



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдите все такие  $x$ , при которых существует  
геом. прогрессия, такая, что седьмой член  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$   
девятый  $-x+3$ , пятнадцатый  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$

геом.  
Пусть  $d$  — это делитель прогрессии.

$$\begin{cases} 1) x+3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d^2 & 1) \\ 2) \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = (x+3) \cdot d^6 & 2) \end{cases}$$

$$1) \cdot 2) : (x+3)^2 \cdot d^6 = \frac{(25x-9)}{x-6} \cdot d^2$$

$$\begin{cases} x+3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d^2 \\ \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d^8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d \\ d^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \end{cases}$$

$$D, P, 3: \begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x-9 \geq 0 \\ (x-6)^3 \geq 0 \end{cases}$$

$$d^2 = \frac{1}{\sqrt{|x-6|}} \rightarrow x+3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-6|}}$$

$$x+3 = \sqrt{|25x-9|}$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = |25x-9| \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x \geq 9/25 \\ (x+3)^2 = 25x-9 \\ x < 9/25 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x \geq 9/25 \\ x^2+6x+9 = 25x-9 \\ x < 9/25 \\ x^2+6x+9 = 9-25x \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ \left[ \begin{array}{l} x \geq 9/25 \\ x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x < 9/25 \\ x^2 + 31x = 0 \end{array} \right] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \in \{1; 18\} \\ x \in \{0\} \end{array} \right. \\ \Downarrow \\ x \in \{0; 1; 18\}$$

Проверим, что при <sup>←</sup> всех таких  $x$ , выполняется

ОДЗ:  $\frac{25x-9}{(x-6)^2} \geq 0$

+      -      +  
          •      •      → x  
          9/25    6

$x = 1$  не подходит →

Ответ:  $x \in \{0; 18\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Система уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}, \text{ заметим, что}$$

$$\sqrt{81-z^2} \leq 9; \text{ пусть } f(y) = |y+4| + 4|y-5|$$

$$\text{, найдем } f_{\min}; \begin{cases} f(y) = 5y - 16, \text{ при } y \geq 5 \\ f(y) = 24 - 3y, \text{ при } -4 \leq y < 5 \\ f(y) = 16 - 5y, \text{ при } y < -4 \end{cases}$$

отсюда следует, что  $f_{\min} = 9$  и это

достигается при  $y = 5$ , а значит  $y = 5$

$$z^2 = 0 \rightarrow z = 0 \quad y = 5$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2 \cdot \sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(x+5)(1-x)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad x \in [-5; 1]$$

$$1) \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{(x+5)(1-x)} - 4$$

Возведём в квадрат, но при этом могут появиться корни, которых нет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+5+1-x-2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x)$$

$$16\sqrt{(x+5)(1-x)} + 16; \text{ Пусть } t = \sqrt{(x+5)(1-x)}$$

$$6 - 2t = 4t^2 - 16t + 16$$

$$4t^2 - 14t + 10 = 0 \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1; \\ t = \frac{5}{2}; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+5)(1-x)} = 1 \\ \sqrt{(x+5)(1-x)} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x - x^2 = 1 \\ 5 - 4x - x^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{2} \end{cases} \quad x \in \left\{ -2 - 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2; \frac{-4 - \sqrt{11}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{11}}{2} \right\}$$

Подставим эти корни в уравнение 1\* и проверим, что они подходят, для этого надо убедиться, что знак левой и правой части совпадают.

$$x = -2 - 2\sqrt{2} \text{ — подходит} \\ (\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}) = -2$$

$$x = -2 + 2\sqrt{2} \text{ — не подходит} \\ \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2$$

$$x = \frac{-4 - \sqrt{11}}{2} = -2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ — не подходит}$$

$$(\sqrt{3 - \frac{\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{3 + \frac{\sqrt{11}}{2}}) = 1 \quad x = \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \text{ — не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\rightarrow x \in \left\{ -2 - 2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{11}}{2} - 2 \right\}$$

$$\text{Ответ: } (-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0) \left( \frac{\sqrt{11}}{2} - 2; 5; 0 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

Найти все  $p$ , при которых уравнение имеет хотя бы одно решение.  $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = (2\cos^2 x - 1)\cos x -$$

$$\sin 2x \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= \cos x(4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$p \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6(2\cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p\cos^3 x - 3p\cos x + 3p\cos x + 12\cos x = 12\cos^2 x + 4$$

$$4p\cos^3 x + 12\cos x - 12\cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x + 3\cos x - 3\cos^2 x - 1 = 0$$

~~1)~~ 1)  $\cos^3 x = 0 \rightarrow \cos x = 0$ , равенство не выполняется

$$p = \frac{3\cos^2 x - 3\cos x + 1}{\cos^3 x}$$

Пусть  $t = \cos x$ ;

$$f(t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}; \quad p = f(t)$$

$$t \in [-1; 1]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3}{t^2} + \frac{6}{t^3} - \frac{3}{t^4} = \frac{1}{t^4} \left( -3 + \frac{6}{t} - \frac{3}{t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{t^4} \left( -3t^2 + 6t - 3 \right) = -\frac{3}{t^4} \left( t^2 - 2t + 1 \right) = \\ &= -\frac{3}{t^4} (t-1)^2 \end{aligned}$$

φ. всегда  $\leq 0$

Функция  $f(t)$  убывает при  $t \in [-1; 0)$  и  $t \in [0; 1]$

$$f'(t) \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$p = f'(t)$ , а следовательно при  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$  существует одно решение есть, а иначе нет

Ответ:  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме о касательной и секущей

$$CD^2 = CB \cdot CE;$$

$$CD^2 = AD \cdot KD;$$

замечаем, что

так как

$$\angle CKD = \angle KDE$$

$\angle CAK = \angle CAE \rightarrow AD$  — биссектриса угла  $CAE$ ;

$\rightarrow$  по теореме о биссектрисе

$$\triangle CAE: CO/OE = AC/AE = \frac{2}{5}$$

$CK \perp$  точка  $K$  лежит на биссектрисе  $\rightarrow \angle CKD$  — биссектриса

угла  $\angle CKE \rightarrow CK/KE = 2/5; \rightarrow KE = DE \rightarrow$

$\triangle KED$  — равнобедренный.

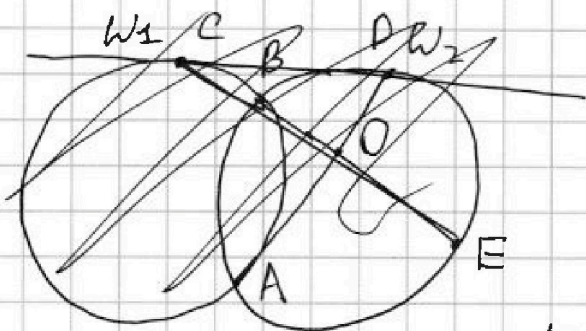


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

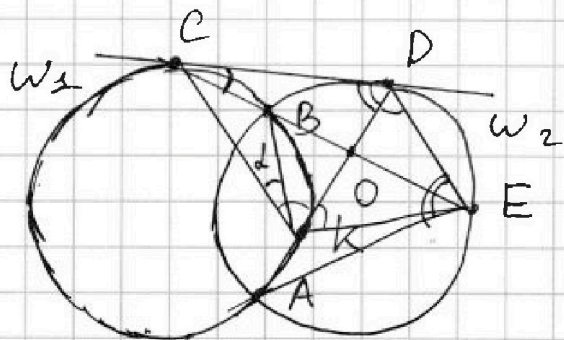
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$CO/OE = 2/5$ ;  
С и D - точки касания  
Найти  $EP/CD$ ;



Пусть точка K - это  
точка пересечения  
AD и окружности  $W_1$   
тогда докажем, что  
 $CK \parallel DE$ ;

1) AB антипараллельно DE отн  
 $\angle DOE$  2) AB антипараллельно  
CK отн  $\angle POE$   
а следовательно  $CK \parallel DE$

$\triangle COK \sim \triangle DOE$  по двум углам.

$$\Rightarrow CO/OE = KO/OD = CK/DE = 2/5$$

$CK/DE = R/r$ , где R - это  
радиус окружности  $W_1$ , а r - это  
радиус окружности  $W_2$ ,  
Отсюда  $R/r = 2/5$

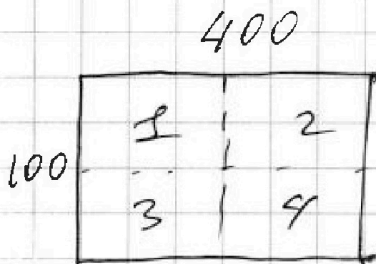


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сколькими способами можно раскрасить 8 клеток этого прямоугольника, чтобы это множество клеток обладало одной из след.

симметрий: относительно центра

2) оти любой из двух средних линий прямоугольника.

Разобьём наш прямоугольник на 4 прямоугольника размером  $50 \times 200$ , и пронумеруем их от 1 до 4.

Заметим, что если в одном из этих прямоугольников  $\geq 3$  закрашенных клеток, то кол-во всех закрашенных клеток  $\geq 12$ , так как можно отразить эти  $\geq 3$  клетки во все прямоугольники, а следовательно в каждом прямоугольнике  $\leq 2$  клеток, заметим, что выбор двух клеток в одном из прямоугольников однозначно задаёт 8 точек, а следовательно кол-во способов разбить ~~разбить~~ закрасить 8 клеток равно кол-ву способов выбрать 2 клетки



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{в прямоугольнике } 50 \times 200; \\ & = C_{10000}^2; \quad = \text{Ответ: } C_{10000}^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$a^2 + b = 710$$

$b - a$  не кратно 3

$(a - c)(b - c)$  — квадрат простого числа

↓  $(a; b; c)$  — в.о. таких чисел.

$$c^2 - (a+b)c + ab = p^2, \text{ где } p - \text{некоторое простое число}$$

1) Пусть  $a \not\equiv 3$  и  $b \not\equiv 3$ , а значит

$$\text{либо } \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3} \\ b \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ b \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Заметим, что первый случай не возможен,

если рассмотреть  ~~$a^2 + b = 710$~~   $a^2 + b = 710$  по модулю 3.

2) пусть  $a \equiv 3$ , а значит, если

$$a^2 + b = 710 \rightarrow b \equiv 710 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$
$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{3} \\ b \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

3) пусть  $b \equiv 3$ , а значит  $a^2 \equiv 2 \pmod{3}$ ,

а такое невозможно  $1^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$

$$2^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$$

То есть осталось два

$$3^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

варианта

$$\begin{cases} 1) \begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ b \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \\ 2) \begin{cases} b \equiv 2 \pmod{3} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $c^2 - (a+b) \cdot c + ab = p^2$ , рассмотрим это выражение по модулю 3. для первого случая, когда  $\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ b \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

$$\rightarrow c^2 + 2 = p^2 \pmod{3}$$

Квадрат числа  $c$  даёт остаток либо 1 при делении на 3, либо 0. Отбросим вариант, когда  $c^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , потому что из этого вытекает, что  $p^2 \equiv 2 \pmod{3}$ , а такое невозможно.

$$\rightarrow c^2 \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

а значит  $p : 3 \rightarrow p = 3$

в первом случае получается, что  $p = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} a < b \\ a \equiv 2 \pmod{3} \\ b \equiv 1 \pmod{3} \\ (a-c)(b-c) = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = 3 \\ \rightarrow a = b, \text{ а} \end{cases}$$

такое невозможно так как числа  $a$  и  $b$  дают одинаковый остаток при делении на разный



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad c^2 - (a+b)c + ab = p^2 \quad \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{3} \\ b \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \rightarrow \text{либо} \quad \begin{cases} (a-c) = p \\ (b-c) = p \end{cases}, \text{ что}$$

невозможно, потому - что тогда

$$a = b, \text{ а значит} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\text{если } p \nmid 3, \text{ значит} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a \equiv b \pmod{3}, \text{ а такое невозможно по условию задачи} \rightarrow p \nmid 3 \rightarrow p=3$$

$$p=3, \rightarrow b-a=8$$

$$b = a + 8$$

$$a^2 + a + 8 = 710$$

$$702 = 351 \cdot 2$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$\begin{array}{r} 351 \overline{) 702} \\ \underline{-702} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \\ \underline{-0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \phantom{0} \\ \underline{-26} \\ 27 \end{array}$$

$$a_1 = 26$$

$$a_2 = -27$$

$$\begin{array}{r} 117 \overline{) 39} \\ \underline{-39} \\ 0 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = 26 \rightarrow b_1 = 34$$

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$$a_2 = -27 \quad b_2 = -19$$

$$c^2 - (a+b)c + ab = 9$$

$$1) \quad c^2 - 60c + 26 \cdot 34 - 9 = 0$$

$$c^2 - 60c + 30^2 - 4^2 - 9 = 0$$

$$c^2 - 60c + 25 \cdot 35 = 0$$

$$c_1 = 25 \quad c_2 = 35 \quad \text{По теореме Виета.}$$

$$2) \quad c^2 + 46c + 27 \cdot 19 - 9 = 0$$

$$c^2 + 46c + 23^2 - 4^2 - 9 = 0$$

$$c^2 + 46c + 18 \cdot 28 = 0$$

$$c_3 = -18 \quad c_4 = -28$$

Ответ:  $(26; 34; 25) \quad (-27; -19; -18)$   
 $(26; 34; 35) \quad (-27; -19; -28)$



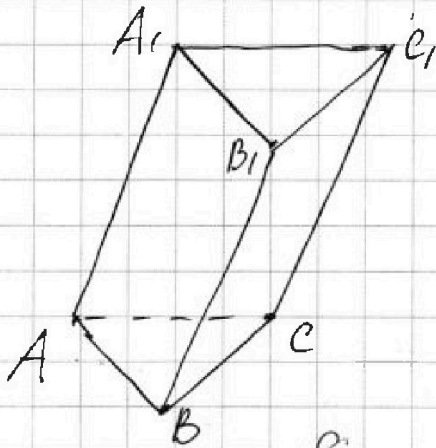


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$  - равносторонний  
треугольник.

$$S_{ABC} = 1; \text{ Пусть } AB = a;$$

$$\rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}; \quad AB = BC = AC = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

$S_{ABB_1A_1} = S_{ACC_1A_1} = 3$  и  $S_{BCC_1B_1} = 2$ ;  
Площади боковых граней  
равны 3, 3 и 2;

Заметим, что боковые грани призмы  
являются параллелограмми.

Пусть из соображений общности

$$S_{ABB_1A_1} = S_{ACC_1A_1} = 3 \text{ и } S_{BCC_1B_1} = 2$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_A \quad S_{ABB_1A_1} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \angle A_1AB$$

$$S_{ACC_1A_1} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle A_1AC;$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{ACC_1A_1} \Rightarrow \sin \angle A_1AB = \sin \angle A_1AC;$$

это значит, что либо  $\angle A_1AB = \angle A_1AC$

либо  $\angle A_1AB + \angle A_1AC = 180^\circ$ , но

второе не возможно, потому что сумма

углов в трёхгранном угле должна быть

меньше  $\leq 180^\circ$ ,  $\rightarrow \angle A_1AB = \angle A_1AC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по свойству трёхгранного угла.

для вершины  $A$ :

точка  $A_1$  проецируется на биссектрису угла  $BAC$ ;

а так как  $\triangle ABC$  - равносторонний, то и на высоту  $\triangle ABC$  из точки  $A$  проведена перпендикулярная на  $BC$ .  $\rightarrow AA_1 \perp BC$ , а по

свойству трёх перпендикуляров, если проекция перпендикуляра на некоторую прямую, то и наклонная тоже перпендикулярна

этой же прямой.  $\rightarrow AA_1 \perp BC$ ,

по свойству призмы  $BB_1A_1A$  её боковые рёбра параллельны, а значит по

транзитивности получаем, что

в  $BB_1A_1A$  - прямоугольнике  $BB_1 \perp BC$   
 $AA_1 \perp BC$

$$S_{\text{проекции}} = BC \cdot BB_1 = 2 \rightarrow BB_1 = \sqrt[4]{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

