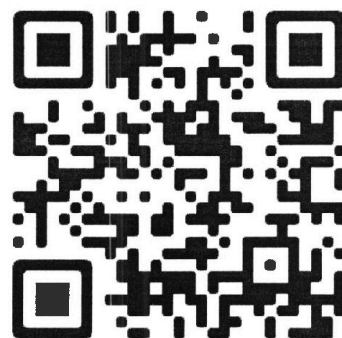




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



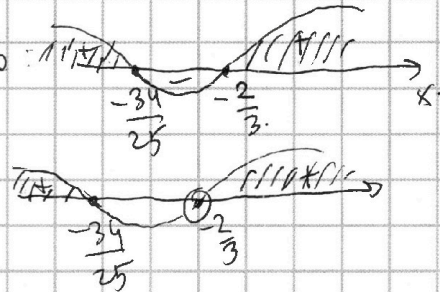
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала найдем ОДЗ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов!} \\ 3x+2 \neq 0 \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

Теперь отметим монотонность, то  $2-x \geq 0$ , т.к. пусть  $q$  - знаменатель прогрессии, а  $2-x = x_{12}$ ,  $\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = x_{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{12} = q^2 x_{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} q^2 \geq 0 - \text{т.к. это квадрат} \\ x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \text{ т.к. это корень.} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 x_{10} = x_{12} = 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Теперь мы получаем, то  $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$ .

Затем теперь найдем, то т.к.  $2-x$  - 12-й член прогрессии,

$$\text{а } \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - 10\text{-й, то то } \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = q^2$$

(также отметим, то  $x \neq 2$ , иначе  $2-x=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 0$ , но тогда  $x = -\frac{34}{25}$ ). Аналогично:  $\frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{2-x} = q^6$ , т.к. это 18-й член

и 10-й 12-й члены соответственно

Отсюда следует, то  $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{2-x} \Leftrightarrow$

$$(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

т.к. у нас  $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$ , то  $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$

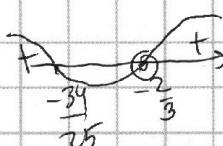
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из метода интервалов для выражения  $\frac{25x+34}{3x+2}$  :   
 Это приписываем неотрицательные значения на  
 множестве чисел  $x$ , которое мы рассматриваем  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2} = \frac{25x+34}{3x+2}$$

Тогда  $(2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)(3x+2) - \frac{25x+34}{3x+2} \Leftrightarrow (2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2$

Значит,  $\begin{cases} 25x+34 = (2-x)^2 \\ 25x+34 = -(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1):  $D = 29^2 + 120 = 841 + 120 = 961 = 31^2$  (2)  $D = 441 - 38 \cdot 4 = 289 = 17^2$

$x_1 = \frac{29+31}{2} = 30 \notin \text{ОДЗ}$

$x_1 = \frac{-21+17}{2} = -2 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

$x_2 = \frac{29-31}{2} = -1 \notin \text{ОДЗ}, \text{ м.к.}$

$x_2 = \frac{-21-17}{2} = -19 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

находятся между  $-\frac{34}{25}$  и  $-\frac{2}{3}$ .

Теперь заметим, что все  $x \in$  нашему ОДЗ и являющиеся решениями данного уравнения обязательно найдутся, т.к. все члены уравнения при  $x = -2$  и  $x = -19$  будут  $\geq 0$

и будет выполнено:  $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^{3/2}}$  тогда в

числителе  $q$  можно будет взять число  $\sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}}$ , а

в числителе  $x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

В таком случае  $2-x$  выразится, как  $x_{10} \cdot q^2$ , т.е. как  $x_{12}$ ,

а  $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$ , как  $x_{12} \cdot q^6$ , т.е. как  $x_{18} \Rightarrow -2$  и  $-19$  негодны.

Ответ:  $x_1 = -2$ .

$x_2 = -19$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Замена:  $t = \cos x \Rightarrow$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$  тогда уравнение имеет решение, нужно, чтобы для корня  $t \in [-1; 1]$ .

$$p(4t^3 - 3t) + 12t^2 + 12t + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 10 = 0.$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0.$$

$$(t+1)^3 = -(p-1)t^3$$

$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

Если опустим, то  $\sqrt[3]{p-1} \neq -1$ , иначе

$(1 + \sqrt[3]{p-1}) = 0 \Rightarrow$  уравнение не имеет корней,

т.е. справа не найд.

тогда  $p-1 \neq -1 \Rightarrow p \neq 0.$

Итак,  $t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

Мы хотим, чтобы  $-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1]$

Пусть  $\sqrt[3]{p-1} = k \Rightarrow -\frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Rightarrow 1+k \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \quad \text{м.к.р.}$$

$$\sqrt[3]{p-1} \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Ответ:  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Решением для  $\forall$  значений  $p$  является:

$$\cos x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑  
Ответ.

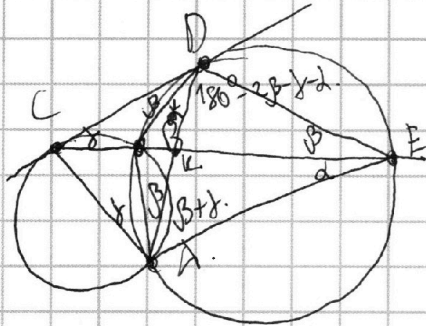
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AD \cap CE = K$ .  
Тогда из условия:  $\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$   
Пусть  $\angle AEC = \delta$ ;  $\angle CED = \beta$ ;  $\angle CAB = \gamma$ . Тогда заметим, что из взаимности  $BAED$ :  $\angle BAD = \angle CED = \beta$ . Аналогично  $\angle BDK = \delta$ .

Теперь заметим, что  $\angle CDB = \beta$  — т.к. это угол между касательной  $CD$  и хордой  $BD$ , на которую опирается вписанный  $\angle CED = \beta$ .

Также, заметим  $\angle CAB = \angle DCE = \gamma$ . Т.к.  $DK$  — высота в  $\triangle CDE$ , то  $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$ . С другой стороны, по

$$\begin{aligned} \text{формуле площади треугольника } \triangle\text{-ка: } \frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} &= \frac{\frac{1}{2} CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDK}{\frac{1}{2} DE \cdot DK \cdot \sin \angle EDK} = \\ &= \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK} \end{aligned}$$

Теперь знаем,  $\angle CDK = \delta + \beta$  (как сумма  $\angle CDB$  и  $\angle BDK$ ).

Также  $\angle EDK = 180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta = 180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta$  (по сумме углов  $\triangle CDE$ ).

$$\Rightarrow \sin \angle EDK = \sin(180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta) = \sin(2\beta + \gamma + \delta)$$

$$\sin \angle CDK = \sin(\delta + \beta) \Rightarrow \frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$$

$$\text{Тогда } \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$$

Теперь найдем, что  $\angle DAE = 180^\circ - \delta - \beta - (180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta) = 180^\circ - \delta - \beta - 180^\circ + \gamma + \delta + 2\beta = \beta + \gamma$  (по сумме углов  $\triangle DAE$ ).

$$\text{По т. синусов для } \triangle ADE: \frac{AE}{\sin(180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta)} = \frac{AD}{\sin(\delta + \beta)} \Rightarrow \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{AD}{AE}$$

Тогда  $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE}$ . Также мы знаем, что  $\angle DAE = \beta + \gamma$ . Также,

$\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \beta + \gamma \Rightarrow AK$  — биссектриса в  $\triangle CAE$ .

Тогда по свойству б-биссектрисы:  $\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}. \text{ Пусть тогда } AC = 7x, AE = 20x.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь заметим, что  $\triangle ADC \sim \triangle AED$  (м.к.  $\angle CAD = \angle DAE = \beta + \gamma$  и  $\angle CDA = \angle DEA = \alpha + \beta$ ).  $\Rightarrow$  из подобия:  $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = 7x \cdot 20x = 7 \cdot 20x^2 \Rightarrow AD = x \cdot 2\sqrt{35}$$

Тогда  $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{20}{7} \cdot \frac{x \cdot 2\sqrt{35}}{20x} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{35}}{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямоугольник симметричен по одной средней линии, то он центрально-симметричен. Если он симметричен относительно центра и по одной из средних линий, то он также и симметричен и по второй средней линии. Отсюда следует, что либо все прямоугольники образуют великую группу симметрии, либо только одна из групп. Значит, давайте считать количество способов, как количество прямоугольников, симметричных по первой средней линии + количество прямоугольников, симметричных по 2-й средней линии + кол-во прямоугольников симметричных относительно центра - кол-во прямоугольников со всеми симметриями.

Заметим, что кол-во прямоугольников, симметричных относительно 1-й средней линии можно найти следующим образом. Пусть 1-я средняя линия - это верхняя средняя линия. Проведем её. Тогда прямоугольник разделим на 2 равные части, в каждой из которых находится половина всех клеток, т.е.  $\frac{500 \cdot 120}{2} = 250 \cdot 120 = 500 \cdot 60 = 30\,000$  клеток. Поместим в левую половину 4 клетки. Тогда по симметрии одновременно заданы правая половина и подбора. 4 клетки размещены определяют собой левую половину, т.е. 4 клетки в ней  $\Rightarrow$  кол-во способов равно  $C_4^{30000}$ .

Аналогично и для 2-й средней линии кол-во способов равно  $C_4^{30000}$ . Заметим, что размещением с центральной симметрией определяются только по одной из половинок прямоугольников одновременно  $\Rightarrow$  и для центральной симметрии способов будет  $C_4^{30000}$ .

Теперь найдем кол-во способов построить прямоугольник



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

С тремя симметриями. Для этого достаточно

разделить квадрат на части 3 цвета!

т.е. 4-я окрасит обе средние линии.

Утверждается, что это по четверти

1	2
3	4

на с цветом 1 и единственно возможная раскраска. Это действительно правда, т.к. по симметрии от вертикальной ср. линии задается 2-я четверть

на, по симметрии горизонтальной - 3-я четверть, а по центральной симметрии - 4-я четверть.

Так и наоборот, 4-я четверть с тремя симметриями

задает собой 1-ю четверть, где будет равно 2 клетки  $\rightarrow$  кол-во способов покрасить квадратик

с 3-мя симметриями равно  $C_{15000}$

$\rightarrow$  кол-во клеток в четверти

иначе кол-во способов равно:  $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

и и  
Ответ:  $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

$\rightarrow$  кол-во равно 2, т.к. раскраска с тремя симметриями мы начитали 3 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны условия  $a^2 + b = 1000$  и условие  $a < b$ .  
Для начала найдем все возможные пары, где  $a \geq 0$ .

- Возможные пары:
- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0) $a=0$ $b=1000$  | 11) $a=11$ $b=989$ | 21) $a=21$ $b=959$ |
| 1) $a=1$ $b=999$   | 12) $a=12$ $b=988$ | 22) $a=22$ $b=956$ |
| 2) $a=2$ $b=996$   | 13) $a=13$ $b=987$ | 23) $a=23$ $b=951$ |
| 3) $a=3$ $b=991$   | 14) $a=14$ $b=984$ | 24) $a=24$ $b=944$ |
| 4) $a=4$ $b=984$   | 15) $a=15$ $b=985$ | 25) $a=25$ $b=935$ |
| 5) $a=5$ $b=975$   | 16) $a=16$ $b=976$ | 26) $a=26$ $b=924$ |
| 6) $a=6$ $b=964$   | 17) $a=17$ $b=971$ | 27) $a=27$ $b=911$ |
| 7) $a=7$ $b=951$   | 18) $a=18$ $b=966$ | 28) $a=28$ $b=896$ |
| 8) $a=8$ $b=936$   | 19) $a=19$ $b=959$ | 29) $a=29$ $b=875$ |
| 9) $a=9$ $b=919$   | 20) $a=20$ $b=940$ | 30) $a=30$ $b=800$ |
| 10) $a=10$ $b=900$ | 31) $a=31$ $b=759$ |                    |

Команда  $a=32$   $b$  становится меньше чем  $a$ .

Проверим, когда  $b-a \div 3 \Rightarrow b-a \equiv 0 \pmod 3$

$$b = 1000 - a^2 \Rightarrow 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 1 \equiv \frac{a^2 + a}{3}$$

при  $a \equiv 1 \pmod 3$ :  $a^2 + a \equiv 2 \pmod 3$  при  $a \equiv 2 \pmod 3$ :  $a^2 + a \equiv 4 + 2 \equiv 0 \pmod 3$

при  $a \equiv 0 \pmod 3$ :  $a^2 + a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$  если  $b = 1000 - a^2$ , то  $b-a$  обязательно  $\div 3$

3) За этим условием уже можно не следовать.

Пусть теперь  $(a-c)(b-c) = p^2$ . Так  $p^2$  может быть представлено в виде произведения двух целых чисел лишь в 4-х случаях:

- 1)  $p^2 = p \cdot p$  2)  $p^2 = (-p) \cdot (-p)$  3)  $p^2 = p^2 \cdot 1$  4)  $p^2 = (-p^2) \cdot (-1)$

(1) и (2) сразу сразу отпадают, т.к.  $a-c \neq b-c$ , т.к.  $a \neq b$

Потому, т.к.  $a < b$ , то  $a-c < b-c \Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$

Найдем пары  $(a, b)$  такие, что:  
 $a < b$ ;  $a^2 + b = 1000$  и  $b-a = p^2-1$ .

т.к.  $a^2 + b = 1000$ , то  $b = 1000 - a^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1000 - a^2 - a = p^2 - 1$$

$$p^2 - 1 > 0 \Rightarrow 1000 - a^2 - a > 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 1000 < 0$$

$$D = 1 + 1000 \cdot 4 = 4000 + 4001$$

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}; a_2 = \frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$$

$$\Rightarrow a \in \left( \frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно из условия:  $b > a \Rightarrow 1000 - a^2 > a$ , т.е.  $1000 - a^2 - a > 0$   
Значит, рассматривая  $a$  на промежутке от  $\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$  до  $\frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}$   
можно задать про условие  $a < b$ , ведь оно и так выполняется.

Максимальное значение функции  $1000 - a^2 - a$  достигается в вершине, т.е. это параболы с ветвями в. Вершина находится в м.  $(-\frac{1}{2}; 1000 + \frac{1}{4}) \Rightarrow p^2 - 1 \leq 1000 \Rightarrow p^2 \leq 1001$ .

Тогда  $p_{\max} = 31$ , т.к.  $32^2 = 1024 > 1001 \Rightarrow$  можем перебрать все  $p$  от 2 до 31.

- |            |   |                         |
|------------|---|-------------------------|
| 1) $p=2$   | $\Rightarrow 1000 - a - a^2 = 3 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 997 = 0$ | $D = 3989$ - не квадрат |
| 2) $p=3$   | $1000 - a - a^2 = 8 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0$                      | $D = 3969$ - не квадрат |
| 3) $p=5$   | $1000 - a - a^2 = 24 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 976 = 0$            | $D = 3905$ - не квадрат |
| 4) $p=7$   | $1000 - a - a^2 = 48 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 952 = 0$            | $D = 3809$ - не квадрат |
| 5) $p=11$  | $1000 - a - a^2 = 120 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 880 = 0$           | $D = 3521$ - не квадрат |
| 6) $p=13$  | $1000 - a - a^2 = 168 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 832 = 0$           | $D = 3329$ - не квадрат |
| 7) $p=17$  | $1000 - a - a^2 = 288 \Rightarrow a^2 + a - 712 = 0$                    | $D = 2849$ - не квадрат |
| 8) $p=19$  | $1000 - a - a^2 = 360 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 640 = 0$           | $D = 2561$ - не квадрат |
| 9) $p=23$  | $1000 - a - a^2 = 528 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 472 = 0$           | $D = 1889$ - не квадрат |
| 10) $p=29$ | $1000 - a - a^2 = 840 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 160 = 0$           | $D = 641$ - не квадрат  |
| 11) $p=31$ | $1000 - a - a^2 = 960 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 40 = 0$            | $D = 161$ - не квадрат  |

Ответ: ~~маленьких решений нет.~~

Тем, где разность кратна 3-м делению делимым не будет, т.е. мы знаем, что  $b - a \div 3$ .

Тогда возможны 2 случая:  $\begin{cases} 1000 - a - a^2 = 8 \\ 1000 - a - a^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 992 = 0 \\ a^2 + a - 832 = 0 \end{cases}$

1)  $D = 1 + 992 \cdot 4 = 3969 = 63^2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1 + 63}{2} = 31; a_2 = -32$

2)  $D = 1 + 832 \cdot 4 = 3329$  - не квадрат.  $b_1 = 39; b_2 = -24$

Тогда 1)  $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = 30$  Тройки:  $(31; 39; 40)$  и  $(31; 39; 30)$   
 $(a-c)(b-c) = 3^2 \quad (a-c)(b-c) = 3^2$   
 2)  $a - c = -9 \Rightarrow C_2 = 40$  Тройки:  $(-32; -24; -33)$  и  $(-32; -24; -23)$   
 $(a-c)(b-c) = 3^2 \quad (a-c)(b-c) = 3^2$   
 3)  $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = -33$   
 4)  $a - c = -9 \Rightarrow C_2 = -23$   
 Ответ:  $(31; 39; 40); (31; 39; 30); (-32; -24; -33); (-32; -24; -23)$

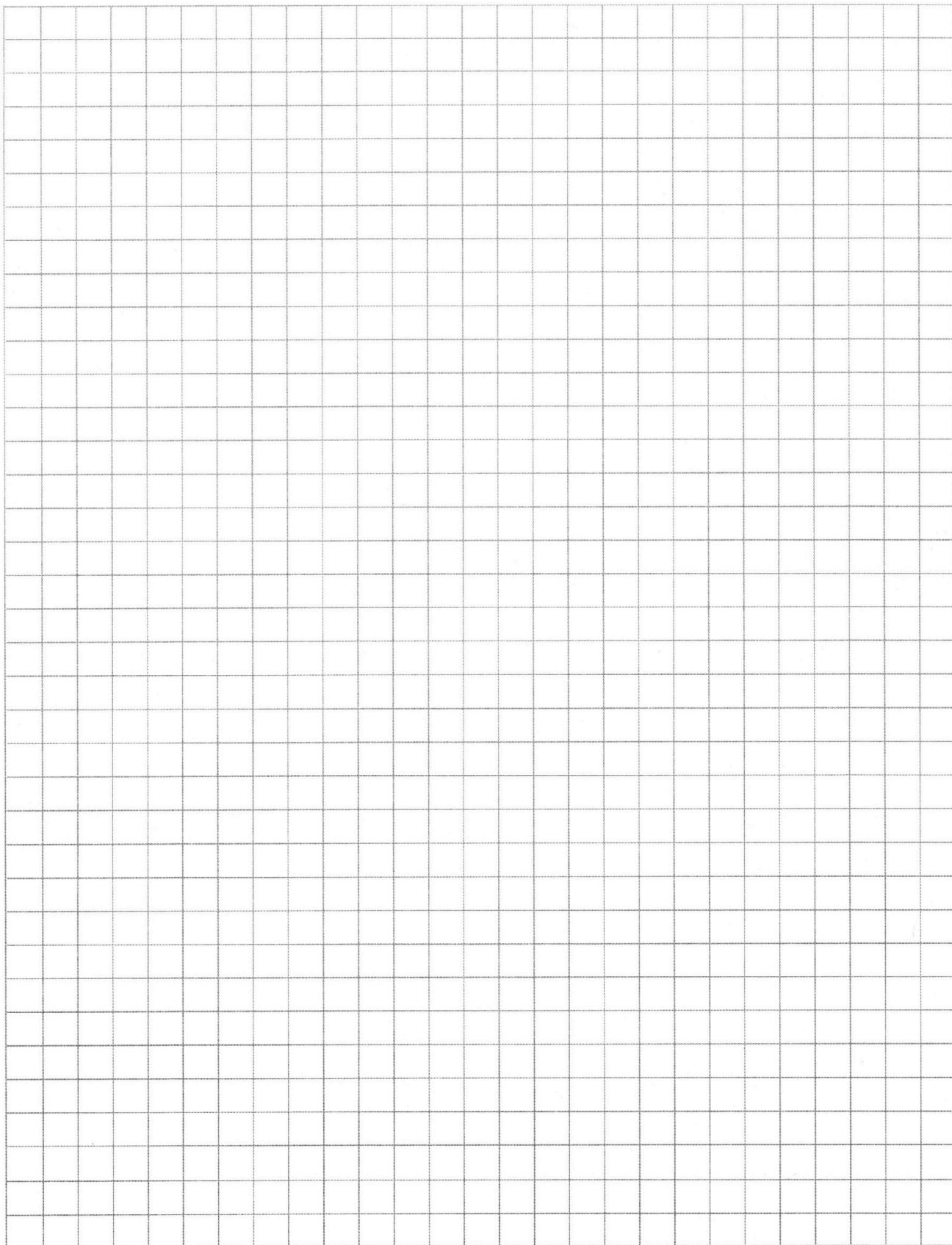


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

003:  $\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{3x+2} = p^2 - 1$

$1000 - a^2 = a = \dots$

$(25x+34)(3x+2) \geq 0$

$25x+34 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{34}{25}$

$3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

$a < b$

$b - a \geq 3$

$a^2 + b = 1000$

$(2-x)^3 = \frac{1}{(3x+2)^3}$

$(2-x)(3x+2) = (25x+34)\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$-3x^2 + 6x - 2x + 4 = -3x^2 + 4x + 4$

$(2-x)\sqrt{3x+2} = \dots$

$-\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

$(25x+34)^3 \cdot (3x+2)^2 = 2-x$

$(2-x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Algebraic equations:  $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)$ ,  $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)^2$ ,  $25x+34 = (2-x)^2$ ,  $25x+34 = -(2-x)^2$ ,  $25x+34 = 4+x^2-4x$ ,  $x^2-29x-30=0$ ,  $25x+34 = -x^2-4+4x$ ,  $x^2+21x+38=0$ .
- Quadratic equations:  $x^2-29x-30=0$ ,  $x^2+21x+38=0$ .
- Linear equations:  $2x-17=0$ ,  $2x-17=0$ .
- Systems of equations:  $\begin{cases} x < 2 \\ (-\frac{2}{3}, 2) \end{cases}$ .
- Number theory:  $26^2 - 25^2 = 1$ .
- Diophantine equations:  $|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-23}$ .
- Diagrams: A number line showing the interval  $(-\frac{2}{3}, 2)$ .
- Arithmetic: Long division of 1000 by 24, 26, 29, 31, 34, 38, 41, 45, 58, 69, 72, 81, 84, 89, 92, 96, 99, 100.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring geometric diagrams and trigonometric calculations.

**Diagrams:**

- Top right: A circle with points A, B, C, D, E, K. Lines connect A to D, B to E, and C to K. Angles are marked.
- Middle: Two overlapping circles, \$W\_1\$ and \$W\_2\$. Points A, B, C, D, E are marked on the circles and their intersection. Lines connect A to D, B to E, and C to K.
- Bottom: A circle with points A, B, C, D, E. Lines connect A to D, B to E, and C to K. Angles \$7x\$ and \$20x\$ are marked.
- Bottom right: A circle with points A, B, C, D, E. Lines connect A to D, B to E, and C to K. Angles \$2\beta + \gamma\$ and \$2\beta + \delta\$ are marked.

**Equations and Calculations:**

- Top left:  $AP(2\beta - 1) + 2PF(2 - 1)$
- Top center:  $\frac{AE}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \delta)}$
- Top right:  $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{CK}{\sin(\alpha + \gamma)}$  and  $\frac{KE}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{DE}{\sin \alpha}$
- Middle right:  $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \delta)}$  and  $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{AD}{AE}$
- Bottom right:  $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \delta + \gamma)}$
- Bottom right:  $\frac{DE}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{KE}{\sin(\alpha + 2\beta + \delta)}$

**Arithmetic:**

- Top left:  $32 + 9 = 41$ ,  $41 - 23 = 18$
- Middle:  $32 + 32 = 64$ ,  $64 + 16 = 80$ ,  $80 + 24 = 104$
- Bottom left:  $33 \times 33 = 1089$ ,  $1089 + 95 = 1184$ ,  $1184 + 909 = 2093$

**Other notes:**

- Left side:  $P(2\beta - 1) + 2PF(2 - 1)$ ,  $P(2\beta - 1) + 2PF(2 - 1)$ ,  $P(2\beta - 1) + 2PF(2 - 1)$
- Bottom left:  $1 + 3 - 3 + 1$
- Bottom left:  $70 + 31 = 101$ ,  $101 - 9 = 92$
- Bottom left:  $1 + k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

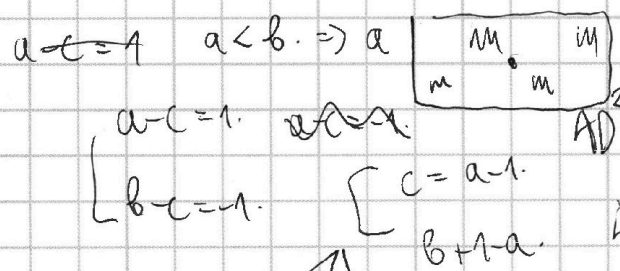
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a=1 \quad b=999$   
 $a=2 \quad b=996$   
 $a=3 \quad b=991$   
 $a=4 \quad b=984$   
 $a=5 \quad b=979$   
 $\vdots$   
 $a=31 \quad b=971$

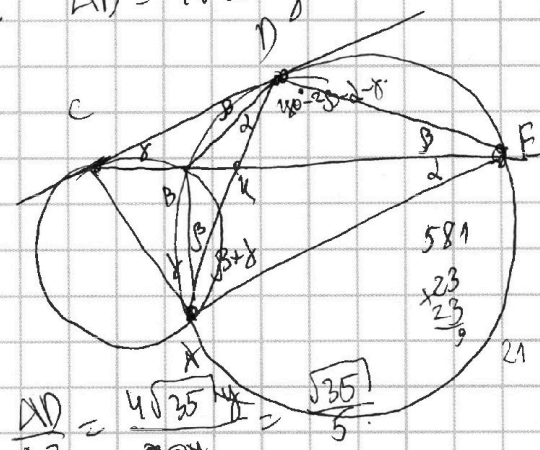
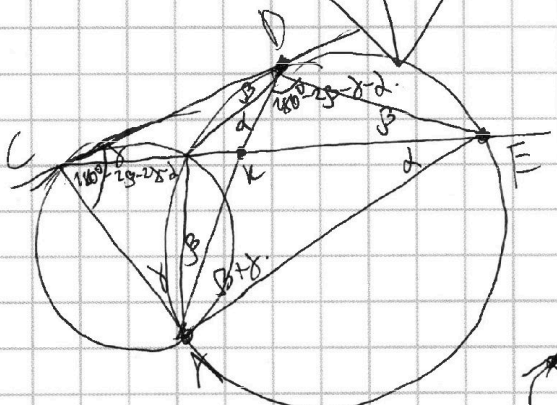
$1000 - a^2$   
 $1000 - 168 = 832$   
 $1000 - 32 = 968$   
 $1000 - 81 = 919$   
 $1000 - 64 = 936$   
 $1000 - 49 = 951$   
 $1000 - 36 = 964$   
 $1000 - 25 = 975$   
 $1000 - 16 = 984$   
 $1000 - 9 = 991$   
 $1000 - 4 = 996$   
 $1000 - 1 = 999$

$b - a \div 3$   
 $b = 1000 - a^2$   
 $b - a = 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod 3$   
 $1 - a^2 - a \equiv 0 \pmod 3$   
 $1 - a^2 + a \equiv 0 \pmod 3$   
 $1 - a^2 + a = 0$   
 $(1-a)(1+a) = 0$   
 $a = 1$  or  $a = -1$

$(a-c)(b-c)$  - квадрат целого



$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$



$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$   
 $\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \cos x \sin x$   
 $\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

$\frac{AD}{AE} = \frac{4\sqrt{35}}{5}$   
 $\frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{35}}{5}$   
 $\frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{4\sqrt{35}}{7}$