



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

Пусть геометрическая прогрессия задается формулой  $b_n = b_1 q^{n-1}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ;  $b_1$  — первый член прогрессии. По условию:

$$\begin{cases} b_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} & (1) \\ b_1 q^8 = x+3 & (2) \\ b_1 q^{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} & (3) \end{cases}$$

$$b_1 q^8 = x+3 \quad (2)$$

$$b_1 q^{11} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \quad (3)$$

ОДЗ:  $\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \\ x-6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6 \Rightarrow (x-6)^4 > 0 \end{cases}$

+  $\frac{9}{25}$  - 6 +  $x$

По методу интервалов:  $x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Таким образом, (3) можно записать следующим образом:

$$b_1 q^{11} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)} \quad (4)$$

\* Если бы  $b_1 = 0$  или  $q = 0$ , то:  $\begin{cases} 25x-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{25} \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$  (противоречие)

Значит  $b_1 \neq 0$  и  $q \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{9}{25}$ .

$$\text{Из (1) и (4): } \frac{b_1 q^{11}}{b_1 q^8} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \frac{1}{b_1} q^6 \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{(x-6)^2} \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{из (2) и (5) } b_1 \cdot \frac{1}{(x-6)^2} = x+3 \Leftrightarrow b_1 = (x-6)^2(x+3) \quad (6)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зная  $b_1$  и  $q^2$ . Преобразуем (5):  $q^2 =$  (так как  $q^2 > 0$ )  $\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}} \Leftrightarrow q^6 = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 \Rightarrow$  (из (6) и (7))

$$\Rightarrow (x-6)^2 (x+3) \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot ((x-6)^2)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot \sqrt[4]{(x-6)^2} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \text{ (Напомним, что}$$

равносильность прижимаем на  $D \setminus \{3\}$ ). Теперь

мы помним, что (так как  $x \neq 6$  и  $x \neq \frac{9}{25}$ )

$x > -3$ . Тогда мы можем (учитывая, что

$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$ ) возвести обе части в

квадрат:  $(x+3)^2 \sqrt{(x-6)^2} = (25x-9)(x-6)$ . Рассмотрим

2 случая:

$$\text{I случай: } x > 6 \Rightarrow (x+3)^2 = 25x-9 \Leftrightarrow x^2 - \overset{18+1}{19}x + 18 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (x-18)(x-1) = 0 \text{ Но } x-1 > 5 > 0 \Rightarrow x = \boxed{18} (> 0)$$

$$\text{II случай: } x \in (-3; \frac{9}{25}) \Rightarrow (x+3)^2 = 9-25x \Leftrightarrow x^2 + 31x =$$

$$= 0 \Leftrightarrow x(x+31) = 0, \text{ Но } x+31 > 28 > 0 \Rightarrow x = \boxed{0} \in (-3; \frac{9}{25})$$

Ответ:  $0; 18$

Если  $x=0$ , то  $b_1 = 108$ , а  $q \in \{-\sqrt[4]{\frac{1}{6}}; \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\}$ .

Если  $x=18$ , то  $b_1 = 12^2 \cdot 21$ , а  $q \in \{-\sqrt[4]{\frac{1}{72}}; \sqrt[4]{\frac{1}{72}}\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{4-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

Пусть  $x+2=t$ ;  $y+4=w$ . Тогда;

$$\begin{cases} \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t-4z} + 4 = 2\sqrt{w-t^2+z} \quad (1) \\ |w| + 4|w-9| = \sqrt{81-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

2) правая часть  $\in [0; 9]$  (по ОДЗ:  $z \in [-9; 9]$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  левая часть тоже. Если для  $w \geq 9$ , то  $|w| + 4|w-9| =$

$$= 5w - 36 \geq 9 \text{ для } w \geq 9. \text{ Значит } w \leq 9.$$

$$\text{Заметим, что } |w| + 4|w-9| = \begin{cases} 5w-36, & \text{если } w \geq 9 \\ -3w+36, & \text{если } w \in [0; 9] \\ -5w+36, & \text{если } w < 0 \end{cases}$$

Первый случай невозможен  $\Rightarrow$  выполняется один

из 2-х случаев. По  $(-3w+36)' = -3$  и  $(-5w+36)' =$

$-5 \Rightarrow$  на  $(-\infty; 9]$ :  $|w| + 4|w-9| \searrow$  (как раз

до 9)  $\Rightarrow |w| + 4|w-9| \in [9; +\infty)$ . По  $\sqrt{81-z^2} \leq 9$ .

$$\text{Таким образом: } \begin{cases} z=0 \\ w=9 \Leftrightarrow y=5 \end{cases}$$

Подставим  $z$  и  $w$  в (1):  $\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + 4 = 2\sqrt{9-t^2}$  (3)

ОДЗ:  $t \in [-3; 3]$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{t+3} + 4 = 2\sqrt{9-t^2} + \sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3) + 8\sqrt{t+3} = (36-4t^2) + (3-t) + 4\sqrt{3-t} \cdot \sqrt{9-t^2}$$

3)  $\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} = 2\sqrt{9-t^2} - 4$ . Возведем обе части в квадрат (потом следим проверку):

$$(t+3) + (t-3) - 2\sqrt{9-t^2} = (36-4t^2) + 16 - 4\sqrt{9-t^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{9-t^2} = -4t^2 - 2t + 52$$

Пусть  $t^2 = v$ . Тогда:

$$2\sqrt{9-v} = -2v - t + 52$$

Пусть  $v = 2t$ . Тогда:  $2\sqrt{36-v^2} = -v^2 - v + 52$ . Возведем обе части в квадрат:

3)  $2\sqrt{t+3} - 2\sqrt{3-t} + 8 = 2\sqrt{t+3} \cdot 2\sqrt{3-t} \Leftrightarrow a - b + 8 = ab \Leftrightarrow 7 = ab + b - a - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3} + 1)(\sqrt{3-t} - 1) = 7$ . Производная обеих частей:  $\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(\sqrt{3-t}-1) - \frac{1}{2\sqrt{3-t}}(\sqrt{t+3}+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3-t) - \sqrt{3-t} - (t+3) - \sqrt{t+3}}{\sqrt{3-t} \cdot \sqrt{t+3}} = -\frac{2t + \sqrt{t+3} + \sqrt{3-t}}{2\sqrt{3-t} \sqrt{t+3}}$ . Если  $t \geq 0$ , то производная  $< 0$ .

Пусть теперь  $t < 0$ . Тогда  $\sqrt{t+3} + \sqrt{3-t} \stackrel{?}{=} -2t \Leftrightarrow (t+3) + (3-t) \stackrel{?}{=} 4t^2 \Leftrightarrow t^2 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \stackrel{?}{=} (t - \sqrt{\frac{3}{2}})(t + \sqrt{\frac{3}{2}}) \Leftrightarrow t \stackrel{?}{=} -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$  при  $t \in [-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0)$ : производная  $< 0$ , а при  $t \in (3; -\sqrt{\frac{3}{2}}]$ :  $\geq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Попытаемся преобразовать (3) в  $(a\sqrt{t+3} + b\sqrt{3-t} + c)^2 - d^2 = 0$ .

Если это возможно, то получим:  $a^2(t+3) + b^2(3-t) + c^2 + 2ac\sqrt{t+3} + 2bc\sqrt{3-t} + 2ab\sqrt{9-t^2} = 0$ .

Так как изначально  $4 + \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} - 2\sqrt{9-t^2} = 0$ , то удобно считать  $b = -a$ . Тогда:

$$(6a^2 + c^2 - d^2) + 2ac(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t}) - 2a^2\sqrt{9-t^2} = 0.$$

Видим, что  $-2a^2 = -2$ . Без ограничения общности,

$$a = 1 \Rightarrow (6 + c^2 - d^2) + 2c(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t}) - 2\sqrt{9-t^2} = 0.$$

Как видим,  $2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ . А  $6 + c^2 - d^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d^2 = 2 + c^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ . Без ограничения общности,

$$d = \frac{3}{2}. \text{ Итак: (3) преобразовано в } (\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} - 1)(\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t+3} = \sqrt{3-t} + 1 \Leftrightarrow t+3 = (3-t) + 1 + 2\sqrt{3-t} & (4) \\ \sqrt{t+3} + 2 = \sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3) + 4 + 4\sqrt{t+3} = 3-t & (5) \end{cases}$$

$$4) \quad 2\sqrt{3-t} = 2t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ 4 - 4t^2 = 4t^2 - 4t + 1 \Leftrightarrow 8t^2 - 4t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D_4 = 4 + 88 = 92 > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{23}. \text{ Но } t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} + 2\sqrt{23} > 2 + 2 \cdot 4 > 3. \text{ Противоречие с } 0 \leq t \leq 3$$

$$5) \quad \sqrt{t+3} = -\frac{1}{2}t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ 4t + 4 = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \in (-3; -2) \\ t = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \notin (-3; -2) \end{cases} \end{cases}$$

$$t = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \boxed{-2\sqrt{2} - 2} \quad \text{Ответ: } (-2\sqrt{2} - 2; 5; 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$p \cos(3x) + 3(p+4) \cos(x) = 6 \cos(2x) + 10 \Leftrightarrow p(4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)) + 3(p+4) \cos(x) = 6(2 \cos^2(x) - 1) + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t = \cos(x)) 4pt^3 - 3pt + 3pt + 12t = 12t^2 - 6 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 =$$

$$= (1-p)t^3 \Leftrightarrow t=0 \text{ не подходит (при } t=0: -1=0, \text{ VMO}$$

$$\text{неверно)} 1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3 \Leftrightarrow p = 1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$$

max кор 3+

$$\Leftrightarrow p = 1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3 = f(t)$$

$$f'(t) = 1 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{t^4 - 3 \cdot (t-1)^2}{t^4} =$$

$$= \frac{(t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3})(t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3})}{t^4} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3}-4)$$

Рассмотрим на  $t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3}$ :  $D = 3 - 4\sqrt{3} < 0$  (max как  $3 < 10$ )  $\Rightarrow t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3} > 0$ .

Рассмотрим на  $t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3}$ :  $D = 3 + 4\sqrt{3} > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$

$$\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < -1 \leq t \text{ (по свойствам}$$

косинуса)  $\Rightarrow$  ~~значимый корень~~

$$\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} ? 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+4\sqrt{3}} ? 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + 4\sqrt{3} ? 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\text{(как видно, } 3 < 7) \Rightarrow \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < 1 \text{ (и } > 0, \text{ max как } \sqrt{3+4\sqrt{3}} > \sqrt{3})$$

Так как  $t \in [-1; 1]$ , то  $f(t)$  ~~на~~ на  $\left[-1; \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right]$ .

$f(t)$  ~~на~~ на  $\left[\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1\right]$ ; ~~на~~  $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$  - точка

минимума; при  $t \rightarrow 0$ : ~~на~~ и  $t > 0$ :  $\frac{1}{t} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow f(t) \rightarrow +\infty$ ; при  $\frac{1}{(1-\frac{1}{t})} \rightarrow -\infty$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t \rightarrow 0 \text{ и } t < 0: \frac{1}{t} \rightarrow \begin{matrix} (1 - \frac{1}{t}) \rightarrow +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Leftrightarrow f(t) \rightarrow \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \infty.$$

У max, на  $[-1; 0)$ :  $f(t) \nearrow \text{от } -7 \text{ до } -\infty$ ; на

$$(0; \frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}] : f(t) \searrow \text{от } +\infty \text{ до } f(\frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}) =$$

$$= 1 - (1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3})^3 = * \left( \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3}{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3} \right)^3;$$

на  $[\frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1]$ :  $f(t) \nearrow \text{от } f(\frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2})$

до  $f(1) = 1$ . ~~Сравним~~ ~~между~~ ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~

получим, что  $\frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3}{2} \in (0; 1) \Rightarrow f(\frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}) \in$

$$\in (0; 1) \Rightarrow \cup \in (f(t)) = [-\infty; -7] \cup [f(\frac{-3 + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}); +\infty)$$

Итак получаем ответ.

$$* = \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3} \cdot \left( 1 + \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3} \right) + \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3)^3} \cdot (2(\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3)^2 - 2(\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3) + (\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3)^2 - 4(\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3) + 4) =$$

$$-3)^2 - 4(\sqrt{3+4\sqrt{3}} - 3) + 4) =$$



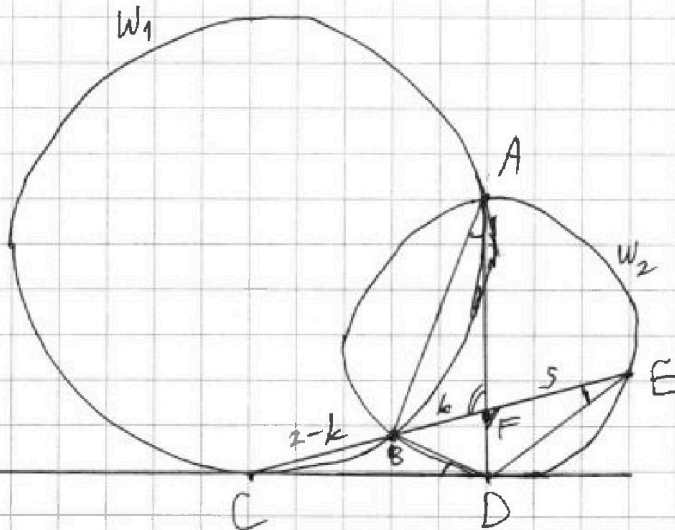
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\{A; B\} = W_1 \cap W_2$ ;  
 $CD$  - общ. кас. к  $W_1$  и  $W_2$ ;  
 $C \in W_1$ ;  $D \in W_2$ ;  
 $B$  диаметр к  $(CD)$ ,  $AM \perp$   
 $E = (CB) \cap W_2$ ;  $F =$   
 $= AD \cap CE$ ;  $CF:FE = 2:5$

Найти:  $ED:CD$

Решение:

~~Из вписанности:  $AF \cdot FD = BF \cdot FE$   
 $CB \cdot CE = CD^2$~~

~~Пусть  $CB = x$  и  $FE = 5x$ ;  $BF = k \cdot x \Rightarrow CB = (2-k) \cdot x$~~

без ограничения общности,  $FE = 5$  и  $BF = k \Rightarrow BC = 2-k$ .

Из вписанности:  $\angle DAB = \angle DEB$  ~~и  $\angle BDC = \angle BDC$~~  как

верт.  $\angle$ -ы,  $\angle AFB = \angle EFD \Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle EFD$  и

$$\triangle CED \sim \triangle CDB \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{5} = \frac{k}{FD} = \frac{AB}{ED} \\ \frac{7}{CD} = \frac{ED}{DB} = \frac{CD}{2-k} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5

Докажем, что если закрашенное множество обладает хотя бы 2 симметриями из 3, описанных в условии, то данное множество обладает всеми 3 симметриями. (далее строк)

Что означает «Звездой системы координат»?

Каждая ~~клетка~~ клетка  $(i, j)$  с координатами  $(i, j)$  ( $i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400$ ) — это клетка на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

(при этом порядковый номер строки отсчитывается ~~снизу~~ сверху-вниз, а порядковый номер столбца отсчитывается слева-направо; Нумерация

Самая верхняя строка имеет номер 1; самая

нижняя — номер 100; самый <sup>ый</sup> левый столбец имеет

номер 1; самый правый — номер 400), при этом

считаем, что строки параллельны большей

стороне прямоугольника  $100 \times 400$  (то есть стороне 400), а столбцы — меньшей (стороне 100).



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Что же означает симметрия относительно центра прямоугольника <sup>100x400</sup> в СТК? Означает она следующее:  $\forall i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400$ : клетки  $(i; j)$  и  $(101-i; 401-j)$  либо обе закрашены, либо обе не являются закрашенными.

Симметрия относительно <sup>вертикальной</sup> средней линии прямоугольника  $100 \times 400$  (она же (расположенной между 200-й и 201-й столбцами))

в СТК означает следующее:  $\forall i \in \mathbb{N}$  и  $i \leq 100; j \in \mathbb{N}$  и  $j \leq 400$ : клетки  $(i; j)$  и  $(i; 401-j)$  либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Симметрия относительно горизонтальной средней линии прямоугольника  $100 \times 400$  (расположенной между 50-й и 51-й строками) в СТК означает

следующее:  $\forall i \in \mathbb{N}$  и  $i \leq 100; j \in \mathbb{N}$  и  $j \leq 400$ : клетки  $(i; j)$  и  $(101-i; j)$  либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Рассмотрим <sup>все</sup> возможные пары симметрий, которыми может обладать прямоугольник  $100 \times 400$ :

1) относительно обеих средних линий прямоугольника.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте считать, что закрасненные клетки черные, а незакрасненные клетки белые. По свойствам этих 2 симметрий: одного цвета  $(i; j)$  и  $(i; 401-j)$ , а также  $(i; 401-j)$  и  $(101-i; 401-j) \Rightarrow (i; j)$  и  $(101-i; 401-j)$  одного цвета  $\Rightarrow$  симметрия относительно центра тоже есть.

2) относительно вертикальной средней линии и центра.  
 $\left\{ \begin{array}{l} (i; j) \text{ и } (i; 401-j) \text{ одного цвета} \Rightarrow (i; j) \text{ и } (101-i; j) \text{ одного цвета} \\ (i; 401-j) \text{ и } (101-i; 401-j) \text{ одного цвета} \end{array} \right.$   
 симметрия относительно горизонтальной средней линии тоже есть.

3) относительно горизонтальной средней линии и центра.  
 $\left\{ \begin{array}{l} (i; j) \text{ и } (101-i; j) \text{ одного цвета} \Rightarrow (i; j) \text{ и } (i; 401-j) \text{ одного цвета} \\ (101-i; j) \text{ и } (101-(101-i); 401-j) \text{ одного цвета} \end{array} \right.$   
 симметрия относительно вертикальной средней линии тоже есть.

Итак, из нашего доказательства следует, что прямоугольник  $100 \times 400$  обладает или 3 симметриями, или одной, или не имеет ни одной симметрии, описанной в условии.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сколько ее посчитаем количество способов задаться  
~~на 3 симметрии~~ ~~относитель~~

Заметим, что количество пар ~~и~~ клеток,  
обязательно одноцветные, одинаково для каждой

из 3 симметрий — это ~~100 · 100~~ ~~20000~~ ~~Почему?~~

$\frac{100 \cdot 100}{2}$ . Почему? Потому что в каждой из

определенной симметрии через СРЖ пары

$(i, j)$  и ~~(j, i)~~ клеток  $\{(a, b); (c, d)\}$  и  $\{(c, d); (a, b)\}$

считаются одинаковыми (при этом не может

быть такого, что  $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ , иначе  $\begin{pmatrix} 101:2 \\ 401:2 \end{pmatrix}$ ). Но

~~есть~~ есть, выбирая 1 строку (100 способами) и

1 столбец (400 способами), на каждую из пар

мы наткнемся дважды (так как в паре 2 клетки,

а на пересечении 1 строки и 1 столбца равно 1 клетка)

Таким образом, нужная пар действительно  $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$ .

Чтобы ~~определить~~ ~~хотя бы 1~~ из симметрий,

нужно закрасить <sup>ровно</sup> 4 пары из 20000 пар,

соответствующих данной симметрии. Количество

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

способов сделать <sup>это</sup> также равно  $C_{20000}^4$ . А как добиться всех 3 симметрий? Обратим внимание на то, что  $(i; j)$ ,  $(i; 401-j)$ ,  $(401-i; j)$  и  $(401-i; 401-j)$  одного цвета. Сколько таких четверок?

Учитывая, что они не пересекаются (как и пары ранее),  $\frac{100 \cdot 100}{4} = 2500$  (аккуратно). И чтобы добиться всех 3 симметрий, нужно закрасить ровно  $2$  из  $2500$  четверок.

Количество способов сделать это равно  $C_{2500}^2$ .

Так как также <sup>и</sup> ~~ка~~ способы учитываются в ~~каждом~~ количестве способов для <sup>каждой из</sup> 3 симметрий, то общее кол-во способов добиться хотя бы одной симметрии равно  $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$  (нужно учитывать  $C_{10000}^2$  1 раз, а не 3 раза, как раньше).

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6

Рассмотрим все случаи относительно остатков  $a$  и  $b$  при делении на 3:

$a \equiv ? \pmod 3$ (какой остаток при делении $a$ на 3?)	0	1	2
$b \equiv ? \pmod 3$ (какой остаток при делении $b$ на 3?)	0	1	2
0	$b - a \equiv 0$ , то есть $(b - a) \div 3$ . Противоречие с условием.	$d^2 + b \equiv 1 \pmod 3, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$ . Противоречие с условием.	$d^2 + b \equiv 1 \pmod 3, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$ . Противоречие с условием.
1	$d^2 + b \equiv 1 \pmod 3, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$ . Противоречие с условием.	$b - a \equiv 0$ , то есть $(b - a) \div 3$ . Противоречие с условием.	<del>Вариант I</del> $\begin{cases} b - a \equiv 2 \pmod 3 \\ a^2 + b \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ Все корректно (возможность I)
2	<del>Вариант II</del> $\begin{cases} b - a \equiv 2 \pmod 3 \\ a^2 + b \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ Все корректно (возможность II)	$d^2 + b \equiv 0 \pmod 3, a$ $710 = 3 \cdot 236 + 2$ . Противоречие с условием.	$b - a \equiv 0$ , то есть $(b - a) \div 3$ . Противоречие с условием.

Далее  $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$ . Учим это далее. К вариантам I и II вернемся позже.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} \neq & \neq \\ \downarrow & \downarrow \\ (a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \neq & \neq & \neq & \neq \end{matrix}$$

Поскольку ~~число~~  $p$ -простое

число, то  $p \in \mathbb{N}$  и  $p \geq 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a < b \text{ (всё корректно)} \\ \text{(случай а)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = -p \\ b-c = -p \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \text{ (противоречие с} \\ \text{условием)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a > b \text{ (противоречие с} \\ \text{условием)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{array} \right\} \Rightarrow b > a \text{ (всё корректно)} \\ \text{(случай б)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = p \\ b-c = p \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \text{ (противоречие с} \\ \text{условием)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a > b \text{ (противоречие с} \\ \text{условием)}$$

В случае а:  $c = b+1 \Rightarrow a-b-1 = -p^2 \Leftrightarrow b-a+1 = p^2$

~~В~~ В любой из возможностей I и II:  $b-a+1 = p^2$

$\Leftrightarrow b-a+1 = 0$  то есть  $p^2 = 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow b-a+1 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = a+8 \Rightarrow a^2 + (a+8) = 70 \Leftrightarrow a^2 + 27a - 26a - 27 \cdot 26 =$

$= 0 \Leftrightarrow (a+27)(a-26) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -27 \Rightarrow b = -19 \Rightarrow c = -18 \\ a = 26 \Rightarrow b = 34 \Rightarrow c = 35 \end{cases}$

Как видим, при  $a = -27$  реализуется возможность II, а при  $a = 26$  реализуется возможность I.

В случае б:  $c = a-1 \Rightarrow b-a+1 = p^2$ . Аналогично  $p = 3$  и

$b = a+8 \Rightarrow$  (аналогично)  $\begin{cases} a = -27 \Rightarrow b = -19 \Rightarrow c = -28 \\ a = 26 \Rightarrow b = 34 \Rightarrow c = 25 \end{cases}$

Ответ:  $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18);$

$(26; 34; 25); (26; 34; 35)$



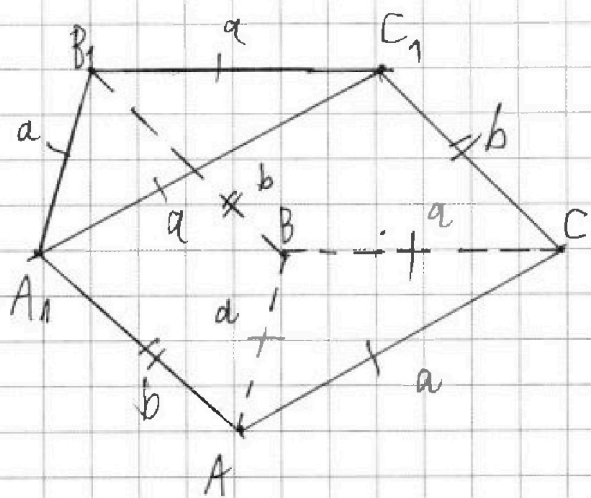


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$  равност.;

$ABCA_1B_1C_1$  - призма;

$$S_{A_1B_1BA} = S_{A_1C_1CA} = 3;$$

$$S_{A_1C_1CB} = 2.$$

Найти:  $V_{ABCA_1B_1C_1}$

Решение:

По св. призмы:  $AA_1 = BB_1 = CC_1 =$  (высота)  $b$ .

$\triangle ABC$  равност.  $\Rightarrow AB = BC = AC =$  (сторона)  $a$ .

По св. призмы:  $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a$ .

$$\text{По св. равност. } \triangle - a: S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{27}}{3}.$$

По св. пр.:  $A_1B_1BA, A_1C_1CA, B_1C_1CB$  - параллелограммы  $\Rightarrow$

$$S_{A_1B_1BA} = ab \sin(\angle A_1AB); S_{A_1C_1CA} = ab \sin(\angle A_1AC); S_{B_1C_1CB} = ab \sin(\angle C_1CB).$$

$$\text{Из условия: } \begin{cases} \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1AB) = 3 \\ \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1AC) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Значит } \sin(\angle A_1AB) = \sin(\angle A_1AC), a \begin{cases} \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle A_1AB) = 3 \\ \frac{2\sqrt{27}}{3} b \sin(\angle C_1CB) = 2 \end{cases}$$

$$\sin(\angle A_1AB) : \sin(\angle C_1CB) = 3 : 2. \quad V_{ABCA_1B_1C_1} = h \cdot S_{\triangle ABC} = h \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3-t}} \cdot (\sqrt{3-t}-1) - \frac{1}{\sqrt{3-t}} \cdot (\sqrt{3-t}+1) \right)$$

$$a^2 + b = 710 = 3 \cdot 236 + 2$$



a \ b	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	2	0	0

a \ b	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

$$\begin{cases} d \equiv 0 \\ b \equiv 2 \\ a \equiv 2 \\ b \equiv 1 \end{cases}$$

$$12 + 16\sqrt{3} \quad 27 + 12\sqrt{3}$$

$$9 \cdot 78 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13$$

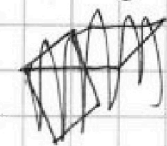
$$(d-c)(b-c) = p^2 \quad 4pt^3 - 3pt^2 + 3pt + 12t = 702 = 12t^2 - 6t + 10$$

$$a^2 + b = 710 = (\sqrt{3-t}-1)^2 - (\sqrt{3-t}+1)^2$$

опущены лишние  
если вычит

$$c = d - 1$$

$$b = a + 8$$



$$b - a + 1 = g$$

$$d^2 + d - 702 = 0$$

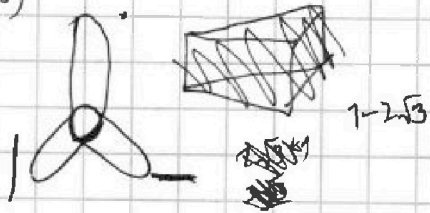
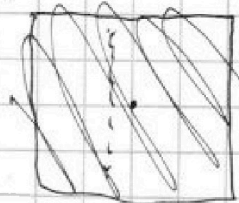
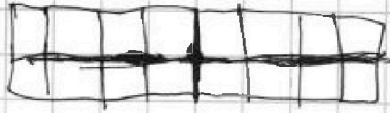
$$(a+27)(a-26) = 0$$

$$\arcsin(\alpha) = 3$$

$$ab = 2$$

(-27; -19; -28)

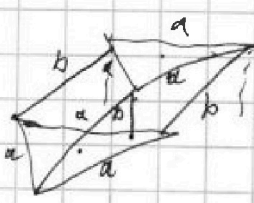
(26; 34; 25)



$$20000 \quad C_{20000}^4 + C_{20000}^4 + C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$$

$$3 \cdot C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$$

$$\left( \sqrt{\frac{3}{2} + 3} + 1 \right) \left( \sqrt{3 - \frac{3}{2}} - 1 \right) = 7$$



$$\alpha^2 = \frac{4\sqrt{27}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{27}}{3}$$

$$(t^3) + (3-t) + 2$$

$$\arcsin(\alpha)$$

$$-1 \rightarrow -7$$

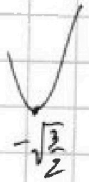
$$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{5}{9}$$



$$k^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha)$$

$$m^2 = y^2 + z^2 + 2yz \cos(\alpha)$$

$$n^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(\beta)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$a^3 = 9 - 9ab^2$$

$$3a^2b + 3b^3 = 19$$

$$a^2b + b^3 = 4$$

$$+ \infty$$

$$9 + \sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^3$$

$$a + b + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}b + 2 = 4\sqrt{3}ab$$

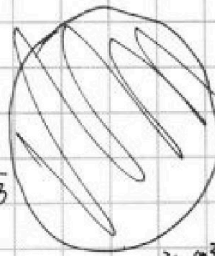
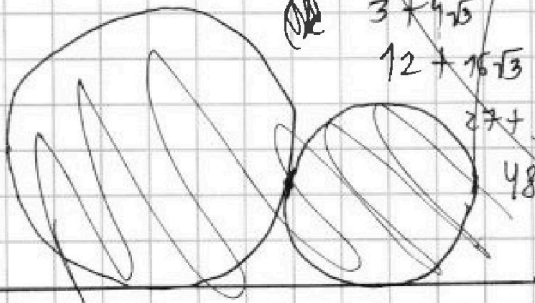
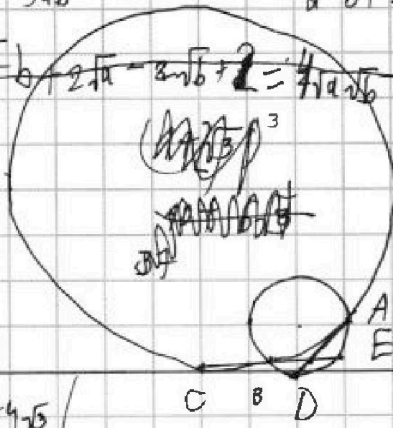
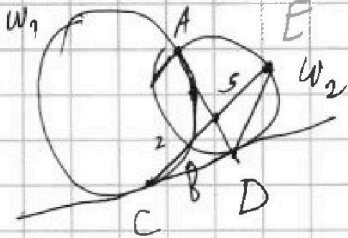
$$-5W + 36$$

$$-3W + 36$$

$$9$$

$$5W - 36$$

$$+ \infty$$



$$3 \times 4\sqrt{3}$$

$$12 + 16\sqrt{3}$$

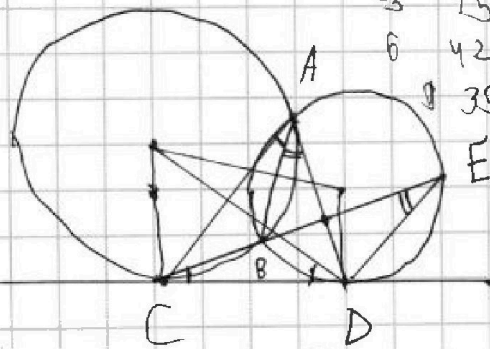
$$27 + 36\sqrt{3}$$

$$48 + 64\sqrt{3}$$

$$t+3 \quad 4(W-t+Z)$$

$$16 \quad 3-t-\frac{4}{2}$$

$$\sqrt{t+3} \quad (a\sqrt{3} + b\sqrt{t+c})^2$$



$$45$$

$$42$$

$$39$$

$$12$$

$$6d^2 + C^2 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + C^2 - 4 - (x+2)^2 + 9 + z + 4 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + 2ac\sqrt{t^2+z} + 2b\sqrt{3t}$$

$$(x+2) + 3$$

$$\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t-4z} + 4 = 2\sqrt{y-t^2+z+4}$$

$$2ac = 1$$

$$C^2 = 5$$

$$b^2 = 2$$

$$\sqrt{y+4} + \sqrt{y-5} = \sqrt{6-t-4z} + 4 = 2\sqrt{y-t^2+z+4} + 20$$

$$y - 4x - x^2 + z$$

$$1 - x - 4z$$

$$x \geq -5$$

$$x + 4z \leq 1$$

$$y - 4x - x^2 + z$$

$$(a+1)(b-1) = 5$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{3-t}$$

$$6d^2 + C^2 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + 2ac\sqrt{t^2+z} - (1+4\sqrt{3})^3 - 2ac\sqrt{3t-b}$$