прямоугольников симметричных относительно центра - кол-во прямоугольников со всеми свойствами.

Заметим, что кол-во прямоугольников, симметричных относительно 1-й средней линии можно найти следующим образом. Пусть 1-я средняя линия - это верхняя средняя линия. Проведём её. Тогда прямоугольник разделим на 2 равные части, в каждой из которых находится половина всех клеток, т.е. $\frac{500 \cdot 120}{2} = 250 \cdot 120 = 500 \cdot 60 = 30\,000$ клеток. Поместим в левую половину 4 клетки. Тогда по симметрии одновременно заданы правая половина и подбора. 4 клетки размещены определяют собой левую половину, т.е. 4 клетки в ней \Rightarrow кол-во способов равно C_4^{30000} .

Аналогично и для 2-й средней линии кол-во способов равно C_4^{30000} . Заметим, что размещением с центральной симметрией определяются также по одной из половинок прямоугольников одновременно \Rightarrow и для центральной симметрии способов будет C_4^{30000} .

Теперь найдём кол-во способов построить прямоугольник



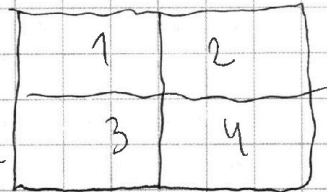
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

С тремя симметриями. Для этого достаточно

разделить квадрат на четыре равных

и.е. выбрать обе средние линии.



Утверждается, что это по четверти

не с осью и единственно возможная расстановка. Это действительно правда, т.к. по симметрии одна вертикальная ср. линия задается 2-й четвертью

ка, по симметрии горизонтальной - 3-й четвертью, а по центральной симметрии - 4-й четвертью.

Так и наоборот, 4-й четвертью с тремя симметриями

задает собой 1-ю четверть, где будет равно 2 клетки \rightarrow кол-во способов построения равно

с 3-ми симметриями равно C_{15000}

\rightarrow кол-во клеток в четверти

иначе кол-во способов равно: $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

и и
Ответ: $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

\rightarrow коэф. равен 2, т.к. расстановка с тремя симметриями не имеет 3-го



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны условия $a^2 + b = 1000$ и условие $a < b$.
Для начала найдем все возможные пары, где $a \geq 0$.

- Возможные пары:
- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0) $a=0$ $b=1000$ | 11) $a=11$ $b=989$ | 21) $a=21$ $b=959$ |
| 1) $a=1$ $b=999$ | 12) $a=12$ $b=988$ | 22) $a=22$ $b=956$ |
| 2) $a=2$ $b=996$ | 13) $a=13$ $b=987$ | 23) $a=23$ $b=951$ |
| 3) $a=3$ $b=991$ | 14) $a=14$ $b=984$ | 24) $a=24$ $b=944$ |
| 4) $a=4$ $b=984$ | 15) $a=15$ $b=975$ | 25) $a=25$ $b=925$ |
| 5) $a=5$ $b=975$ | 16) $a=16$ $b=964$ | 26) $a=26$ $b=874$ |
| 6) $a=6$ $b=964$ | 17) $a=17$ $b=941$ | 27) $a=27$ $b=791$ |
| 7) $a=7$ $b=941$ | 18) $a=18$ $b=904$ | 28) $a=28$ $b=696$ |
| 8) $a=8$ $b=916$ | 19) $a=19$ $b=821$ | 29) $a=29$ $b=629$ |
| 9) $a=9$ $b=881$ | 20) $a=20$ $b=660$ | 30) $a=30$ $b=500$ |
| 10) $a=10$ $b=900$ | 31) $a=31$ $b=399$ | |

Команда $a=32$ b становится меньше чем a .

Проверим, когда $b-a \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow b-a \equiv 0 \pmod{3}$.

$$b = 1000 - a^2 \Rightarrow 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 1 \equiv \frac{a^2 + a}{3}$$

при $a \equiv 1 \pmod{3} : a^2 + a \equiv 2 \pmod{3}$ при $a \equiv 2 \pmod{3} : a^2 + a \equiv 4 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

при $a \equiv 0 \pmod{3} : a^2 + a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow$ если $b = 1000 - a^2$, то $b-a$ обязательно $\not\equiv 0 \pmod{3}$

3) За этим условием уже можно не следовать.

Пусть теперь $(a-c)(b-c) = p^2$. Так p^2 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел лишь в 4-х случаях:

- 1) $p^2 = p \cdot p$ 2) $p^2 = (-p) \cdot (-p)$ 3) $p^2 = p^2 \cdot 1$ 4) $p^2 = (-p^2) \cdot (-1)$.

(1) и (2) сразу отпадают, т.к. $a-c \neq b-c$, т.к. $a \neq b$.
Помне, т.к. $a < b$, то $a-c < b-c \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

$$\begin{cases} a-c=(-p^2) \\ b-c=(-1) \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

Найдем пары (a, b) такие, что:

$$a < b; a^2 + b = 1000 \text{ и } b-a = p^2 - 1.$$

т.к. $a^2 + b = 1000$, то $b = 1000 - a^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1000 - a^2 - a = p^2 - 1.$$

$$p^2 - 1 > 0 \Rightarrow 1000 - a^2 - a > 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 1000 < 0.$$

$$D = 1 + 1000 \cdot 4 = 4001 + 4001$$

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}; a_2 = \frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно из условия: $b > a \Rightarrow 1000 - a^2 > a$, т.е. $1000 - a^2 - a > 0$
Значит, рассматривая a на промежутке от $\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$ до $\frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}$
можно задать про условие $a < b$, ведь оно и так выполняется.

Максимальное значение функции $1000 - a^2 - a$ достигается в вершине, т.е. это параболы с ветвями в. Вершина находится в \cdot $(-\frac{1}{2}; 1000 + \frac{1}{4}) \Rightarrow p^2 - 1 \leq 1000 \Rightarrow p^2 \leq 1001$.

Тогда $p_{\max} = 31$, т.к. $32^2 = 1024 > 1001$. \Rightarrow можем перебрать все p от 2 до 31.

- | | | |
|------------|--|---|
| 1) $p=2$ | $\Rightarrow 1000 - a - a^2 = 3 \div 3 \times a^2 + a - 997 = 0$ | $D = 3989$ - не квадрат |
| 2) $p=3$ | $1000 - a - a^2 = 8$ | $a^2 + a - 992 = 0$ $D = 3969$ - не квадрат |
| 3) $p=5$ | $1000 - a - a^2 = 24 \div 3 \times a^2 + a - 976 = 0$ | $D = 3905$ - не квадрат |
| 4) $p=7$ | $1000 - a - a^2 = 48 \div 3 \times a^2 + a - 952 = 0$ | $D = 3809$ - не квадрат |
| 5) $p=11$ | $1000 - a - a^2 = 120 \div 3 \times a^2 + a - 880 = 0$ | $D = 3521$ - не квадрат |
| 6) $p=13$ | $1000 - a - a^2 = 168 \div 3 \times a^2 + a - 832 = 0$ | $D = 3329$ - не квадрат |
| 7) $p=17$ | $1000 - a - a^2 = 288$ | $a^2 + a - 712 = 0$ $D = 2849$ - не квадрат |
| 8) $p=19$ | $1000 - a - a^2 = 360 \div 3 \times a^2 + a - 640 = 0$ | $D = 2561$ - не квадрат |
| 9) $p=23$ | $1000 - a - a^2 = 528 \div 3 \times a^2 + a - 472 = 0$ | $D = 1889$ - не квадрат |
| 10) $p=29$ | $1000 - a - a^2 = 840 \div 3 \times a^2 + a - 160 = 0$ | $D = 641$ - не квадрат |
| 11) $p=31$ | $1000 - a - a^2 = 960 \div 3 \times a^2 + a - 40 = 0$ | $D = 161$ - не квадрат |

Ответ: ~~маленьких корней нет.~~

Там, где разность кратна 3-м делителю делимого не будет, т.е. мы знаем, что $b - a \div 3$.

Тогда возможны 2 случая: $\begin{cases} 1000 - a - a^2 = 8 \\ 1000 - a - a^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 992 = 0 \\ a^2 + a - 832 = 0 \end{cases}$

1) $D = 1 + 992 \cdot 4 = 3969 = 63^2$. $\Rightarrow a_1 = \frac{-1 + 63}{2} = 31$; $a_2 = -32$

2) $D = 1 + 832 \cdot 4 = 3329$ - не квадрат. $b_1 = 39$ $b_2 = -24$.

Тогда 1) $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = 30$ $\begin{cases} \text{Треугольн: } (31; 39; 40) \text{ и } (31; 39; 30) \\ (a-c)(b-c) = 3^2 \end{cases}$
 $a - c = -9 \Rightarrow C_2 = 40$ $\begin{cases} \text{Треугольн: } (-32; -24; -33) \text{ и } (-32; -24; -23) \\ (a-c)(b-c) = 3^2 \end{cases}$
 2) $\begin{cases} a - c = 1 \Rightarrow C_1 = -33 \\ a - c = -9 \Rightarrow C_2 = -23 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Треугольн: } (-32; -24; -33) \text{ и } (-32; -24; -23) \\ (a-c)(b-c) = 3^2 \end{cases}$
 Ответ: $(31; 39; 40); (31; 39; 30); (-32; -24; -33); (-32; -24; -23)$

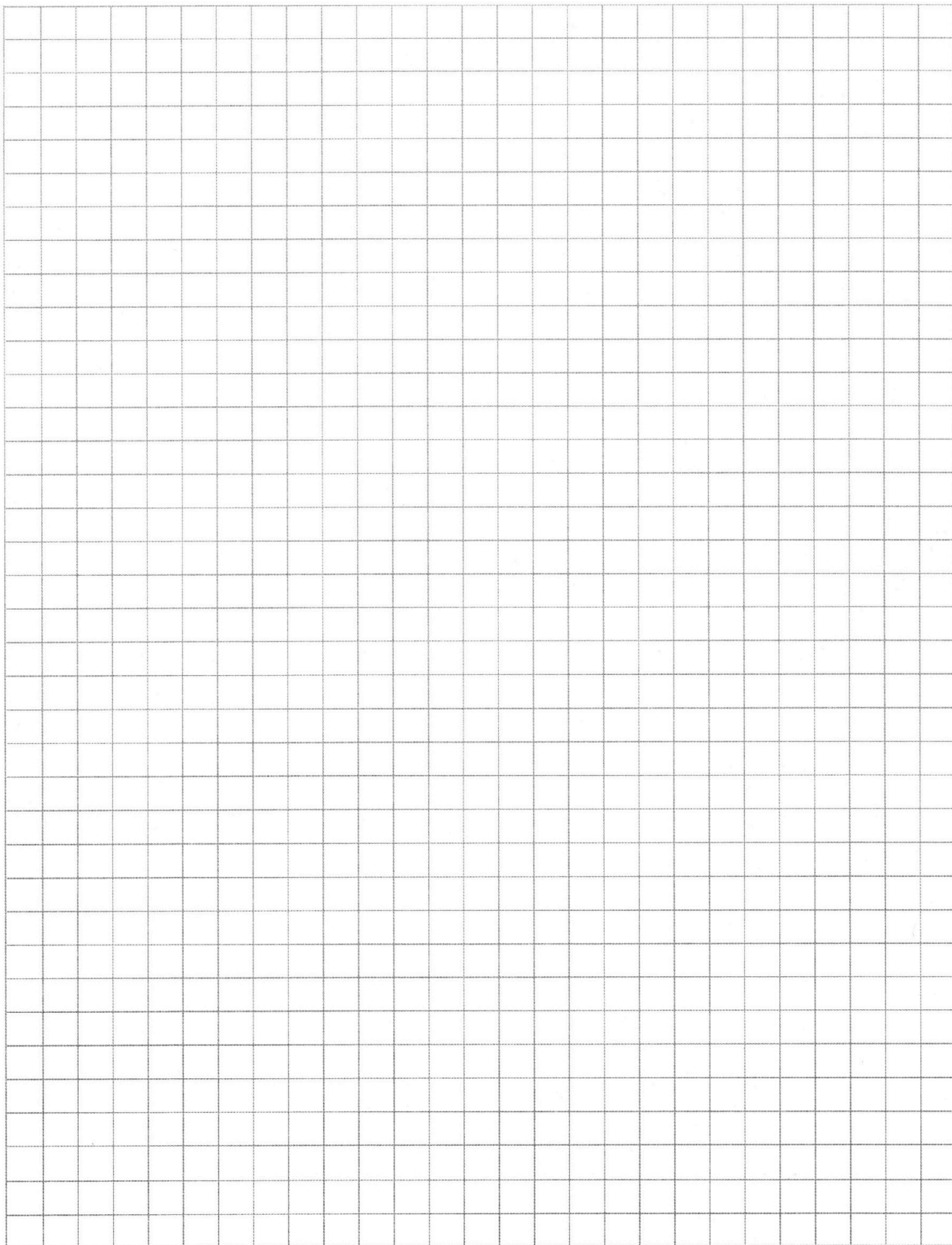


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

003: $\sqrt{(25x+34)} \sqrt{3x+2} = p^2 - 1$

$1000 - a^2 = a = 1000 - 529 = 471$

$(25x+34)(3x+2) \geq 0$

$25x+34 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{34}{25}$

$3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

$a < b$

$b - a \geq 3$

$a^2 + b = 1000$

$(2-x)^3 = \frac{1}{(3x+2)^3}$

$(25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$(2-x)(3x+2) = (25x+34) \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$-3x^2 + 6x - 2x + 4 = (25x+34)^3 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - x$

$-3x^2 + 4x + 4 = 0$

$\frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Algebraic equations: $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)$, $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)^2$, $25x+34 = (2-x)^2$, $25x+34 = -(2-x)^2$, $25x+34 = 4+x^2-4x$, $x^2-29x-30=0$, $25x+34 = -x^2-4+4x$, $x^2+21x+38=0$.
- Quadratic equations: $x^2-29x-30=0$, $x^2+21x+38=0$.
- Linear equations: $2x-17=0$, $2x-17=0$.
- Systems of equations: $\begin{cases} x < 2 \\ (-\frac{2}{3}, 2) \end{cases}$.
- Number theory: $26^2 - 25^2 = 1$.
- Diophantine equations: $|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-23}$.
- Diagrams: A number line showing the interval $(-\frac{2}{3}, 2)$.
- Arithmetic: Long division of 1000 by 24, 26, 29, 31, 34, 38, 41, 45, 58, 69, 72, 81, 84, 89, 92, 96, 99, 100.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams and calculations.

Top Left: Calculations involving $AP(2\beta-1) + 2PF(2-\alpha)$ and $PF(2-\alpha) + D$. Includes a vertical sum: $1000 + 861 = 1861$.

Top Middle: Trigonometric relations: $\frac{AE}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{AD}{\sin(\alpha\gamma)}$, $\frac{AD}{AE}$, $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{CK}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\frac{KE}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{DE}{\sin \alpha}$.

Top Right: Geometric diagram showing two overlapping circles with points A, B, C, D, E, K, X. A line segment DE is drawn, and point K is on CE.

Middle Left: Calculations: $32+9=41$, $32-23=9$. Vertical sum: $32 + 32 + 132 + 164 + 96 + 24 = 486$. Another vertical sum: $32 + 32 + 67 + 67 + 9 = 207$.

Middle Right: Trigonometric relations: $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{AD}{AE}$, $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Middle: Geometric diagram with two circles w_1 and w_2 and points A, B, C, D, E. A line segment DE is drawn. Below it, a small square diagram with sides m and m_1 .

Bottom Left: Calculations: $1+3-3+1=2$. Vertical sum: $30 + 31 = 61$. $\gamma = 9$. $1+k$. Vertical sum: $33 + 33 + 95 + 99 = 360$. Another vertical sum: $63 + 63 + 99 + 28 + 9 = 262$.

Bottom Middle: Geometric diagram with two overlapping circles and points A, B, C, D, E. Angles $7x$ and $20x$ are marked. A line segment DE is drawn.

Bottom Right: Trigonometric relations: $\frac{DE}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{CK}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{DE}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{KE}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a=1 \quad b=999$
 $a=2 \quad b=996$
 $a=3 \quad b=991$
 $a=4 \quad b=984$
 $a=5 \quad b=979$
 \vdots
 $a=31 \quad b=968$

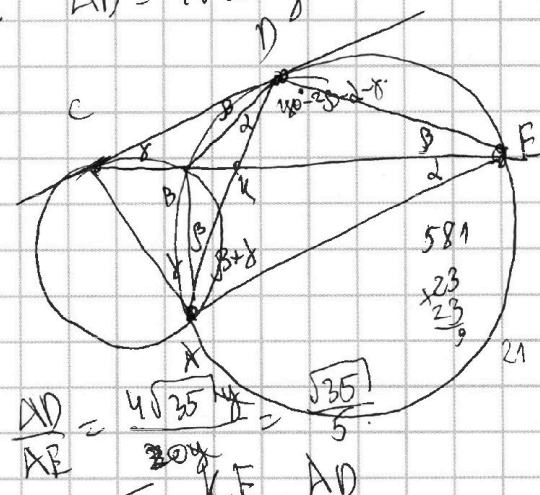
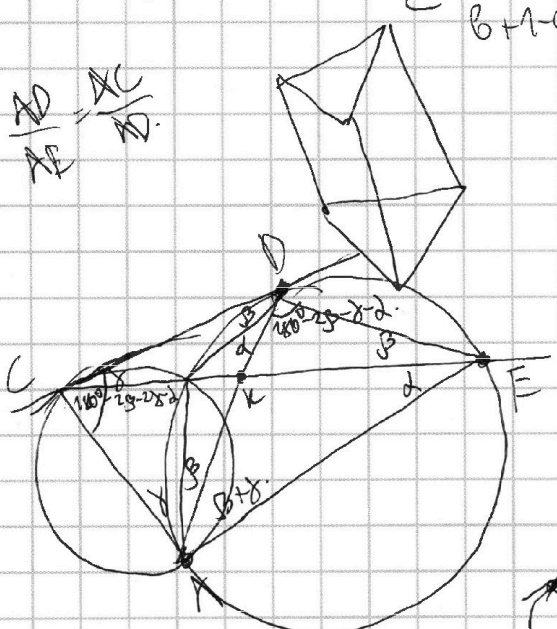
$a=30 \quad b=999$
 $a=31 \quad b=995$
 $a=32 \quad b=989$
 $a=33 \quad b=981$
 $a=34 \quad b=974$
 $a=35 \quad b=968$

$1000 - a^2$
 $1000 - 168$
 832
 $1000 - a^2$
 $1000 - 332$
 668
 $b - a \div 3$

$b = 1000 - a^2$
 $b - a = 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3}$
 $1 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3}$
 $1 - a^2 + a \equiv 0 \pmod{3}$
 $AD = AE \cdot AC = 70y^2$
 $AD = 4\sqrt{35}y$

$(a-c)(b-c)$ - квадрат целого

$a-c=1 \quad a < b \Rightarrow a$
 $a-c=1 \quad a < b \Rightarrow a$
 $b-c=1 \quad c = a-1$
 $b+1=a$



$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
 $\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \cos x \sin x$
 $\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

$\frac{AD}{AE} = \frac{4\sqrt{35}y}{70y} = \frac{\sqrt{35}}{5}$
 $\frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{4\sqrt{35}}{7}$