



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть  $b_1$  - первый член геометрической прогрессии,  
значит что  $b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ ,  $b_{13} = 5-x$ ,  $b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$ ,

$$b_{n+1} = b_1 q^n, q \neq 0, q \neq 1.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 q^6 \\ 5-x = b_1 q^{12} \\ \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 q^{14} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = q^8 \\ \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} = q^2 \end{cases}$$

Тогда:  $\frac{(13x-35)^2(x+1)^2}{(5-x)^4} = (x+1)^2 \mid : (x+1)^2$   
 $x+1 \neq 0$

Получим следующее:

$$(13x-35)^2 = (x^2 - 10x + 25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + 3x - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 20 \end{cases} \text{ Заметим, что при } x=2 \text{ выражение}$$

$\sqrt{(13x-35)(x+1)}$  не определено. А при  $x=20$ , то  $b_1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} < 0$  - противоречие. Значит

~~$x \in \{3, 20\}$~~   $x \in \{-5, 3\}$ . При  $x = -5$ :  $b_1 = \frac{5}{32}$ ,  $q = \sqrt{2}$ ,  
при  $x = 3$ :  $b_1 = \frac{1}{32}$ ,  $q = \sqrt{2}$ . Ответ:  $x = -5, x = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

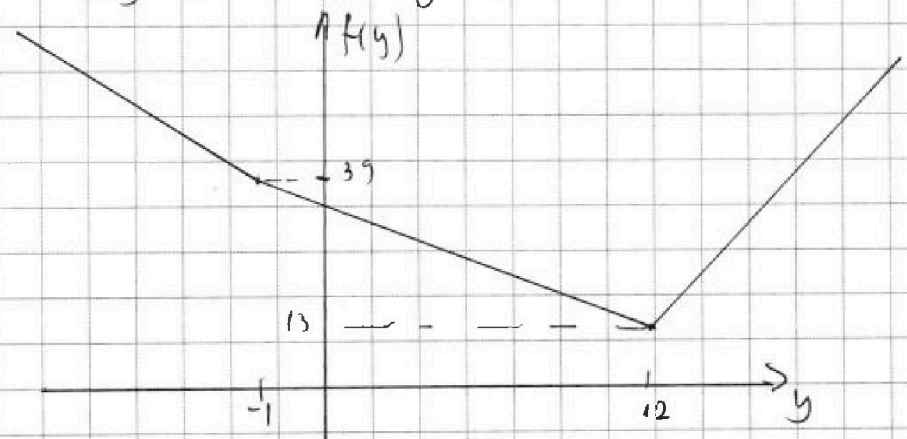
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2z} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$ .

$$f(y) = \begin{cases} -4y + 37, & y \in (-\infty; -1] \\ 37 - 2y, & y \in [-1; 12] \\ 4y - 35, & y > 12 \end{cases}$$



Таким образом  $|y+1| + 3|y-12| \geq 12, \sqrt{169-2z} \leq 13$ .

Значит (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$

(1):  $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad | x \in [-3; 4]$

Сделаем замену:  $a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{4-x}$ . Тогда:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b + 5 = 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 1 \\ a-b = -2 \end{cases}$$

$$1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1-2\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x = \frac{1-2\sqrt{10}}{2}$

Ответ:  $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0), (\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - (p + 3) = 0$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t + 1)^2 = 0$$

Максимум функции  $f(t)$  — монотонно возрастает на

$$[-1; 1]. \quad f(-1) = -4, \quad f(1) = 10 \Rightarrow \boxed{p \in [-4; 10]}$$

Сделаем замену:  $t = a - \frac{1}{2}$ .

$$4(a - \frac{1}{2})^3 + 6(a - \frac{1}{2})^2 + 3(a - \frac{1}{2}) - 3 = p$$

$$4(a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}) + 6(a^2 - a + \frac{1}{4}) + 3a - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - \frac{1}{2} + 6a^2 - 6a + \frac{3}{2} + 3a - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 = p + \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{4} \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{2}$$

Значит имеет уравнение  $\cos x = \frac{1}{4} \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{2}$

$$a = \sqrt[3]{\frac{p + \frac{7}{2}}{4}} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{p + \frac{7}{2}}{4}} - \frac{1}{2}$$

Имеет уравнение  $\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p + 7}{8}} - \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $p \in [-4; 10]$ ;  $x = \pm \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{2p + 7}{8}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n$   
 $n \in \mathbb{Z}$



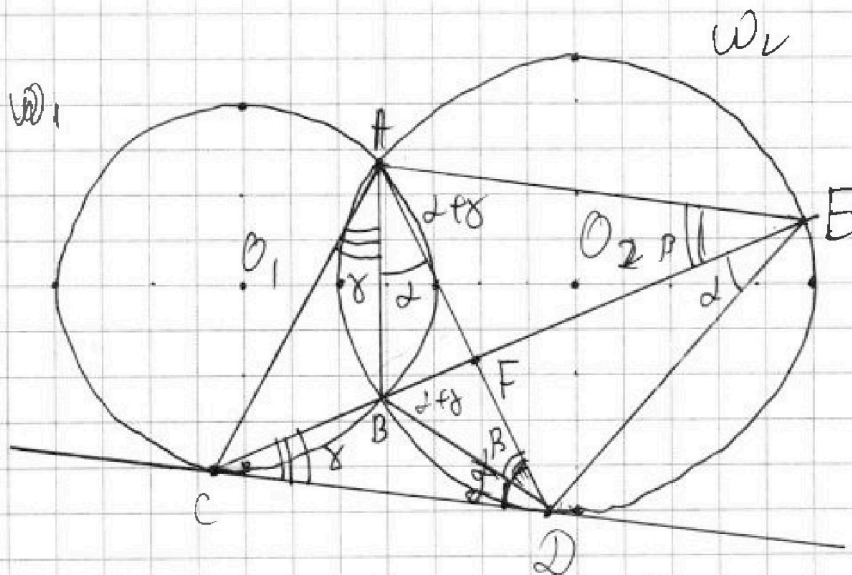
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.  
 $r_i$  - радиус  $\omega_i$



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

Заметим, что AF - биссектриса  $\angle CAE$ .

$$\alpha = \angle FED, \beta = \angle AEF, \gamma = \angle BCD.$$

$$\angle BCD = \angle CAB = \gamma \text{ (углы хорды касательной и хорды)}$$

$$\angle BAD = \angle BED = \alpha \Rightarrow \angle CAF = \alpha + \beta.$$

$$\angle CDB = \angle BED = \alpha \text{ (углы хорды касательной и хорды)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EBD = \alpha + \beta = \angle BAE \Rightarrow \angle OAE = \alpha + \beta. \text{ Значит AF -}$$

$$\text{биссектриса } \angle CAE. \text{ По д-ву биссектрисы: } \frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}.$$

$$\text{По теореме синусов: } AE = 2r_2 \sin \angle ADE,$$

$$AC = 2r_1 \sin \angle CBA \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \Rightarrow \boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{10}}.$$

Заметим, что  $\frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$  по теореме синусов в  $\triangle CDE$ .

$$\text{(другой способом: } ED = 2r_2 \sin(\alpha + \beta), BC = 2r_1 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \frac{BC \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = 2r_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{r_2}{r_1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом:

$$\begin{cases} \frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ \frac{ED}{CD} = \frac{r_2}{r_1} \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{10}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = 6 \cdot 9^6 \\ 5-x = 6 \cdot 9^{12} \\ \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 6 \cdot 9^{14} \end{cases}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 6 \cdot 9^6 \cdot 9^8 = 6 \cdot 9^{14}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 9^2$$

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(x+1)^2} = 9^8$$

$$\frac{(13x-35)^2 (x+1)^2}{(x-5)^4} = (x+1)^2$$

$$(13x-35)^2 = (x-5)^4$$

$$(13x-35)^2 = (x^2 - 10x + 25)^2$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35 \\ x^2 - 10x + 25 = -13x + 55 \end{cases}$$

$$x^2 - 23x + 50 = 0$$

$$x = 2 \quad x = 21$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ a - b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ } p \text{ - простое число} \\ a + b^2 = 560 \end{array} \right\}$$

Рассмотрим равенство  $a + b^2 = 560$ . По модулю 3  $b^2 \equiv 0$  или  $b^2 \equiv 1$ . Если  $b^2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow b \equiv 0 \pmod{3}$ , то

$$a \equiv 560 \equiv 11 \equiv 2 \pmod{3}$$

Если  $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $a \equiv -1 \pmod{3}$ . Т.к.  $a \not\equiv b \pmod{3}$ , то

$a \equiv -1 \pmod{3}, b \equiv -1 \pmod{3}$ . Значит возможны два случая:

$$\boxed{a \equiv -1 \pmod{3}, b \equiv 0 \pmod{3}} \quad \text{или} \quad \boxed{a \equiv -1 \pmod{3}, b \equiv -1 \pmod{3}}$$

При условии, что  $a > b$   $(a-c)(b-c) = p^2$   $\left\{ \begin{array}{l} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \\ a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{array} \right.$

(знаки в какой-либо системе совпадают)

Все "жандармы" и значения  $b$ :  $\{2, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23\}$



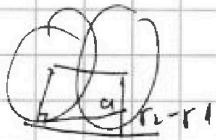


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

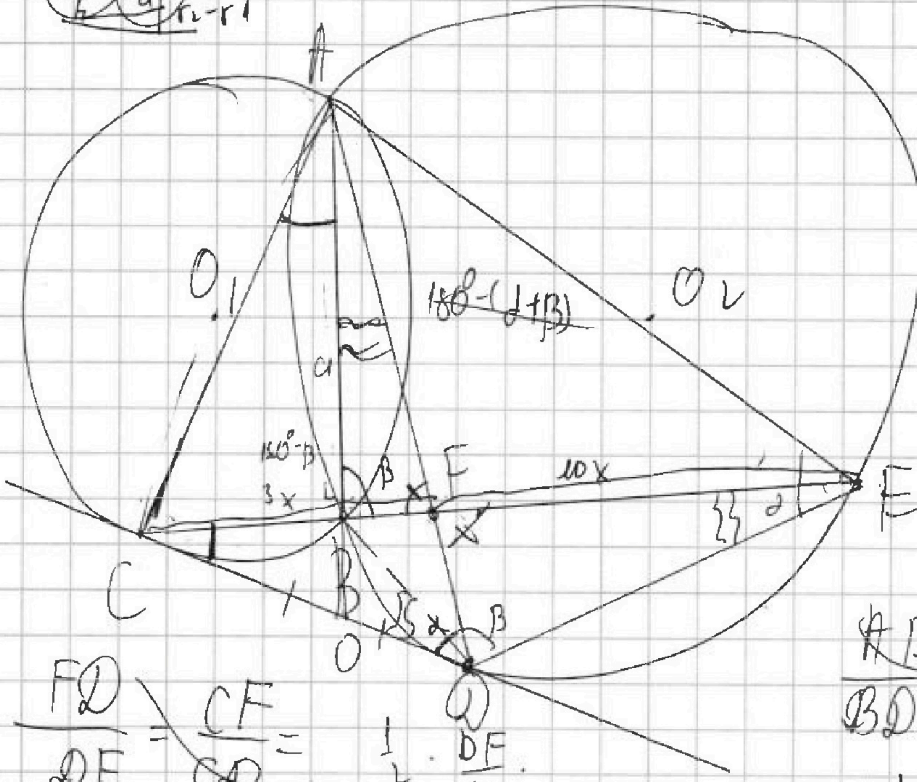
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CL}{LO} = \frac{AL}{CO} \quad (*)$$

$$\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{DE}{DC} = ?$$



$$\frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF} =$$

$\triangle ABD \sim \triangle A$

$$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{10}{3} \left( \frac{AD}{AE} \right)^{-1}$$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{FE}{AF}$$

$$\frac{DE}{FE} = \frac{AB}{AF}$$

$\triangle ABE \sim \triangle ABO$

$$\frac{CF}{DC}$$

$$\triangle BCD \sim \triangle CDE: \frac{CD}{CB} = \frac{DE}{BD} = \frac{CE}{CD} \quad \left| \frac{DE}{CD} = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{3x} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad | \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$3\cos 2x = 5(2\cos^2 x - 1) = 6\cos^2 x - 5$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 8 = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 8 = p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$p \in \Sigma = \{4; 10\}$$

$$t = \frac{\pi}{6}$$

$$3\cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{3 + 6\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cos 2x \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2\cos 2x (\cos x + \cos 2x)$$

$$\cos x = u$$

$$\cos 2x = v$$

$$t = 1$$

$$t = 0$$

$$-3$$

$$t =$$

$$\begin{cases} 5u + 3v + 2uv = p \\ v = 2u^2 - 1 \end{cases} \quad \left( \begin{matrix} 10 + 3 - 3 = 10 \\ \sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{3} = 4t^3 - 3 \\ t = \end{matrix} \right)$$

$$4\cos^3 x + 6(\cos x - 1)(\cos x + 1) + 3(\cos x + 1) = 0$$

$$4\cos^3 x + 3(\cos x + 1)(2\cos x - 2 + 1) = 0$$

$$4\cos^3 x + 3(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x + 3\cos 2x = p$$

$$4t^3 + 6t^2 = 0$$

$$f = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$4t + 6 = 0$$

$$3\cos x + 2$$

$$3\cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^3 x + 6\cos x + 3\cos 2x = 0$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - (p+3) = 0$$

$$t \rightarrow t - \frac{3}{2} \quad \left( 4\left(t + \frac{3}{2}\right)^3 + 6\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{3}{2}\right) + (p+3) = 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $\sqrt{ab} =$

$$b_2 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$

$$b_{13} = 5-x, b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

уравнения:

$$\begin{cases} (13x-35)(x+1) \geq 0 \\ \frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = b_{196}$$

$$5-x = b_{19}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_{1914}$$

$$(5-x) \sqrt{\frac{x+1}{13x-35}} = b^6$$

$$x+1 = b^8 \Rightarrow$$

$$(5-x)(x+1) \sqrt{\frac{x+1}{13x-35}} = b^8$$

$$x+1 = b^8$$

$$\sqrt[4]{3}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{3}{16} = b^6, 3 = b^2$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{13x-35}{x+1} \\ b^2 = (5-x)^2 \\ b^4 = \frac{(5-x)^2(x+1)}{13x-35} \end{cases}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \frac{(x+1)^3}{13x-35}$$

$$10 = b_{10} \cdot 64$$

$$b = \frac{5}{32}$$

$$\begin{aligned} b &= 5+40 \\ b &= 25^2 - 240 \end{aligned}$$

$$b_1 = 15^2 - 60$$

$$169 - 60 = 109$$

$$b^2 = (5-x)$$

$$\begin{aligned} 25 &= 5^2 \\ 109 &= 10^2 + 9 \\ 109 &= 10^2 + 9 \\ 109 &= 10^2 + 9 \end{aligned}$$

$$b_{13} = 2, b_{15} = 6_{11}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 10 &= 130 \\ 260 - 35 &= 225 \\ 225 &= 15^2 \\ 21 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23+17 &= 40 \\ 4+6 &= 10 \\ 20 \cdot 3 &= 60 \\ 169-60 &= 109 \end{aligned}$$

$$b_7 = \frac{8}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b \quad = p^2$$

$$(a-c)(b-c) = ab - ac - bc + c^2$$

$$c^2 - (a+b)c + ab = 0 \quad \frac{a+b+a-b}{2} = \textcircled{a}$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 = 0 \quad \textcircled{b}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a-b = 1 - p^2 < 0$$

$$a-b = -1 + p^2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=1 \\ b-c=-p^2 \\ a-c=p^2 \\ b-c=1 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \\ a-c=p^2 \\ b-c=p^2 \end{array} \right\} \textcircled{=}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-b=p^2-1 \\ a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \\ a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{array} \right\}$$

$$a+b = -p^2 + 1 < 0$$

Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram of a rectangle with height 1 and width 1.
- Diagram of a square with side length 1, divided into four quadrants.
- Diagram of a square with side length 1, divided into four quadrants, with a smaller square of side length  $p$  in the top-right quadrant.
- Equations:  $p = -4$ ,  $\sqrt[3]{p+\frac{7}{2}} = -2$ ,  $\sqrt[3]{p+\frac{7}{2}} = -1$ ,  $\sqrt[3]{p+\frac{7}{2}} = -1.4$ ,  $\sqrt[3]{p+\frac{7}{2}} = -2$ ,  $p+\frac{7}{2} = -8$ ,  $p = -8 - \frac{7}{2} = -\frac{23}{2}$ ,  $S_1 = S_2 = 4$ ,  $S_3 = 5$ .
- Arithmetic:  $\frac{-1+3-6-4+1}{2} = -1.5$ ,  $\frac{3-1-1}{-1-1} = 1$ .



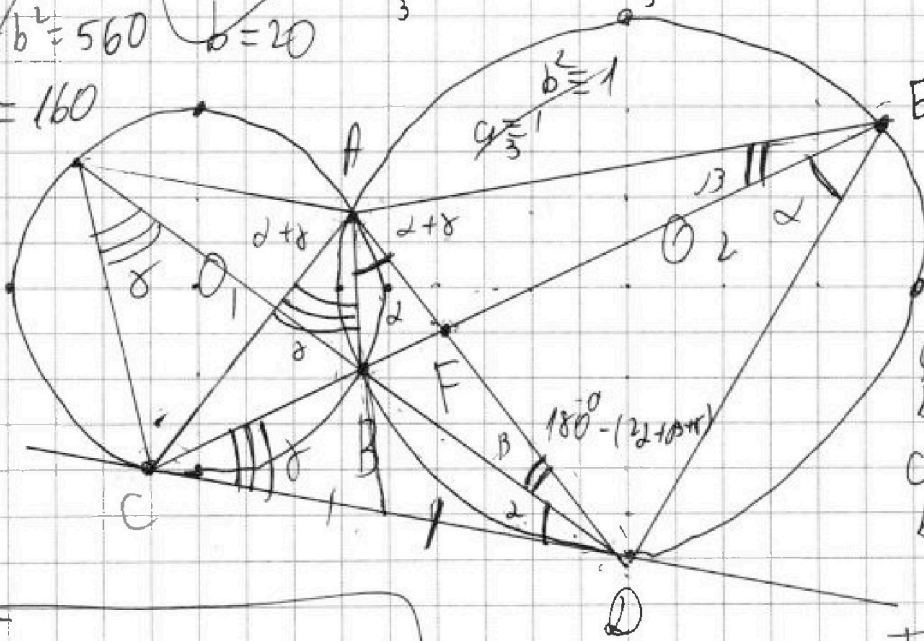
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$   
 $a - b \neq 3$   
 $(a - c) / (b - c) - \text{неч. к.б.}$   
 $a + b^2 = 560$   
 $a = 160$   
 $b = 20$   
 $a + b^2 = 2$   
 $a \neq b$   
 $a \equiv -1$   
 $b \equiv 1$   
 $a \equiv 0$   
 $b \equiv 0$



$ED = ?$   
 $\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$   
 12 банок < 22 мешка

$a \equiv -1$   
 $b \equiv 0$   
 $c \equiv -1$   
 $b \equiv -1$

$$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{AD}{AE}$$

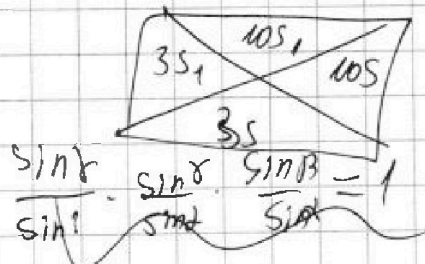
$$\frac{ED}{CD} = \frac{10}{3} \left( \frac{AD}{AE} \right) = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{CB}$$

$$\triangle FDE \sim \triangle BFA: \frac{ED}{BF} = \frac{FE}{AB} = \frac{AE \sin B}{ED \sin A} = \frac{AC}{CD \sin A}$$

$$\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$



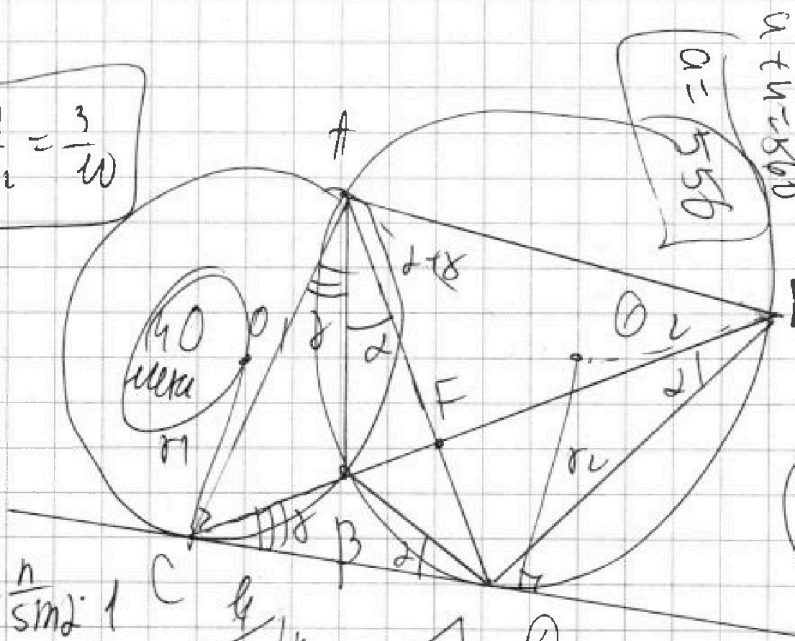
$$\frac{AD \sin \alpha}{AC \sin \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{BD}{CB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

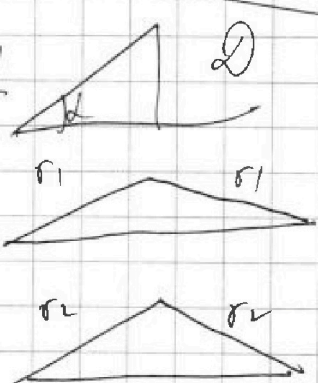
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$a + u = 560$   
 $a = 556$   
 $2\alpha + \beta + \gamma$   
 $180^\circ - 2\alpha + \beta + \gamma$   
 $2\alpha = 484$   
 $u = 576$   
 $2\alpha = 576$   
 $180^\circ - \alpha - \beta$   
 $180^\circ - \alpha - \gamma$   
 $360^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma$

$l = \frac{n}{\sin \alpha} \cdot l$   
 $AC = \frac{3a}{2}$   
 $AE = \frac{u}{2}$

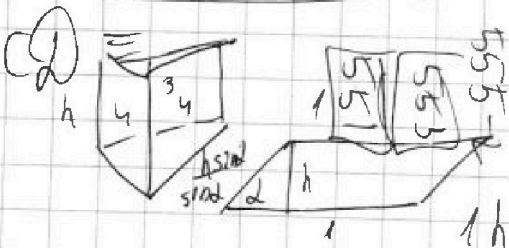


$360^\circ - 2(2\alpha + \beta + \gamma)$   
 $2\alpha + \beta + \gamma$   
 $180^\circ + (2\alpha + 2\beta + \gamma)$   
 $360^\circ + 2(2\alpha + \beta + \gamma)$

$\frac{\alpha}{r1} = \frac{3}{w}$

$2r1 \sin(2\alpha + \beta + \gamma)$   
 $2r2 \sin(2\alpha + \beta + \gamma)$

$DE = 2r1 \sin(\alpha + \gamma)$   
 $360^\circ - (2\alpha + \beta + \gamma)$   
 $2\alpha + \beta + \gamma$



$u = 554$   
 $C = 555$   
 $O = 553$   
 $u = 554$

$180^\circ - \alpha - \gamma + 180^\circ - 2\alpha - \beta$   
 $360^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma$   
 $2\alpha + \beta + \gamma$

$b = 2, b = 3, b = 5, b = 7, b = 9, b = 11, b = 12, b = 14, b = 15$   
 $b = 17, b = 16, b = 10$   
 $b = 11, b = 12, b = 15$   
 $b = 17, b = 16, b = 10$



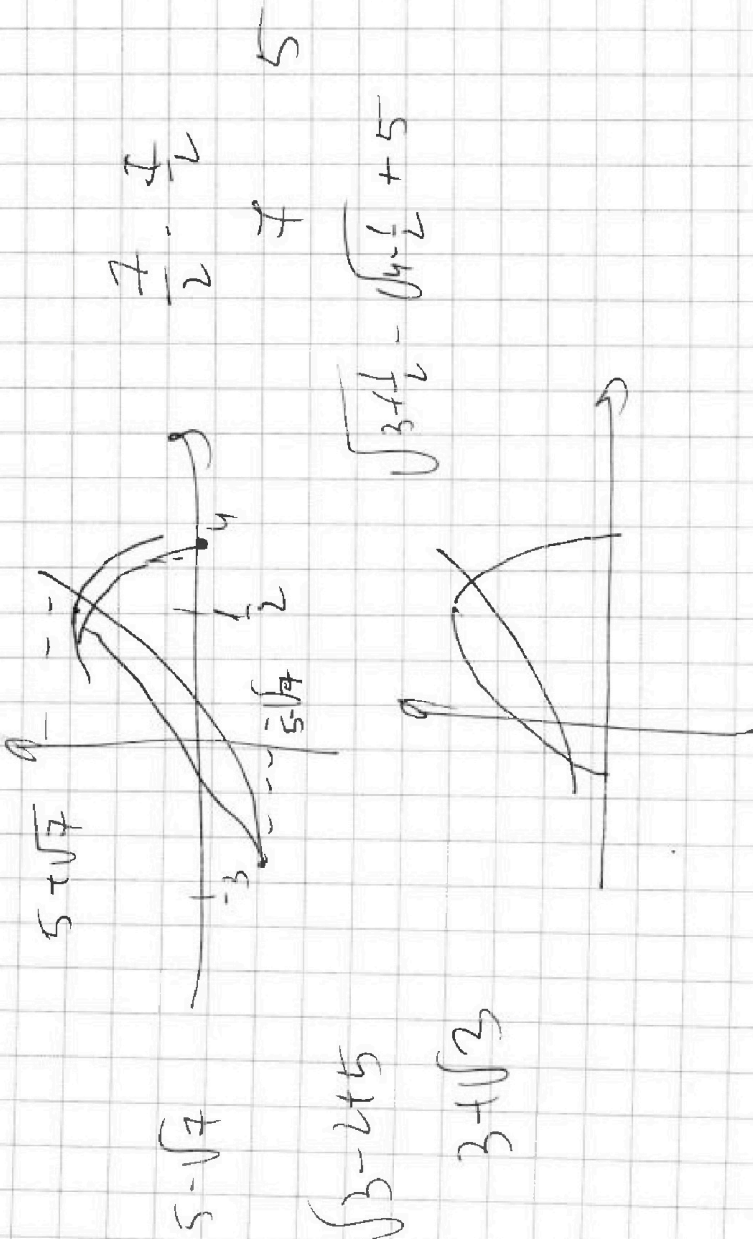


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 2:$$

$$a + b = 5600$$

$$a = 556$$

$$16 \equiv 1$$

$$\Rightarrow 3$$

$$C \neq 555$$

$$u$$

$$C \neq 557$$

$$(556 - c)(2 - c) = p^2$$

$$556 - c = p^2$$

$$c = 1$$

$$c = 3$$

$$555 = p^2$$

$$553 = p^2$$

$$\equiv -1$$



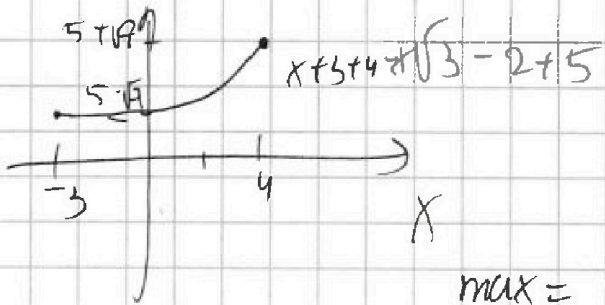
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad (x \in [-3; 4])$$



$$5 - \sqrt{7} + 2b - 6 = 0$$

$$\sqrt{7} + 5 = 2b + 2b - 6 = 0$$

$$5 - \sqrt{7} + 7 = 2b + 2b - 6 = 0$$

$$\sqrt{7} > -2$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$\max = 2\sqrt{\frac{4^2}{4}} = 7$$

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2ab = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + a - b + 5 = 7$$

$$(a - b)^2 + (a - b) - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = -1$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$7 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 1$$

$$3 = \sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$9 = -x^2 + 7x + 12$$

$$\left( \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right)$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} > 4 \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$b = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$1) a - b = 1$$

$$a = b + 1$$

$$2b^2 + 2b - 6 = 0$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} + 1$$

$$b = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = 1 - \sqrt{13}$$

$$x+3 = \frac{1+13-2\sqrt{13}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2}$$

$$x+3 = \frac{14 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{14 + \sqrt{13}}{2}$$

$$1 + \sqrt{13} > 0$$

$$\sqrt{13} > 7$$

$$14 + \sqrt{13} = 7 + \sqrt{13} + 7$$

$$\sqrt{13} > 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} z=13 \\ y=12 \\ x=? \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{-x-5} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+25}$$

$$x \geq -3$$

$$-x-5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -5$$

$$x+5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5$$

$$x \in [-3; 17]$$

$$x \geq -3$$

$$x-17 \leq 0 \Rightarrow x \leq 17$$

$$x+5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5$$

$$x \leq -5$$

$$x+6 = -\frac{1}{1-4} = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} z=13 \\ y=12 \\ x=? \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{-x+17} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x}$$

$$f' = \frac{x+3}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{-x}} - x^2+x-1 \geq 0$$

$$-x^2+x+1 \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 2]$$

**Ответ:**  $\emptyset$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=12 \\ x=? \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

$$x \in [-3; 4]$$

$$x+3 = 4-x \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$a-b+5=2ab \Rightarrow 4$$

$$a(1-b) + 11-b + 5 = 0$$

$$(1-b)(1+9) + 4 = 0$$

$$9(1-2b) = (9-2b)$$

$$9(1-2b) + \frac{1}{2}(1-2b) = 0$$

$$9 + \frac{1}{2} = 2b(9 + \frac{1}{2})$$

$$b = \frac{19}{18}$$

$$x^2 - x + 12 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-48}}{2}$$

$$x+3 = 14 - 4x \Rightarrow 5x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

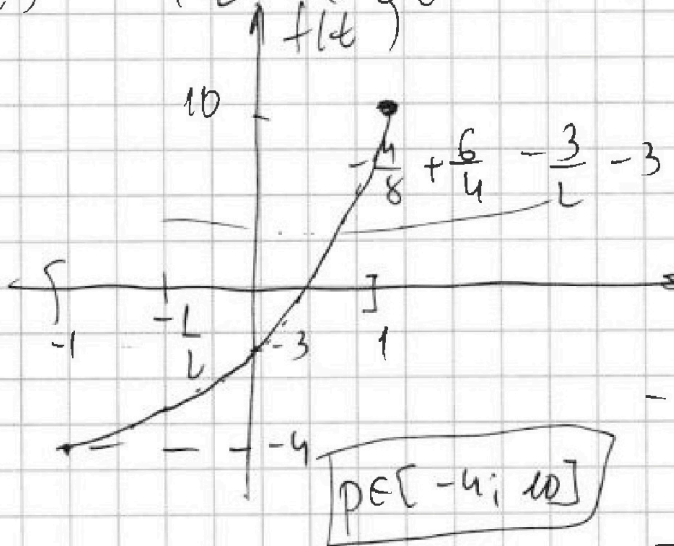
$$\frac{1}{2} + \frac{6}{4} + 3 - 3$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$3\cos 2x = 3(2\cos^2 x - 1) = 6\cos^2 x - 3$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \quad | \quad t \in [-1; 1]$$



$$f' = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

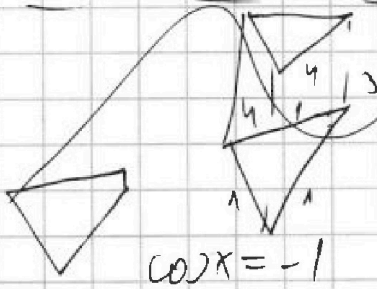
$$(2t + 1)^2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{3 - 3 - 3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$2 - 6 = -4$$

$$4 + 6 + 3 - 3 = 10$$



$$x = \pi$$

$$x = \pi$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos 2x = 1$$

$$-1 + 3 + 6 = -4$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x$$

$$2\cos 2x \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2UV + 3V + 5U = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x$$

$$V = 2U^2 - 1$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 3\cos 2x = p$$

$$4\cos^3 x + 3\cos$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть  $b_1$  - первый член ариф. прогрессии,  
 $q$  - шаг.  $\Rightarrow$   $q$ -шаг

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{13x-55}{x+11}} = b_1 q^6 \\ 5-x = b_1 q^{12} \\ \sqrt{(13x-55)(x+11)} = b_1 q^{14} \end{cases}$$

$$\frac{-15}{21^3} \cdot 21^4 \sqrt{21^2} = \frac{-15}{21^2} \sqrt{21^2} \cdot 21^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 26 = 2 \quad \frac{35-55}{-9-1+3(12-9)}$$

$$\Rightarrow \frac{(5-x) \sqrt{\frac{x+11}{13x-55}}}{(x+11)} = q^2$$

$q = 9+6=15$   
 $b = 8-9 = -1$

$$\sqrt{\frac{(13x-55)(x+11)}{5-x}} = q^2$$

$\Rightarrow b_1 = \frac{-15}{21 \cdot 21 \cdot 21}$

$$(x+1)^2 = q^2 \frac{(13x-55)^2 (x+1)^2}{(x-5)^4} : |x+1|^2$$

$$(x-5)^4 = (13x-55)^2 \Leftrightarrow (x^2-10x+25)^2 = (13x-55)^2$$

$$\begin{cases} x^2-10x+25 = 13x-55 \\ x^2-10x+25 = -13x+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-23x+80=0 \\ x^2+3x-10=0 \end{cases}$$

$x = \{ 3, 10 \}, x = \{ -5, 2 \}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1)  $x=3$ ,  $d = \frac{1}{32}$ ,  $q = 64$
- 2)  $x=10$ ,  $q = \sqrt[4]{2}$ ,  $b_1 = -\frac{15}{21^3}$  X
- 3)  $x=-5$ :  $d, q^{12} = 10$ ,  $q = \sqrt{2}$ ,  $b_1 = \frac{5}{32}$
- 4)  $x=12$ :  $d, q = 20$ ,  $b_1 = \frac{5}{32}$
- Ответ:  $x=3, x=-5$ .

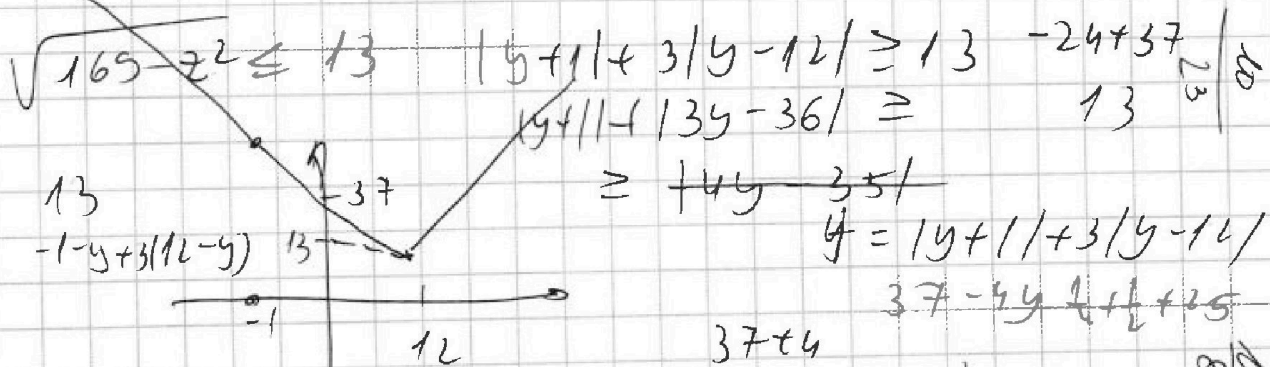
$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

1)  $1-y + 3(12-y) = \sqrt{169-z^2}$

$$37 - 4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$4y \leq 37 \Rightarrow y \leq \frac{36+1}{4} = 9.25$$



$z = \pm 13$

$y = 12$   $\left\{ \begin{array}{l} z = 13 \\ y = 11 \end{array} \right.$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{-9-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+25}$$

$$x_6 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$